多指标决策与评价的新方法——投影法*

王应明
厦门大学自动化系,361005

摘 要 本文以工业经济效益的综合评价为应用背景,提出了一种多指标决策与评价的新方法——投影法。该方法概念清楚,涵义明确,本质上是一种加权方法,但与简单加性加权方法(SAW)又并非完全一致,而且具有不同的经济涵义。

主题词 多属性决策,经济效益,评价方法。

A New Method for Multiindicies Decision and Evaluation ——A Projection Method

Wang Yingming
Department of Automation, Xiamen University, 361005

Abstract: This paper takes the synthesizing evaluation about industrial economic benefits by examples and proposes a new method named projection method for multiindices decision. The new method is a kind of simple additive weighting method essentially. But there is different economic meaning between them.

Keywords: Multiindices decision, Economic benefit evaluations, Vector projection.

1 引 言

经济研究中经常会碰到经济效益的综合评价问题,经济效益的综合评价本质上是一个多指标决策问题,也称多属性决策、多准则决策、有限方案多目标决策等。有关多指标决策与评价的理论,目前虽已取得了不少研究成果,提出了不少方法,但还很不完善,尤其是方法研究还有待于进一步的探索。本文从矢量投影角度探讨了多指标决策与评价的方法问题,提出了一种全新的投影决策方法,并成功地应用于经济效益的综合评价,取得了比较满意的评价结果。该投影决策方法概念清楚,涵义明确,算法简单,具有一定的推广和实用价值。

2 多指标投影决策方法原理

设多指标决策问题的方案集为 $A=\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$,指标集(也称目标集、属性集)为 $G=\{G_1, G_2, \cdots, G_m\}$,方案 A_i 对指标 G_j 的属性值(指标值)记为 $y_{ij}(i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m)$,矩阵 $Y=(y_{ij})_{n\times m}$ 表示方案集 A 对指标集 G 的"属性矩阵",俗称"决策矩阵"。通常,指标有"效益型"指标、"成本型"指标、"固定型"指标和"区间型"指标之区别。所谓效益型指标是指属性值愈大愈好的指标,如资金产值率、资金利税率、全员劳动生产率等;所谓成本型指标是指属性值愈小愈好的指标,如流动资金占用额、流动资金周转天数等;所谓固定型指标是指属性值既不能太大又不能太小,而以稳定在某个固定值为最佳的一类指标,家用电器稳压器的稳压性能指标就属于这类指标;所谓区间型指标是指属性值以落在某个固定区间内为最佳的一类指标,国家标准中规定的等级划分通常都属于这类指标。根据指标类型的不同,对指标集 G 可作如下划分,即令

---

* 国家自然科学青年基金资助课题
收稿日期:1998年1月16日

$$G = \bigcup_{i=1}^{4} \Omega_i \text{ 且 } \Omega_i \cap \Omega_j = \varnothing$$

$$i, j = 1,2,3,4; i \neq j \tag{1}$$

式中 $\Omega_i (i=1,2,3,4)$ 分别为效益型指标集、成本型指标集、固定型指标集和区间型指标集；$\varnothing$ 为空集。

一般而言，不同的评价指标往往具有不同的量纲和量纲单位，为了消除量纲和量纲单位不同所带来的不可公度性，决策之前首先应将评价指标无量纲化处理。然而，评价指标类型不同，无量纲化处理方法也应不同。

对于效益型指标，一般可令

$$Z_{ij} = \frac{y_{ij} - y_j^{\min}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \quad i = 1,2,\cdots,n; j \in \Omega_1 \tag{2}$$

式中 $y_j^{\max}$、$y_j^{\min}$ 分别为 G_j 指标的最大值和最小值。

对于成本型指标，令

$$Z_{ij} = \frac{y_j^{\max} - y_{ij}}{y_j^{\max} - y_j^{\min}} \quad i = 1,2,\cdots,n; j \in \Omega_2 \tag{3}$$

