

LDPC 码误码平台研究进展

孙德红¹, 肖 琳², 王 琳², 曾吉文¹

(1. 厦门大学数学科学学院, 厦门 361005; 2. 厦门大学通信工程系, 厦门 361005)

摘要: 低密度奇偶校验 (LDPC) 码在迭代译码下具有优越的性能, 但是在高信噪比区呈现出误码平台 (error floor) 现象。综合分析了低密度奇偶校验码的误码平台现象及其产生的原因, 重点描述了陷阱集及其对 LDPC 码误码平台的影响, 同时阐述了估计和降低 LDPC 码误码平台的方法, 并对今后 LDPC 码误码平台研究的重点和方向提出了展望。

关键词: 低密度奇偶校验 (LDPC) 码; 误码平台; 陷阱集; BP 算法

Advances of the error floor study of LDPC codes

SUN De hong¹, XIAO Min², WANG Lin², ZENG Ji wen¹

(1. School of Mathematical Sciences, Xiamen University, Xiamen 361005, China;

2. Department of Communication Engineering, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: Low-density parity check (LDPC) codes are known to perform very well under iterative decoding. However, these codes often exhibit an error floor phenomenon in the high signal-to-noise (SNR) region. This paper provides a comprehensive description of the cause of the error floor phenomenon of LDPC codes. It presents a detailed description of the trapping sets, describes the methods to estimate and reduce the error floor of LDPC codes. Finally, it proposes the future development of the error floor of LDPC codes.

Key words: low-density parity check (LDPC) codes; error floor; trapping sets; belief propagation algorithm

0 引言

1993年 Turbo 码的提出, 人们发现运用随机码和迭代译码算法去接近香农限的思想方法, 随之涌现出众多靠近香农限的信道编码类型, 其中最值得关注的当属 1997 年再次被人们重新发现的低密度奇偶校验码 (Low-Density Parity Check 码, 简称 LDPC 码)^[1-2]。研究表明, 被优化了的非规则 LDPC 码在码长为 10^7 、误比特率 (BER) 为 10^{-6} 条件下, 离香农限仅相差 0.045dB, 这远远超过了 Turbo 码, 成为最靠近香农限的码型^[3]。同时, LDPC 码描述简单, 对严格的理论分析具有可验证性; 译码复杂度低于 Turbo 码, 且可实现完全的并行操作, 适合硬件实现; 吞吐量, 具有高速译码潜力。以上诸多优势使得 LDPC 码成为最近十年信道纠错编码领域的新热点。

LDPC 码在低信噪比区具有优异的性能, BER 可以随着信噪比的增加而指数下降, 但是在高信噪比

区, BER 下降到约 10^{-7} 之后就不再随信噪比增加而显著下降, 呈现出了误码平台 (error floor) 现象。误码平台的产生限制了 LDPC 码在通信系统中的进一步应用, 如磁盘存储系统和深空通信系统都要求 BER 达到 10^{-15} 以下, 而考虑到未来移动通信系统多媒体业务需求, 误比特率性能指标也可能降至 10^{-7} 以下, 因此 LDPC 码的误码平台成为该码型研究领域急需解决的瓶颈问题。近几年, 国际上对 LDPC 码误码平台的研究已经取得了重要进展。本文将在以下几节中分别综合论述 LDPC 码误码平台的产生原因、估计手段, 以及降低误码平台的各种设计方法。

收稿日期: 2008-09-17

作者简介: 孙德红 (1983-), 女, 硕士研究生, 2006 年毕业于烟台师范学院数学与信息学院, 现就读于厦门大学数学科学学院, 主要研究方向为信息安全与移动通信系统及高效纠错编码技术。

1 LDPC 码误码平台的产生原因

LDPC 码采用的是信度传播译码算法 (Belief Propagation, 简称 BP 算法), 这是一种次优的译码算法, 会产生两种导致误码平台的错误: 不可检测错误与可检测错误。不可检测错误是指译码收敛到非传递码字的其他许用码字而造成的错误, 在这种情况下, 码的所有校验方程都满足, 无法检测出错误的发生。可检测错误是指译码器经过一定迭代次数之后仍无法收敛到许用码字所造成的错误。研究者们认为误码平台产生的主要原因是陷阱集 (trapping sets)^[4]、停止集 (stopping sets)^[5]、吸收集 (absorbing sets)^[6] 的存在, 后两种可以看成是陷阱集在特定条件下的表现形式, 陷阱集也涵盖了 BP 译码下的上述两种错误, 所以本文将重点介绍陷阱集。

