市场组合的比较静态分析*

杨智元　林海蒂

摘　要: 在无风险利率发生变动时, 如假设相应证券的预期收益发生变动, 而风险仍保持不变, 用弹性分析的方法考察市场组合预期收益的利率弹性, 由于组合点相应的风险发生了改变, 组合的预期收益的利率弹性比单个证券的利率弹性要大。如果引入变差系数, 用变差系数定义“风险”, 则“风险”不因无风险利率的变动而变动。

关键词: 市场组合;　无风险利率;　利率弹性

自马可维兹提出资产组合理论以来, 各种有关资产组合的文章如雨后春笋般出现, 其中最为出名的莫过于把组合理论发展用于研究某一证券风险与其期望收益关系的资本资产定价模型(CAPM)。此后大多数这方面的文章都是做 CAPM 的实证检验工作。本文拟用比较静态分析的方法, 考察外界条件(无风险利率) 发生变化对证券市场组合(market portfolio) 所起的影响。

我们先看图 1, 图中纵轴代表预期收益, 横轴代表风险(这里用 σ^2 代表风险, 一般文章均用 σ 表示)。假设证券市场只有两种风险证券: 一种为证券 A, 其期望收益及风险为(EX_1, σ_1^2), 另一种为证券 B, 相应的期望收益及风险为(EX_2, σ_2^2)。另外, 假设投资者可以按无风险利率借贷资金。设无风险利率为 r, 根据资产组合理论, 我们知道, 若持有不同份额证券 A、B 组合, 则持有组合证券期望收益与风险的各点构成组合机会集(portfolio opportunity set), 即曲线 AB。下面我们先给出 AB 的方程。

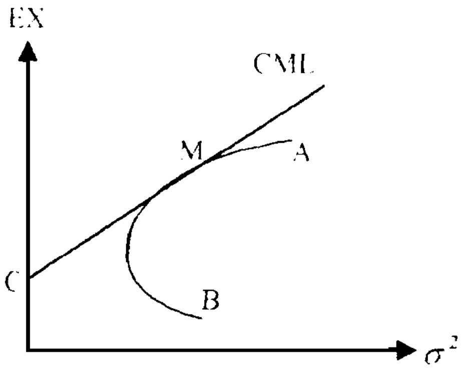

图 1　组合证券预期收益与风险的组合机会集

设持有证券 A、B 的份额为 p、$1-p$, 证券组合的期望收益与风险分别为(EX, σ^2) 则:

$$\begin{cases} EX = pEX_1 + (1-p)EX_2 \\ \sigma^2 = p^2\sigma_1^2 + (1-p)^2\sigma_2^2 + 2p(1-p)\rho\sigma_1\sigma_2 \end{cases} \tag{1}$$

* 本文是国家自然科学基金课题《国债管理系统研究》和《我国开放型市场经济条件下货币和财政政策的协调机制》的成果之一。

这里,ρ为证券A 与证券B 的相关系数。

在持有证券份额 p 变化时,$(EX,\ \sigma^2)$ 构成曲线AB,我们把方程组(1)看成以 p 为参数的参数方程,可以求得AB 的方程为:

$$\sigma^2=\left(\frac{EX-EX_2}{EX_1-EX_2}\right)^2\sigma_1^2+\left(\frac{EX-EX_2}{EX_2-EX_1}\right)^2\sigma_2^2+\left(\frac{EX-EX_1}{EX_2-EX_1}\right)\left(\frac{EX-EX_2}{EX_1-EX_2}\right)\rho\sigma_1\sigma_2$$

在以 EX 为纵轴,以 σ^2 为横轴的座标系中,组合机会集即AB 曲线的方程形式如下:$x=ay^2+by+c$,是一条抛物线的一部分(若以σ为横轴,则曲线形如:$x^2=ay^2+by+c$,是一条双曲线的一部分)。

现在我们引入无风险利率,或者说引入一种无风险证券C,其收益与风险分别为$(r,\ o)$,从C 点向曲线AB 引切线,则我们可得CML 线。我们称M 点为市场组合点(market portfolio point)。先看看M 点的情况:

首先,假设M 的座标$(EX_M,\ \sigma_M^2)$,在M 点相应持有A、B 证券份额为 p_0、$1-p_0$,则我们有:

$$\begin{cases}EX_M=p_0EX_1+(1-p_0)EX_2\\ \sigma_M^2=p_0^2\sigma_1^2+(1-p_0)^2\sigma_2^2+2p_0(1-p_0)\rho\sigma_1\sigma_2\end{cases}\tag{2}$$