式中 $y_j^{\max}$、$y_j^{\min}$ 意义同(2)式。

对于固定型指标，有

$$Z_{ij} = 1 - \frac{|y_{ij} - y_j^*|}{\max\limits_i |y_{ij} - y_j^*|}$$

$$i = 1,2,\cdots,n; j \in \Omega_3 \tag{4}$$

式中 y_j^* 为 G_j 指标的最佳稳定值。

对于区间型指标，令

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 - \dfrac{q_{1j} - y_{ij}}{\max\{q_{1j} - y_j^{\min}, y_j^{\max} - q_{2j}\}}, & y_{ij} > q_{1j} \\ 1, & y_{ij} \in [q_{1j}, q_{2j}] \\ 1 - \dfrac{y_{ij} - q_{2j}}{\max\{q_{1j} - y_j^{\min}, y_j^{\max} - q_{2j}\}}, & y_{ij} > q_{2j} \end{cases}$$

$$i = 1,2,\cdots,n; j \in \Omega_3 \tag{5}$$

式中 $[q_{1j}, q_{2j}]$ 为 G_j 指标的最佳稳定区间，$y_j^{\max}$、$y_j^{\min}$ 的意义同(2)式。

记无量纲化处理后的决策矩阵为 $Z = (Z_{ij})_{n \times m}$。显然，$Z_{ij}$ 总是愈大愈好，定义各评价指标的理想属性值为

$$Z_j^* = \max\{Z_{ij} | i = 1,2,\cdots,n\} = 1$$

$$j = 1,2,\cdots,m \tag{6}$$

由理想属性值构成的方案称为理想方案，用 A^* 表示。设评价指标间的加权向量为 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_m)^T > 0$，$W$ 的确定方法有主客观赋权法两大类，此处不再详述。为了使投影决策方法的涵义更加明确和清楚起见，假定加权向量 W 满足单位化约束条件

$$\sum_{j=1}^{m} W_j^2 = 1 \tag{7}$$

倘若给定的加权向量 $\overline{W} = (\overline{W}_1, \overline{W}_2, \cdots, \overline{W}_m)^T$ 不满足单位化约束条件(如归一化约束条件)，则可将其单位化而使其满足单位化约束条件，即令

$$W_j = \overline{W}_j \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \overline{W}_j^2}, \ j = 1,2,\cdots,m \tag{8}$$

在加权向量 W 的作用下，构造增广型加权规范化决策矩阵

$$C = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} G_1 & G_2 & \cdots & G_m \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \\ A^* \end{array} & \begin{bmatrix} W_1 Z_{11} & W_2 Z_{12} & \cdots & W_m Z_{1m} \\ W_1 Z_{21} & W_2 Z_{22} & \cdots & W_m Z_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ W_1 Z_{n1} & W_2 Z_{n2} & \cdots & W_m Z_{nm} \\ W_1 & W_2 & \cdots & W_m \end{bmatrix} \end{array}$$

如果将每个决策方案看成一个行向量(矢量)，则每个决策方案 A_i 与理想方案 A^* 之间均有一个夹角 θ_i，如图 1 所示。

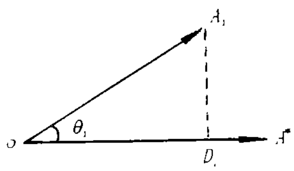

图 1 决策方案与理想方案间的夹角示意图

设决策方案 A_i 与理想方案 A^* 之间的夹角余弦为[1]

$$r_i = \frac{A_i \cdot A^*}{\| A_i \| \cdot \| A^* \|} = \frac{\sum\limits_{j=1}^{m} W_j Z_{ij} \cdot W_j}{\sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} [W_j Z_{ij}]^2} \cdot \sqrt{\sum\limits_{j=1}^{m} W_j^2}}, \ i = 1,2,\cdots,n \tag{9}$$

很显然，夹角余弦 $0 < r_i \leqslant 1$，且总是愈大愈好，r_i 愈大，表示决策方案 A_i 与理想方案 A^* 之间的变

动方向愈是一致。但是,仅靠夹角余弦的大小还不能进行最优方案的决策。因为夹角余弦的大小只能反映各决策方案 A_i 与理想方案 A^* 之间的方向是否一致,不能反映各决策方案模(距离)的大小。举例来说,假设 B 方案是由理想方案 A^* 缩小一定的倍数 $K(K>1)$ 之后所得到的一个虚拟决策方案,理论上恒可以证明,虚拟方案 B 与理想方案 A^* 之间的夹角余弦恒等于 1。但事实上,在多指标决策与评价理论中,B 方案和 A^* 方案永远是两个不等的方案,因为其模不等,而且 B 方案总是劣于 A^* 方案。由此可见,科学的决策方法除了要考虑各决策方案 A_i 与理想方案 A^* 之间的夹角余弦大小外,还必须考虑各决策方案模的大小。设决策方案 A_i 的模为

$$d_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}[W_jZ_{ij}]^2},\ i = 1,2,\cdots,n \quad (10)$$