为了分析 LDPC 码的误码平台, Richardson^[4] 首次提出了陷阱集的概念: 假设采用二元 LDPC 编码, 且该码组对应的因子图中有 N 个变量点。令 Y 表示译码器所有可能输入值的集合, 则一次迭代译码定义为一个序列的映射: $D_l(y): Y \rightarrow \{0, 1\}^N, l = 0, 1, 2, 3, \dots$, 其中 $D^l(y)[i]$ 表示译码器输出的第 i 个比特, l 表示迭代次数。假设信道和译码算法具有

对称性, 这种情况下, 不失一般性, 可以假设采用全零码字传输^[7]。若存在 l , 使得对所有的 $i > l$, 有 $D^l(y)[i] = 0$, 则称比特 i 最终正确译出; 若所有的比特都能最终正确译出则称译码正确。对一个给定的输入 y 定义失败集 $T(y)$ 为最终不能正确译出的比特集。显然对一个码字 y 来说, 当且仅当 $T(y) = \Phi$ 时, 译码正确; 若 $T(y) \neq \Phi$, 则称 $T(y)$ 为一个陷阱集。

若 T 诱导出的子图中有 a 个变量点和 b 个奇度的校验点, 则称 T 是一个参数为 (a, b) 的陷阱集 ($a > 0, b \geq 0$)。特别的, 若 T 诱导出的子图中有 a 个变量点和 b 个度为 1 的校验点, 且其余校验点的度都为 2, 则称为 T 是一个参数为 (a, b) 的基本陷阱集 (elementary trapping set), 对误码平台产生主要影响的大都是基本陷阱集^[8]。实际上, 可以认为陷阱集是经过某个固定迭代次数 (一般比较大) 仍不能正确译出的比特集。图 1 给出了 LDPC 码的一个 $(4, 2)$ 陷阱集, 该陷阱集有 4 个变量点 $[V_0, V_1, V_2, V_3]$, 2 个度为 1 的校验点 $[C_3, C_6]$, 5 个度为 2 的校验点 $[C_0, C_1, C_2, C_4, C_5]$ 。

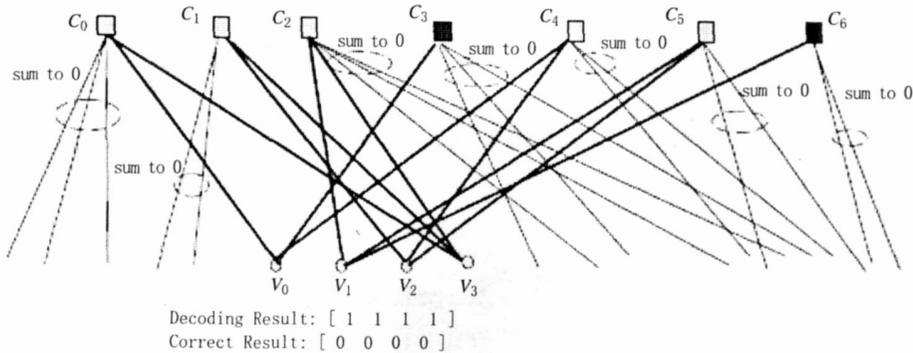


图 1 $(4, 2)$ 陷阱集

如图 1 所示, 当陷阱集中的变量点 $[V_0, V_1, V_2, V_3]$ 处于错误状态时, 由于偶度的奇偶校验点 $[C_0, C_1, C_2, C_4, C_5]$ 是满足的, 所以这些校验点将会在接下来的迭代中传播 $[V_0, V_1, V_2, V_3]$ 的错误信息, 此时奇度的校验点 $[C_3, C_6]$ 不满足, 将阻止错误信息的传播, 但由于数量少而不足以纠正 $[V_0, V_1, V_2, V_3]$ 的错误, 这样译码器就始终陷于一个错误的状态, 无法自纠正。可以看出, 当不满足的校验点个数 (即 b 的大小) 越小时, 译码器就越不容易逃离“陷阱”状态。特别的, 当 $b = 0$ 时, 所有的校验方程都满足, 此时译码器输出的是一个许用码字, 但不是所发

