企业典型产品生命周期曲线的 Logistic 随机模型的拟合与应用

郭鹏辉,彭建灿,钱争鸣
(厦门大学 经济学院,福建 厦门 361005)

摘　要:对企业产品生命周期的识别、特别是对典型产品生命周期的识别构成了产品生命周期理论的基础和难点。虽然 Logistic 模型可用于产品生命周期的识别,但由于该模型参数的非线性性,在估计方法上存在一定困难。文章结合三段倒数和值法与 Fisher−Pry 变换对典型产品生命周期的 Logistic 随机模型进行拟合,并给出实证分析结果。不仅从曲线特征上适用于拟合典型产品生命周期,同时又满足了反映经济现象随机性特性的要求。

关键词:典型产品生命周期;Logistic 随机模型;参数估计
中图分类号:F222.3　　文献标识码:A　　文章编号:1002-6487(2009)07-0181-03

企业产品生命周期是指新产品研制成功后从投入市场到发展、成熟并最终衰退被淘汰的整个过程的全部时间,这一过程可以用一条曲线来描述,也就是产品生命周期曲线。虽然产品生命周期理论已较为成熟,但目前对于产品生命周期曲线的识别仍无普遍适用的方法,理论界常用的方法有:经验判别法及数学模型法。从国内的研究状况来看,研究者采用了不同的数学模型或数学方法对产品生命周期曲线进行了拟和。在使用数学模型法时关键在于模型的选用,本文将运用 Logistic 曲线对产品生命周期进行识别。

1　产品生命周期 Logistic 模型

1.1　指数增长模型

Logistic 模型来源于指数增长模型。将具有指数增长趋势的变量 Q(t)视为时间 t 的函数,定义 Q(t)的增长率:

$$\frac{dQ(t)}{dt}=\alpha Q(t) \tag{1}$$

此方程意味着对应任意时刻 t,Q(t)增长率都与其自身成正比。解此常微分方程即可得:

$$Q(t)=Q(0)e^{\alpha t} \tag{2}$$

其中,Q(0)为 Q(t)的初始值,α 称为增长率常量,当 α 较小时,通常可视为 Q(t)的单位时间增长率($\lim_{\alpha\to 0}(e^{\alpha t}/\alpha)=1$)。

1.2　Logistic 增长模型

从指数增长模型的表达式不难看出,Q(t)具有无限增长的趋势。但由于生产者与消费者的原因(本文前面已提及),具有典型产品生命周期的产品其单位时间销售量(总销售量的增长速度)呈先增后减并逐趋于零的趋势,将总销售量 Q(t)视为一个随时间连续变化的过程,则单位时间销售量就为 $\frac{dQ(t)}{dt}$。对指数增长模型作如下调整:

$$\frac{dQ(t)}{dt}=\alpha Q(t)\left(1-\frac{Q(t)}{k}\right) \tag{3}$$

当 Q(t)/k→0 时,$1-\frac{Q(t)}{k}\approx 1$,此时 Q(t)按指数增长模型增长;当 Q(t)→k 时,$\lim_{Q(t)\to k}\left(1-\frac{Q(t)}{k}\right)=0$,此时 $\frac{dQ(t)}{dt}=0$,Q(t)不再增长。

求解式(3)这个常微分方程可得:

$$Q(t)=\frac{k}{1+ce^{-\alpha t}}\quad(\text{其中},c\geqslant 0) \tag{4}$$

当 c>0,式(4)可写成:

$$Q(t)=\frac{k}{1+ce^{-\alpha(t-\beta)}}\quad\left(\text{其中},\beta=\frac{\ln c}{\alpha}\right) \tag{5}$$

在模型(5)中,参数 k、β、α 都有着明显的经济意义:k 为 Q(t)的上限,β 为 $Q(t)=\frac{k}{2}$ 时 t 的取值,记 γ 为 Q(t)从 10%上升到 90%所需的时间,由模型(5)不难得出 $\alpha=\frac{\ln 81}{\gamma}$。

2　产品生命周期 Logistic 模型的估计

对形如式(4)、式(5)的 Logistic 模型的估计,从是否存在随机扰动的角度,可分为确定性模型参数估计和随机性模型参数估计。前者是把模型看成确定性函数关系的基础上,对模型参数进行估计的一种参数估计方法。而后者则是在充分考虑经济现象的随机性、理论的不完善性以及建模节约原则的基础上,在模型中引入随机扰动项之后,再对模型进行参数估计的方法。相对确定性模型的参数估计方法来说,随机性

基金项目:教育部人文社会科学 2007 年度重大项目(07JJD790145)

模型无疑更加接近产品生命周期所反映的经济实际。但由于 Logistic 模型存在的形式上的非线性，而且不管直接替换还是间接替换都无法将形如式(4)、式(5)的 Logistic 模型转化为线性模型再进行估计，这给随机性模型的参数估计带来了很大的难度。