模的大小虽然弥补了夹角余弦法的不足,但是模的大小反映不出各决策方案与理想方案之间的变动方向如何?如果变动方向相反,模愈大方案愈劣。因此,模的大小必须与夹角余弦的大小结合考虑才能全面准确反映各决策方案与理想方案之间的接近程度。令

$$D_i = d_i \cdot r_i,\quad i=1,2,\cdots,n \quad (11)$$

则 D_i 正好是决策方案 A_i 在理想方案 A^* 上的投影(见图 1),而理想方案 A^* 本身的投影(模)为

$$D^* = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_j^2} = 1 \quad (12)$$

这正是本文要求加权向量 W 满足单位化约束条件的缘故,目的是使理想方案 A^* 的标准投影为 1。很显然,投影值 $0<D_i\leqslant 1$,且 D_i 总是愈大愈好,D_i 愈大表明决策方案 A_i 愈优。为了进一步分析投影决策方法与简单加性加权法(SAW)之间的关系,将公式(11)展开后,得到

$$\begin{aligned} D_i &= d_i \cdot r_i \\ &= \sqrt{\sum_{j=1}^{m}[W_jZ_{ij}]^2} \cdot \frac{\sum_{j=1}^{m}W_jZ_{ij}\cdot W_j}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}[W_jZ_{ij}]^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_j^2}} \\ &= \sum_{j=1}^{m}Z_{ij}W_j^2 \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_j^2} \\ &= \sum_{j=1}^{m}Z_{ij}\Big(W_j^2 \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_j^2}\Big),\ i = 1,2,\cdots,n \end{aligned} \quad (13)$$

令

$$\widetilde{W}_j = W_j^2 \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_j^2},\ j = 1,2,\cdots,m \quad (14)$$

则有

$$D_i = \sum_{j=1}^{m}Z_{ij}\widetilde{W}_j,\ i = 1,2,\cdots,n \quad (15)$$

且

$$\sum_{j=1}^{m}\widetilde{W}_j = \sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_j^2} < \sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_j} \quad (16)$$

公式(15)即为简单加性加权法公式。可见,投影决策方法本质上是一种简单加性加权方法,但与简单加性加权方法又并非完全一致,简单加性加权方法采用得分值作为评判决策方案优劣的标准,而投影决策方法则是以投影值的大小作为评判决策方案优劣的标准,两者显然具有不同的经济涵义。另外,公式(15)采用的加权系数也并非是原先给定的加权系数,而是与原加权系数的平方成正比的一组新的加权系数,这表明重要指标的权系数将得到进一步的加强。若原先给定的加权向量 W 满足归一化约束条件,则新的加权向量 $\widetilde{W}$ 将满足 $e^T\widetilde{W}<1$,其中 $e=(1,1,\cdots,1)^T$;若原先给定的加权得量 W 满足单位化约束条件,则新的加权向量将满足归一化约束条件,即 $e^T\widetilde{W}=1$。综合以上分析不难看出,投影决策方法与简单加性加权法还是有区别的。

综上所述,多指标决策与评价的方法和步骤可以归纳和概括为:

(1) 根据评价指标类型构造规范化决策矩阵 $Z=(Z_{ij})_{n\times m}$;

(2) 给定加权向量 W,构造增广型加权规范化决策矩阵 C;

(3) 计算各决策方案 A_i 在理想方案 A^* 上的投影值 $D_i(i=1,2,\cdots,n)$;