送的码字, 由此造成了不可检测错误。

一般来说, 如果在迭代译码结束后出现了 (a, b) 陷阱集, 并不意味着迭代开始前陷阱集中这 a 个变量点的初始信息都是错的, 也有可能只有其中某几位的初始信息出错。由于初始信息错误而导致 (a, b) 陷阱集出现的最小变量点个数 $k (k \leq a)$ 称为 (a, b) 陷阱集的临界值。陷阱集的临界值越小, 该陷阱集出现的概率越大, 所导致的错误概率越大^[9-10]。

在不同的传输信道和译码算法下, 陷阱集有不同的表现形式。对于最大似然译码, 陷阱集表现为非零码字; 在 BEC 信道下, 若采用迭代译码, 则陷阱

集表现为停止集, 误码平台主要由停止集的大小和分布决定^[5]; 在 AWGN (加性高斯白噪声) 信道下, 陷阱集没有已知的简单特征, 它是由码本身的结构和迭代译码算法共同决定的^[4]。

2 LDPC 码误码平台的估计

LDPC 码的误帧率 FER (error frame rate) 与陷阱集的关系可以用如下式子表示:

$$FER = \sum_T Pr\{\xi_T\} \quad (1)$$

其中, ξ_T 表示导致陷阱集 T 产生的某一个信道输入集。因为一个陷阱集的产生就意味着这一帧译码的失败, 所以 FER 是所有陷阱集出现概率之和^[4]。

按照 (1) 式, 对 LDPC 码误码平台的估计一般分为如下三个步骤^{[4][11]}:

第一步: 找出覆盖误码平台区域的所有陷阱集。由于搜索到所有的陷阱集是一个 NP 完全问题^[12], 目前已知的搜索技术并不能保证找出所有的陷阱集, 所以估计出的是 FER 的下界。

第二步: 对搜索到的陷阱集进行分类。按照因子图的自同构把搜索到的陷阱集分成若干类, 属于同一类的陷阱集对误码平台的影响是近似相等的, 所以只需估计每类的一个陷阱集。

第三步: 根据每一个陷阱集的参数 (a, b), 估计 $Pr\{\xi_T\}$ 。先对每一类陷阱集进行计算, 然后对所有类求和, 即得到近似 FER。

多数研究者都是通过上述步骤估计出了 LDPC 码的误码平台: Richardson^[4] 通过硬件仿真识别陷阱集, 进而估计 LDPC 码在 AWGN 信道误码平台。Enver Cavus 等人基于因子图结构的组合特征, 结合重要性采样方法来估计 LDPC 码在迭代译码下的误码平台, 比文献[4]提出的方法减少了仿真量^[11]。Xinde Hu 等人估计了码长较长的 LDPC 码在 PR 信道下的误码平台^[13]。

3 LDPC 码误码平台降低方法

对误码平台分析研究的另一个重要部分集中于寻找降低误码平台的方法。通过上述的分析可以看出 LDPC 码误码平台产生的主要原因是 BP 译码算法作用在因子图中的某种拓扑结构而产生了无法自纠正的错误——陷阱集, 所以对误码平台的降低方法主要归结为两种: ①改进 BP 译码算法; ②构造好的拓扑结构, 避免陷阱集的出现。

T. Hehn 等人提出平均 BP 译码^[8], 通过对所传递信息的平均来降低错误信息进出陷阱集的速度, 通过信息的平均可以阻止变量点信息的振荡, 从而增加了收敛到正确码字的可能性。平均方式有多种, 如代数平均, 几何平均, 加权平均等。但平均译

码方式增加了译码迭代次数, 增加了译码时延和复杂度。

从改进译码算法的角度来降低误码平台, 平均 BP 译码是以牺牲收敛速率为代价的, 而联合行-列译码算法^[14]则是通过逐渐更新所有变量点的后验概率来阻止陷阱集中的错误信息向整个因子图传播, 传统的 BP 算法中行和列是分开处理的, 要等所有行 (或者列) 全部处理完才能进行下一列 (或者行) 的计算, 而联合行-列译码算法只要有一个行 (或者列) 的外信息更新, 就可以立刻更新下一列 (或者行)。这种改进的译码算法减少了迭代次数, 从而增加了收敛速度。从图 2 可以看出联合行-列译码大大提高了译码的收敛速率, 因此在相同的迭代次数下, 联合译码改善了纠错性能。