利用参数方程的理论,可以知道,在M 点,曲线切线的斜率应满足:

$$k=\left.\frac{d(EX)}{d(\sigma^2)}\right|_{p=p_0}=\frac{\left.\dfrac{d(EX)}{d(p)}\right|_{p=p_0}}{\left.\dfrac{d(\sigma^2)}{d(p)}\right|_{p=p_0}}=\frac{EX_1-EX_2}{2p_0\sigma_1^2-2(1-p_0)\sigma_2^2+(2-4p_0)\rho\sigma_1\sigma_2}\tag{3}$$

但若考虑CML 线,它经过C 点与M 点,故其斜率应满足:$k=\dfrac{EX_M-r}{\sigma_M^2}$ (4)

把方程组(2)代入式(4)中,综合式(3)与式(4),可得,p_0 应满足关系式:

$$\frac{p_0EX_1+(1-p_0)EX_2-r}{p_0^2\sigma_1^2+(1-p_0)^2\sigma_2^2+2p_0(1-p_0)\rho\sigma_1\sigma_2}=\frac{EX_1-EX_2}{2p_0^2\sigma_1^2+2(1-p_0)\sigma_2^2+(2-4p_0)\rho\sigma_2\sigma_2}$$

亦即 p_0 为下述方程的根:

$$(EX_2-EX_1)(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)p^2-2(EX_2-r)(\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2)p+EX_1\cdot\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2(r-EX_2)-2r\cdot\sigma_2^2=0$$

故,若设:

$$\boldsymbol{Q}=EX_2^2\sigma_1^2+EX_1^2\sigma_2^2+r^2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)-2r\cdot EX_2\cdot\sigma_1^2-2r\cdot EX_1\sigma_2^2+2\rho\sigma_1\sigma_2r(EX_2+EX_1)-2\rho\sigma_1\sigma_2(EX_1EX_2+r^2)$$

则有:$p_0=\dfrac{EX_2-r\pm\sqrt{\dfrac{Q}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}}}{EX_2-EX_1}$

故:$EX_M=p_0EX_1+(1-p_0)EX_2=EX_2+(EX_1-EX_2)p_0=r\pm\sqrt{\dfrac{Q}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}}$

但是,事实上,若 $p_0=\dfrac{EX_2-r+\sqrt{\dfrac{Q}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma2}}}{EX_2-EX_1}$

则: $EX_M = r - \sqrt{\dfrac{Q}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}} < r$, 这不符合市场组合的要求, 这可从图 2 看出。故:

$$p_0 = \frac{EX_2 - r - \sqrt{\dfrac{Q}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}}{EX_2 - EX_1}$$

而: $EX_M = r + \sqrt{\dfrac{Q}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$

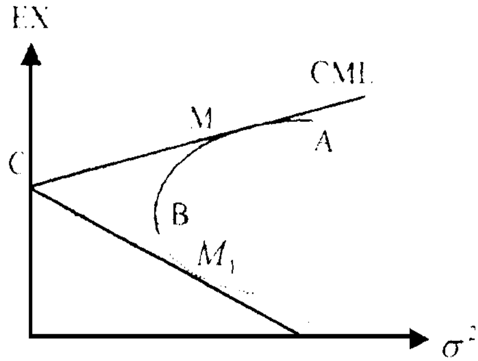

图 2　$EX_{M_1} < r$, M_1 点不符合要求

现在我们考虑若无风险利率由 r 变为 r_1, 如果假设证券收益与风险均不会因为无风险利率的变化而变化, 其相关系数也不发生改变的话, 则要确定市场组合, 只需把 r 改为 r_1 即可, 但事实上, 随着 r 的改变, 证券市场上证券的收益与风险均会有不同程度的改变。其具体情形如图 3, 在 r 变为 r_1 时(即 C 点变到 C′, A 点变到 A′ 点, B 点变到 B′), 曲线 AB 将变为 A′ B′, M 点相应变为 M′ 点。我们感兴趣的是 M′ 与 M 之间将是否有关系? 有何关系?