(4) 根据各决策方案投影值的大小,对多指标决策与评价问题作出科学的排序比较和分析。

3 应用举例

本文以《中国工业经济统计年鉴》1993 年提供的全国 16 个省、直辖市主要工业经济效益指标

的统计资料[2]为基础数据，进行经济效益的评价比较和排序分析。很显然，此类问题是一个典型的多指标决策与评价问题，已知方案集为 $A=$ {北京，天津，上海，江苏，…，山西}，共有 16 个决策方案，指标集 $G=\{G_1, G_2, \cdots, G_5\}$，其中 G_1：全员劳动生产率(元/人)；G_2：资金利税率(%)；G_3：百元销售收入实现利润(元)；G_4：百元工业产值占用流动资金(元)；G_5：产值利税率(%)，共 5 个评价指标，除百元工业产值占用流动资金为成本型指标外，其余均为效益型指标，各指标的原始数据如表 1 所示。假定已知加权向量 $W=(0.2296, 0.1876, 0.1557, 0.2656, 0.1614)^T$，单位化之后有 $W=(0.5025, 0.4106, 0.3408, 0.5813, 0.3533)^T$，在此加权向量作用下，各省、直辖市在 1992 年度的工业经济效益投影评价值及其排序号如表 1 最后两列所示。从表 1 中的评价结果可以看出，上海作为我国的“第一工业大城市”，其综合工业经济效益水平排名 16 个省、直辖市之首位，显示出其实力不凡；北京作为我国的政治、经济和文化中心，其综合工业经济效益水平也很不错，仅次于上海，位居第 2 位；排名第 3 位到第 8 位的依次是广东、浙江、江苏、福建、山东、天津等沿海省市，这充分反映了改革开放以来，我国沿海地区省份经济发达、技术先进、管理水平高、经济效益比较好的区域优势；山西、江西两省作为我国的内陆省份和革命老区，由于经济基础薄弱、技术落后、管理水平跟不上，其综合工业经济效益水平分别排名第 16 位和第 15 位；辽宁省作为我国的重工业基地省份，由于设备陈旧老化、资金匮乏、技改措施跟不上等众多主客观因素的影响，其综合工业经济效益也很不理想，名列 16 个省、直辖市中倒数第 3 位。以上评价结论是仅就 1992 年度而言的，不排除个别省份排序的偶然性，但总的来讲，评价结论与人们的直观判断和习惯认识基本一致，有一定的可信度和决策参考价值。除此之外，笔者还进行了大量的仿真评价与决策，限于篇幅，此处从略。

表 1 1992 年全国部分省、直辖市主要工业经济效益指标及其排序比较

权系数	0.5025	0.4106	0.3408	0.5813	0.3533	评价值			排序号
省市 \ 评价指标	全员劳动生产率(元/人)	资金利税率(%)	百元销售收入实现利润(元)	百元工业产值占用流动资金(元)	产值利税率(%)	模	夹角余弦	投影值	
北京	47177	16.61	8.89	31.05	15.77	0.7518	0.9244	0.6949	2
天津	43323	9.08	3.65	29.80	8.44	0.4015	0.9076	0.3644	8
上海	59023	13.84	6.06	26.55	12.87	0.7648	0.9808	0.7502	1
江苏	46821	10.59	3.51	22.46	7.41	0.6912	0.8540	0.5903	5
浙江	41646	13.24	4.64	24.33	9.33	0.6402	0.9418	0.6030	4
安徽	26446	10.16	2.38	26.80	9.85	0.4229	0.8235	0.3482	10
福建	38381	11.97	4.79	26.45	10.64	0.5386	0.9734	0.5242	6
广东	57808	10.29	4.54	23.00	9.23	0.7641	0.9024	0.6896	3
辽宁	28869	7.68	2.12	31.08	9.05	0.2271	0.8388	0.1905	14
山东	38812	8.92	3.38	25.68	8.73	0.5053	0.8682	0.4387	7
湖北	30721	10.87	4.15	30.36	11.44	0.3591	0.9769	0.3508	9
湖南	24848	10.77	2.42	30.71	11.37	0.3105	0.8679	0.2695	12
河南	26925	9.34	3.06	30.11	10.84	0.3027	0.9120	0.2761	11
江西	23269	8.25	2.58	32.57	8.62	0.1442	0.8712	0.1256	15
河北	28267	8.13	3.17	29.25	9.17	0.3051	0.8603	0.2625	13
山西	21583	7.41	4.66	35.35	11.27	0.2072	0.4883	0.1012	16

参 考 文 献

1 吴望名，陈永义，黄金丽等. 应用模糊集方法. 北京师范大学出版社，1985

2 国家统计局工业交通统计司. 中国工业经济统计年鉴. 中国统计出版社，1993