

运用离差最大化方法进行 多指标决策与排序^{*}

厦门大学自动化系 王应明

摘要 本文以工业经济效益的综合评价和排序为应用背景,提出了一种多指标决策与排序的新方法——离差最大化方法。该方法能够自动确定各评价指标间的加权系数,且概念清楚、涵义明确,排序结果准确、可信,不具有主观随意性。

离差最大化决策方法概念清楚、涵义明确、算法简单,具有一定的推广和实用价值。

二、多指标离差最大化决策方法原理

一、引言

经济研究中经常会碰到经济效益的综合评价和排序问题,经济效益的综合评价和排序本质上是一个多指标决策问题,也称多属性决策、多准则决策、有限方案多目标决策等。有关多指标决策与排序的理论,目前虽已取得了不少研究成果、提出了不少方法,但还很不完善,尤其是方法研究还有待于进一步的探索。本文从离差最大化角度探讨了多指标决策与排序的方法问题,提出了一种全新的离差最大化决策方法,并成功地应用于经济效益的综合评价和排序,取得了比较满意的评价结果。该

设多指标决策与排序问题的方案集为 $A = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 且指标集(也称目标集、属性集)为 $G = \{G_1, G_2, \dots, G_m\}$ 且方案 A_i 对指标 G_j 的属性值(指标值)记为 y_{ij} ($i=1, 2, \dots, n; j=1, 2, \dots, m$), 矩阵 $Y = (y_{ij})_{n \times m}$ 表示方案集 A 对指标集 G 的“属性矩阵”, 俗称“决策矩阵”。通常, 指标有“效益型”指标、“成本型”指标、“固定型”指标和“区间型”指标之区别。所谓效益型指标是指属性值愈大愈好的指标, 如资金产值率、资金利税率、全员劳动生产率等; 所谓成本型指标是指属性值愈小愈好的指标, 如流动资金占用额、流动资金周转天数等; 所谓固定型指标是指属性值既不能太大又不能太小, 而以稳定在

^{*}国家自然科学基金青年基金资助项目

某个固定值为最佳的一类指标,家用电器稳压性能指标就属于这类指标:所谓区间型指标是指属性值以落在某个固定区间内为最佳的一类指标,国家标准中规定的等级划分通常都属于这类指标。根据指标类型的不同,对指标集 G 可作如下划分,

即令,

$$G = \bigcup_{i=1}^4 G_i \quad \text{且} \quad G_i \cap G_j = \phi$$

$$i, j = 1, 2, 3, 4; i \neq j \quad (1)$$

式中: $G_i (i = 1, 2, 3, 4)$ 分别为效益型指标集、成本型指标集、固定型指标集和区间型指标集; ϕ 为空集。

一般而言,不同的评价指标往往具有不同的量纲和量纲单位,为了消除量纲和量纲单位不同所带来的不可公度性,决策之前首先应将评价指标无量纲化处理。然而,评价指标类型不同,无量纲化处理方法也将不同。

对于效益型指标,一般可令

$$Z_{ij} = \frac{y_{ij} - y_{ij}^{\min}}{y_{ij}^{\max} - y_{ij}^{\min}} \quad i = 1, 2, \dots, n; j \in 1 \quad (2)$$

式中: y_{ij}^{\max} 、 y_{ij}^{\min} 分别为 G_j 指标的最大值和最小值。

对于成本指标,令

$$Z_{ij} = \frac{y_{ij}^{\max} - y_{ij}}{y_{ij}^{\max} - y_{ij}^{\min}} \quad i = 1, 2, \dots, n; j \in 2 \quad (3)$$

对于固定型指标,有

$$Z_{ij} = 1 - \frac{|y_{ij} - y_{ij}^*|}{\max_i |y_{ij} - y_{ij}^*|} \quad i = 1, 2, \dots, n; j \in 3 \quad (4)$$