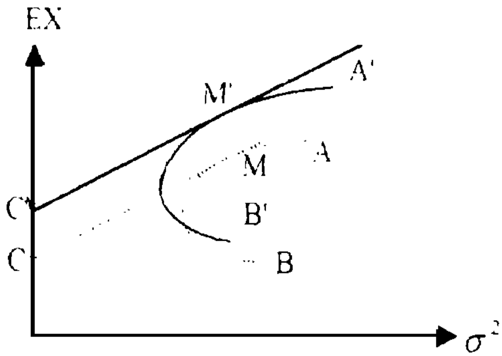

图 3　证券收益、风险与无风险利率的关系

我们先假定, 在无风险利率由 r 变到 r_1 时, B 证券的风险及相关系数均不发生变化。而相应的期望收益发生变化, 例如, 设 A 的预期收益增加了 10%, B 的预期收益也增加了 10%, 我们问是否 M 的预期收益也增加 10% 呢? 表面上看, 因为 $EX_M = p_0 EX_1 + (1 - p_0) EX_2$(这里 p_0、$1 - p_0$ 分别为 A、B 两证券的份额), 似乎 EX_M 也应增加 10% 。当然, 如果在 p_0 不改变的情况下, EX_M 毫无疑义也应增加 10%。但事实上, 随着 C、A、B 的移动, 相应的最优份额 p_0、$1 - p_0$ 一定会改变的。因此, EX_M 的变化不会那么直观。

按我们的假设, σ_1、σ_2、ρ 均为常数, EX_1、EX_2 可看成 r 的函数。p_0 也可看成 r 的函数。故 EX_M 可看成 r 的函数。r 的变化引起 EX_1、EX_2 的变化。反过来可由 r、EX_1、EX_2 确定 EX_M。

我们考察 M 点收益的利率弹性, 因为: $EX_M = r + \sqrt{\dfrac{Q}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}}$

对上式的两边微分, 得

$$d(EX_M) = dr + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma} dQ$$

$$\frac{d(EX_M)}{dr} = 1 + \frac{1}{2}\left(\frac{Q}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\right)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma} \frac{dQ}{dr}$$

M 点收益的利率弹性即为:

$$\frac{d(EX_M)}{dr}\frac{r}{EX_M}=\frac{r}{EX_M}+\frac{1}{2}\frac{r}{EX_M}\left(\frac{Q}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma}\frac{dQ}{dr}$$

而

$$\frac{dQ}{dr}=2\sigma_1^2\cdot EX_2\cdot\frac{dEX_2}{dr}+2\sigma_2^2\cdot EX_1\frac{dEX_1}{dr}+2r(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+(2\rho\sigma_1\sigma_2-2\sigma_1^2)(EX_2+r\cdot\frac{dEX_2}{dr})+(2\rho\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2^2)(EX_1+r\cdot\frac{dEX_1}{dr})-2\rho\sigma_1\sigma_2(EX_1\cdot\frac{dEX_2}{dr}+EX_2\cdot\frac{dEX_1}{dr})-4\rho\sigma_1\sigma_2 r$$

我们假设 A 证券收益的利率弹性为 l, B 证券收益的利率弹性为 m, 即:

$$\frac{dEX_1}{dr}\frac{r}{EX_1}=l,\quad \frac{dEX_2}{dr}\frac{r}{EX_2}=m$$ 则

$$\frac{dQ}{dr}=\frac{2m}{r}\cdot\sigma_1^2EX_2^2+\frac{2l}{r}\sigma_2^2\cdot EX_1^2+2r(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+(2\rho\sigma_1\sigma_2-2\sigma_1^2)(m+1)EX_2+(2\rho\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2^2)(l+1)EX_1-\frac{2}{r}\rho\sigma_1\sigma_2EX_1EX_2(m+1)-4\rho\sigma_1\sigma_2 r$$

把上述代入$\frac{d(EX_M)}{dr}\cdot\frac{r}{EX_M}$即可得 M 点预期收益的利率弹性为:

$$\frac{d(EX_M)}{dr}\frac{r}{EX_M}=\frac{r}{EX_M}+\frac{1}{2}\frac{r}{EX_M}\left(\frac{Q}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}\right)^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}$$
$$\left[\begin{array}{l}\frac{2m}{r}\sigma_1^2EX_2^2+\frac{2l}{r}\sigma_2^2EX_1^2+2r(\sigma_1^2+\sigma_2^2)+(2\rho\sigma_1\sigma_2-2\sigma_1^2)(m+1)EX_2\\ +(2\rho\sigma_1\sigma_2-2\sigma_2^2)(l+1)EX_1-\frac{2}{r}\rho\sigma_1\sigma_2EX_1EX_2(m+l)-4\rho\sigma_1\sigma_2 r\end{array}\right]$$