2.1　模型的三段倒数和值法

对式(4)的模型采用三段倒数和值法，其原理就是假定模型为确定性函数，将组样本数据代入式(4)，并通过方程组求解未知参数。不妨取 n=3m，记样本点对应时间的序列$\{t_i=i|i=1,\cdots,3m\}$，将样本数据按时间先后顺序等分为三组$\{Q(t_i)|i=1,\cdots,m\}$、$\{Q(t_i)|i=m+1,\cdots,2m\}$、$\{Q(t_i)|i=2m+1,\cdots,3m\}$，则每组样本个数为 m 对，其结论如下：

记

$$\Sigma_1=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{Q(t_i)},\ \Sigma_2=\sum_{i=m+1}^{2m}\frac{1}{Q(t_i)},\ \Sigma_3=\sum_{i=2m+1}^{2m}\frac{1}{Q(t_i)},\ D_1=\Sigma_2-\Sigma_1,\ D_2=\Sigma_3-\Sigma_2$$

结论是：

$$\alpha=\frac{1}{m}\ln\frac{D_1}{D_2} \tag{6}$$

$$k=\frac{m}{\Sigma_1-\dfrac{D_1^2}{D_1-D_2}} \tag{7}$$

$$c=\frac{kD_1(e^{-\alpha}-1)}{e^{-\alpha}(e^{-\alpha m}-1)^2} \tag{8}$$

将样本数据代入上述三个等式即可求出参数 α、k、c 的值。

2.2　随机性模型的参数估计

目前对随机非线性模型的估计一般的做法是，通过直接替换法、间接替换法或对将函数表达式 Taylor 展开转化为线性模型再对参数进行估计。然而，对于式(4)、式(5)模型，无论是替换法还是 Taylor 展开都不能对该模型进行参数估计，若只是单纯地对模型先进行 Fisher-Pry 变换，再利用间接替换法转换为线性模型又会由于本身就是个待估的参数而无法进行参数估计。下面笔者结合三段倒数和值法和 Fisher-Pry 变换，提出对式(4)的随机性 Logistic 模型，进行尝试性参数估计的探讨。

将式(4)进行 Fisher-Pry 变换，即得：

$$\frac{\dfrac{Q(t)}{k}}{1-\dfrac{Q(t)}{k}}=c^{e\alpha} \tag{9}$$

式(9)两边取对数，记 $F(t)=\dfrac{Q(t)}{k}$，可得

$$\ln F(t)-\ln(1-F(t))=\ln c+\alpha t \tag{10}$$

记式(10)的随机扰动形式为(ε 为随机扰动项)：

$$\ln F(t)-\ln(1-F(t))=\ln c+\alpha t+\varepsilon \tag{11}$$

作如下替换：$\ln F(t)-\ln(1-F(t))=F'(t);\ln c=c'$，即有：

$$F'(t)=c'+\alpha t+\varepsilon \tag{12}$$

先用三段倒数和值法估计出 k 的初始值$\hat{k}$，即可对运用最小二乘法对式(12)进行估计，在通过计量经济检验并确不违背扰动项经典假设的前提下得到最终估计值$\hat{c}'$、$\hat{\alpha}'$，于是：

$$\hat{c}=\hat{e}^{\hat{c}'} \tag{13}$$

3　实证分析

3.1　k 值的估计

表 1 数据为某服装品牌一款秋装 T 恤销售数据：日期跨度以周为单位，0731-0806 表示从 7 月 31 日到 8 月 6 日这一周；每周销售量(dQ/dt)是从对应每周周一到周日的累计销售数量流量，可视为累计销售量 Q 的增长速度；累计销售量是从 7 月 31 日起累计的销售量；∑为每组(5 周)样本倒数的和；D 为相隔两期的∑值后期减前期的差、$\hat{k}$即为 k 的估计值。依据式(7)计算结果如表 1 所示。

表 1　　某品牌秋装 T 恤产品生命周期 k 值估计表

日期	t	每周销售量(dQ/dt)	累计销售量(Q)	∑	D	$\hat{k}$
0731-0806	1	21	21	0.050578358	-0.050224673	15535.55915
0807-0813	2	476	497			
0814-0820	3	1115	1612			
0821-0827	4	3185	4797			
0828-0903	5	3647	8444			
0904-0910	6	3516	11960	0.000353685		
0911-0917	7	1995	13955			
0918-0924	8	820	14775		-3.18224E-05	
0925-1001	9	399	15174			
1002-1008	10	251	15425			
1009-1015	11	83	15508	0.000321862		
1016-1022	12	20	15528			
1023-1029	13	14	15542			
1030-1105	14	5	15547			
1016-1022	12	20	15528			

3.2　Logistic 随机模型的参数估计

记 $F(t)=\dfrac{Q(t)}{\hat{k}}$，作变量替换 $\ln F(t)-\ln(1-F(t))=F'(t);\ln c=c'$，

在这个过程中由于 $Q(t_i)<\hat{k}(i=13,14,15)$，将 $Q(t_i)(i=13,14,15)$视为异常点舍弃，再对式(12)进行参数估计，结果如表 2 所示。