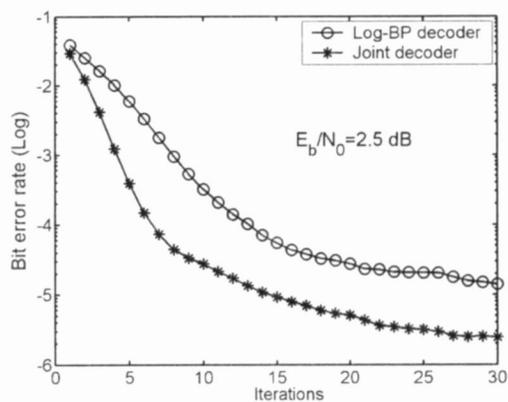


图 2 两种译码方式在不同信噪比条件下的 BER 性能比较

构造具有好的拓扑结构的码型, Wang 在文献 [15] 中研究了 BEC 信道下修改码结构来改善性能, 它是以增大停止集 (或陷阱集) 的大小为目标的。码因子图内部边的交换提供了一个破坏停止集的方法, 文章中 CA 算法是一种设计短码长好码的方法。文献 [16] 提供了类似的方法, 它有两个或两个以上相同的码的复制, 在相同的复制码之间进行边的交换, 通过这种方法来破坏主要的陷阱集。图 3 给出了 AWGN 信道下 Tanner (155, 64) 码与通过码复制以及边的交换后得到的修改 Tanner (310, 17) 码及随机 (310, 17) 码性能的比较。另外, Thorpe^[17], Divsalar and Jones^[18], 和 Sridhara and Rosenthal^[19] 也都用到了与文献 [16] 类似的方法。这种方法的优点是具有普遍性, 可以被应用于任何码字, 任何信道模型, 任何译码算法。它改善性能仅仅以增加码长为代价, 保持了码的规则性, 它不改变译码算法, 并且在一定条件下不降低码率。

避免临界值较小的陷阱集出现是降低误码平台的关键, 一个可以纠正 i 个错误的码具有的最小临界值为 $(i+1)$, Shashi Kiran Chilappagari 等人^[9] 从提

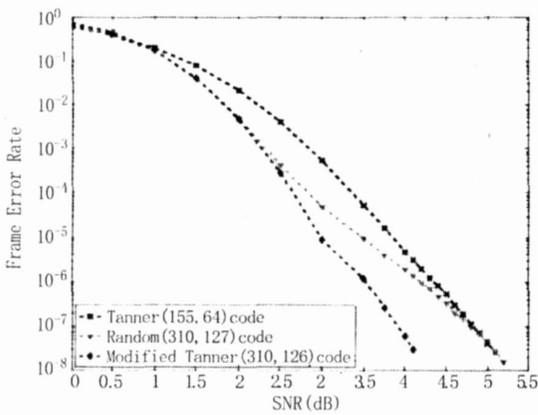


图3 Tanner(155, 64)码, 修改 Tanner(310, 17)码及随机(310, 17)码性能的比较

高陷阱集的临界值出发, 构造了一种列重为 3 的码, 在迭代译码下可纠正三个错误, 该方法可以扩展到纠正更多错误和更高列重的码, 但这样会使得码型的构造复杂度更高。

对迭代译码来说, 拥有满秩奇偶校验矩阵的 LDPC 码的误码平台比较高, 因此考虑给奇偶校验矩阵增加冗余行来降低误码平台, 即希望通过增加冗余校验方程来实现增加陷阱集中不满足的校验方程的个数, 以期纠正陷阱集中的错误。一旦陷阱集被检测到, 就合理地选择冗余行增加到奇偶校验矩阵, 重新开始译码过程^[8, 20]。

4 结束语

LDPC 码在信息可靠传输中的良好应用前景已经引起学术界和 IT 业界的高度重视, 成为当今信道编码领域最受瞩目的研究热点之一。LDPC 码误码平台问题却限制了其应用, 因此解决这个问题极为重要。误码平台产生的主要原因是 LDPC 码因子图结构以及 BP 译码算法产生了陷阱集, 本文重点解释了陷阱集的定义及其对误码平台的影响, 介绍了估计 LDPC 码误码平台的步骤以及降低误码平台的方法: 估计误码平台的关键是找出所有陷阱集, 降低误码平台的两条主线是改进译码算法和构造新的码结构。从目前的研究来看, 今后仍需要探寻找出所有影响 LDPC 码误码平台的陷阱集的方法, 需要继续寻找低复杂度的译码算法和好的码型结构以降低误码平台, 以及探寻其他降低误码平台的方法。此外, LDPC 码的误码平台可能不仅仅受限于陷阱集, 还受到他因素的影响, 更有待于进一步深入研究。

参考文献:

[1] Gallager R G. Low-Density Parity-Check Codes[M]. Cambridge, Mass: MIT Press, 1963.
 [2] Mackay D J C, Neal R M. Near Shannon limit performance of low density parity check codes[J]. Electronics Letters, 1996, 32(18): 1645-1646.