此时, 市场组合点预期收益的利率弹性与 EX_1、EX_2、σ_1、σ_2、ρ、r、l、m 均有关。

现在我们回到前面讨论的问题: 如果无风险利率发生了变化, 我们来考察市场组合点的变化。设初始时 A 证券的期望收益为 $EX_1=4.6\%$, 风险 $\sigma_1=5.62\%$; B 证券的期望收益为 $EX_2=8.5\%$, 风险 $\sigma_2=6.33\%$。相关系数 $\rho=0.1321$; 无风险利率 $r=4\%$, 现在假定无风险利率增加了 10%, 即 r 由 4%, 变到 4.4%。设 $l=m=1$, 即 A、B 证券预期收益的利率弹性均为 1, 则 A、B 证券预期收益均增加了 10%。我们来看 M 点预期收益的利率弹性, 根据上面的公式, 把上述数据代入可得: $\frac{d(EX_M)}{dr}\cdot\frac{r}{EX_M}\approx1.07>1$, 收益的利率弹性比两种单独的证券 A、B 均要大一些。

事实上, 利率变化之前 M 点的预期收益为 7.18%, 利率变化之后, 相应地可求得 $EX_1=5.06\%$, $\sigma_1=5.62\%$, $EX_2=9.35\%$, $\sigma_2=6.33\%$, $\rho=0.1321$, $r=4.4\%$, $EX_M=7.96\%$, EX_M 的相对变化量$=10.86\%>10\%$。

市场组合点预期收益的利率弹性变大的原因是, 随着 r 的变化, 最优组合份额 p_0 发生了变化。因此市场组合点的风险 σ_M^2 也相应发生了变化。

由于相应的市场组合风险 σ_M^2 发生了变化, 因此仅仅考察市场组合收益的利率弹性对于市场组合点对利率变化的反应是不够全面的。我们再来看看 σ_M^2 变化情况。

把 $p_0=\frac{EX_2-r-\sqrt{\frac{Q}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}}}{EX_2-EX_1}$代入上式, 得:

$$\sigma_M^2=\frac{(EX_2-r)^2\sigma_1^2+(EX_1-r)^2\sigma_2^2-2(EX_2-r)(EX_1-r)\rho\sigma_1\sigma_2}{(EX_1-EX_2)^2}+\frac{Q}{(EX_2-EX_1)^2}-\frac{2}{(EX_2-EX_1)^2}\sqrt{\frac{Q}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}}\left[(EX_2-r)^2\sigma_1^2+(EX_1-r)^2\sigma_2^2-(EX_1+EX_2-2r)\rho\sigma_1\sigma_2\right]$$

由上述公式,可计算得到:

利率变化之前: $\sigma_M^2=0.002051$

利率变化之后: $\sigma_M^2=0.002069$

由于相应的 EX_M、σ_M^2 均起了变化,我们定义“变差系数” $\frac{\sigma^2}{EX}$ 来考察组合点与原来 A、B 点变化的关系。

按我们前面所给的数据,在利率未改变之时,

A 的变差系数为 $\frac{\sigma_1^2}{EX_1}=0.06866$

B 的变差系数为 $\frac{\sigma_2^2}{EX_2}=0.0471$

M 的变差系数为 $\frac{\sigma_M^2}{EX_M}=0.0286$

现在,利率改变后: A 的变差系数= 0.0624, B 的变差系数= 0.0428, M 的变差系数= 0.02599,相应的变差系数的改变量: A 的变差系数的改变量= (0.0624- 0.06866)/0.06866≈ - 9.1%, B 的变差系数的改变量= (0.0428- 0.0471)/0.0471≈ - 9.1%, M 的变差系数的改变量= (0.02599- 0.0286)/0.0286≈ - 9.1%。

因此,如果按我们这里定义的“变差系数”来定义“风险”(一般是用变差系数 $\frac{\sigma}{EX}$ 来确定一个投资项目的风险),可以看到,在这个例子里,市场组合点不会减少单一证券“风险”的改变,也就是说, A、B 的“风险”减少了 9.1%, M 的“风险”也仅仅减少了 9.1%。而未能进一步减少“风险”。

参考文献:

[1] Alexander, G.J. and sharpe, W. Fundamentals of investment, Prentice-Hall, 1989.

[2] 余绪缨:《企业理财学》,辽宁人民出版社 1995 年版。

[3] 陈浪南:《西方企业财务管理》,中国对外经济贸易出版社 1991 年版。

作者: 厦门大学财金系 在职博士研究生 责任编辑: 沈小波