表 2　　OLS 回归结果

变量	参数估计值	标准误	t 统计量	p 值
C	-6.059461	0.418949	-14.46347	0.0000
T	1.139731	0.056924	20.02197	0.0000
R-squared	0.975662	Mean dependent var	1.348789	
Adjusted R-squared	0.973228	S.D. dependent var	4.160297	
S.E. of regression	0.680712	Akaikeinfo criterion	2.219657	
Sum squared resid	4.633690	Schwarz criterion	2.300475	
Log likelihood	-11.31794	F-statistic	400.8793	
Durbin-Watson stat	1.014394	Prob(F-statistic)	0.000000	
R-squared	0.975662	Mean dependent var	1.348789	

从表 2 可以看出，模型通过显著性检，拟合优度极佳，但 DW 值明显偏小，随机扰动项可能存在序列自相关，假定序列自相关为线性自回归形式，对其进行调整 Cochrane-Orcutt 调整，发现当阶数为 5 阶时，得到比较理想的效果，结果如表

3 所示。

表 3 对模型随机扰动项的序列自相关进行 Cochrane-Orcutt 后的回归结果

变量	参数估计值	标准误	t 统计量	p 值
C	-5.875058	0.386647	-15.19490	0.0001
T	1.114861	0.048015	23.21918	0.0000
AR(5)	-0.249995	0.151770	-1.647194	0.1749
R-squared	0.991904	Mean dependent var	4.141096	
Adjusted R-squared	0.987856	S.D. dependent var	2.294826	
S.E. of regression	0.252889	Akaike info criterion	0.385796	
Sum squared resid	0.255812	Schwarz criterion	0.362615	
Log likelihood	1.649713	F-statistic	245.0361	
Durbin-Watson stat	1.558272	Prob(F-statistic)	0.000066	
Inverted AR Roots	0.61-0.45i	0.61+0.45i	-0.23+0.72i	

从表中可以读出：$\hat{c}'=-5.875058 \quad \hat{\alpha}=1.114861$

由式(13)即得：$\hat{c}=e^{\hat{c}'}=0.00281$

于是根据样本资料估计出的产品生命周期曲线为：

$$Q(t)=\frac{15535.56}{1+0.00281e^{-1.114861t}} \tag{14}$$

亦即：

$$Q(t)=\frac{15535.56}{1+e^{-1.114861(t+5.269767)}} \tag{15}$$

3.2 分析结果的经济意义说明

如前所述：k 为 Q(t)的上限，β 为 $Q(t)=\frac{k}{2}$ 时 t 的取值，记 γ 为 Q(t)从 10%上升到 90%所需的时间，由式(5)不难得出 $\alpha=\frac{\ln 81}{\gamma}$。在本例中 k=15535.56 接近于该款 T 恤总开发量 15600 件；β=5.269767 表示销售量达到 k/2 (约为 7800 件)需要 5.27 周；$\gamma=\frac{\ln 81}{\alpha}=3.941701391$ 说明总销售量由 10%上升到 90%所需要的时间为 3.94 周，也就是说，虽然 T 恤的整个生命周期几乎持续了三个月，但其真正的旺销期并不长，只有不到四周时间，结合表 1 可看出这段时间在 8 月下旬到 9 月中旬，这样也就找到营销计划的重心所在。

4 结论

在企业产品生命周期曲线的拟和中，Logistic 模型具有独特优势，但是 Logistic 模型本质是非线性的，而且经济现象本身也具有很强的随机性，因而本文结合三段倒数和值法与 Fisher-Pry 变换对典型产品生命周期的 Logistic 随机模型进行拟合，并给出实证分析结果。从分析结果来看，这种方法不仅从曲线特征上适用于拟合典型产品生命周期曲线，同时又满足了反映经济现象随机性特性的要求，从而为产品生命周期曲线的拟和以及相应的产品市场营销策略的制定，提供了理论方法。

参考文献：

[1]R.Rernon. International Investment and International Trade in the Product Cycle[J].Quarterly Journal of Economics,1996,(5).

[2]韩永夫，汉方，寒松.现代企业产品生命周期曲线预测模型及其应用[J].郑州大学学报(哲学社会科学版)，1999，(1).

[3]吴江，黄震方.旅游地生命周期曲线模拟的初步研究[J].地理与地理信息科学，2004，(9).

[4]郜元兴，朱喜安.企业产品生命周期阶段的模糊识别[J].统计与决策,2006，(10).

[5]钱伯海主编.统计学原理[M].成都：四川人民出版社，2000.

[6]Wilson, E. B. The logistic or autocatalytic grid [J].Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America ,1925,(8).

[7]Fisher, J.C.and Pry, R.I.A simple substitution model of technological change [J].Technological Forecasting and Social Change, 1971,(3).

(责任编辑/亦 民)