[3] Sae Young Chung, David Forney G, Thomas J Jr, et al. On the design of low-density parity check codes within 0.0045 dB of the Shannon limit[J]. IEEE communications letters, Feb. 2001, 5(2): 58-60.
 [4] Richardson T. Error floors of LDPC codes[C]//Proc. of the 41st Annual Allerton conference on Communication, control and computing, Oct. 2003.
 [5] Proletti C Di D, Telatar T, Richardson T J, et al. Finite length analysis of low-density parity check codes on the binary erasure channel[J]. IEEE Trans. on Info.Th, 2004, 48(6): 1115-1131.
 [6] Lara Dolecek, Zhengya Zhang, Martin Wainwright, et al. Evaluation of the Low Frame Error Rate Performance of LDPC Codes Using Importance Sampling[C]. ITW 2007, Lake Tahoe, California, September 2-6, 2007.
 [7] Richardson T J, Shokrollahi M A, Urbanke R L. Design of capacity approaching irregular low-density parity check codes[J]. IEEE Trans. Info. Theory, 2001, 47(2): 619-637.
 [8] Hehn T, Laendner S, Milenkovic O, et al. Two Methods for Reducing the Error Floor of LDPC codes, preprint[EB/OL]. http://arxiv.org/. [2006].
 [9] Shashi Kiran Chilappagari, Anantha Raman Krishnan, Bane Vasí c. LDPC Codes Which Can Correct Three Errors Under Iterative Decoding, preprint[EB/OL]. http://arxiv.org/, 2008.
 [10] Ivkovic M, Chilappagari S K, Vasic B. Eliminating trapping sets in low-density parity check codes using Tanner graph lifting[C]//International Symposium on Information Theory, 2007.
 [11] Enver Cavus, Charles L Haymes, Babak Daneshmand. An IS Simulation Technique for Very Low BER Performance Evaluation of LDPC Codes [J]. IEEE ICC 2006 proceedings. June 2006, 3: 1095-1100.
 [12] Chir Chun Wang. On the Exhaustion and Elimination of Trapping Sets: Algorithms & The Suppressing Effect[C]. ISIT2007, Nice, France, June 24-June 29, 2007.
 [13] Xinde Hu, Vijaya Kumar B V K, Zongwang Li, et al. Error floor estimation of long LDPC codes on Partial Response Channels[C]. Global Telecommunications Conference, GLOBECOM'07, IEEE, Washington, DC, USA, 2007.
 [14] Zhiyong He, Sébastien Roy, Paul Fortier. Lowering error floor of LDPC codes using a joint row column decoding algorithm[C]. ICC 07. IEEE International Conference on Communications, 24-28 June 2007.
 [15] Wang C. Code annealing and the suppressing effect of the cyclically lifted LDPC code ensemble[J]. IEEE Information Theory Workshop, Chengdu, China, 2006: 86-90.
 [16] Mil's Ivković, Shashi Kiran Chilappagari, Bane Vasí c, Eliminating Trapping Sets in Low-Density Parity Check Codes by using Tanner Graph Covers[J]. IEEE Information Theory, 2008, 54(8): 3763-3768.
 [17] Thorpe J. Low-Density Parity Check (LDPC) Codes Constructed from Protographs[R]. The Interplanetary Network Progress Report 42-154, April-June 2003, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California, http://ipnpr.jpl.nasa.gov/tm/progress-report/42-154/154C. August 15, 2003.
 [18] Divsalar D, Jones C. Protograph LDPC Codes with Node Degrees at Least 3[C]. Proc. IEEE Globecom, San Francisco, CA, USA, IEEE press 2006.
 [19] Kelley C, Sridhara D, Rosenthal J. Tree Based Construction of LDPC Codes Having Good Pseudocodeword Weights, preprint[EB/OL]. http://arxiv.org [2006].
 [20] Hehn T, Laendner S, Milenkovic O, et al. when does one redundant parity check equation matter[C]. Proc. IEEE Globecom, San Francisco, CA, USA, IEEE press, 2006.

责任编辑:肖滨