式中: y_{ij}^* 为 G_j 指标的最佳稳定值。

对于区间型指标,令

$$Z_{ij} = \begin{cases} 1 - \frac{q_{1j} - y_{ij}}{\max(q_{1j} - y_{ij}^{\min}, y_{ij}^{\max} - q_{2j})} & y_{ij} < q_{1j} \\ 1 & y_{ij} \in [q_{1j}, q_{2j}] \\ 1 - \frac{y_{ij} - q_{2j}}{\max(q_{1j} - y_{ij}^{\min}, y_{ij}^{\max} - q_{2j})} & y_{ij} > q_{2j} \end{cases} \quad i = 1, 2, \dots, n; j \in 4 \quad (5)$$

式中: $[q_{1j}, q_{2j}]$ 为 G_j 指标的最佳稳定区间,

y_{ij}^{\max} 、 y_{ij}^{\min} 意义同 (2) 式。

记无量纲化处理后的决策矩阵为 $Z = (Z_{ij})_{n \times m}$,

显然, Z_{ij} 总是愈大愈好。设评价指标间的加权向量为 $W = (w_1, w_2, \dots, w_m)^T > 0$, 并满足单位化约束条件:

$$\sum_{j=1}^m w_j^2 = 1 \quad (6)$$

在加权向量 W 的作用下,构造加权规范化决策矩阵

$$C = \begin{matrix} & G_1 & G_2 & \dots & G_m \\ A_1 & w_1 z_{11} & w_2 z_{12} & \dots & w_m z_{1m} \\ A_2 & w_1 z_{21} & w_2 z_{22} & \dots & w_m z_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_n & w_1 z_{n1} & w_2 z_{n2} & \dots & w_m z_{nm} \end{matrix} \quad (7)$$

根据简单加法加权法 (SAW),各决策方案 A_i 的多指标综合评价价值可表示为:

$$D_i(W) = \sum_{j=1}^m z_{ij} w_j \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (8)$$

很显然, $D_i(W)$ 总是愈大愈好, $D_i(W)$ 愈大表明决策方案 A_i 愈优。因此,在加权向量 W 已知的情况下,根据上述公式可以很容易地对各决策方案进行决策或排序。下面就来进一步讨论加权向量 W 的确定方法。众所周知,如果 G_j 指标对所有决策方案而言均无差别(无差异),则 G_j 指标对方案决策与排序将不起作用,这样的评价指标可令其权系数为 0;反之,如果 G_j 指标能使所有决策方案的属性值有较大差异,这样的评价指标对方案决策与排序将起重要作用,应该给予较大的权系数。假设对于 G_j 指标而言,决策方案 A_i 与其他所有决策方案之离差用 $v_{ij}(w)$ 来表示,则可定义:

$$v_{ij}(w) = \sum_{k=1}^n |w_j z_{ij} - w_j z_{kj}| \quad j = 1, 2, \dots, m \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (9)$$

$$v_j(w) = \sum_{i=1}^n v_{ij}(w) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |z_{ij} - z_{kj}| w_j \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

则 $V_j(W)$ 表示对 G_j 指标而言,所有决策方案与其他决策方案之总离差。根据前述分析,加权向量 W 的选择应使所有评价指标对所有决策方案之总离差最大,为此,构造目标函数为:

$$\max F(W) = \sum_{j=1}^m V_j(W) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |z_{ij} - z_{kj}| W_j \quad (11)$$

于是, 求解加权向量W等价于求解如下最优化问题:

$$\max F(W) = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |z_{ij} - z_{kj}| W_j \quad (12)$$

$$\text{s. t.} \quad \sum_{j=1}^m W_j^2 = 1 \quad (13)$$

解此最优模型, 得到

$$W_j^* = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |z_{ij} - z_{kj}|}{\sum_{N=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |z_{ij} - z_{kj}|^2} \quad j=1, 2, \dots, m \quad (14)$$

理论上恒可以证明 $w^* = (w_1^*, w_2^*, \dots, w_m^*)^T$ 为目标函数 $F(W)$ 的唯一极大值点。由于传统的加权向量一般都是满足规一化的约束条件而不是单位化约束条件, 因此, 在得到单位化加权向量 w^* 之后, 为了与人们的习惯用法相一致, 还可以对 w^* 进行规一化处理, 即令

$$\tilde{w}_j^* = w_j^* / \sum_{j=1}^m w_j^* \quad j=1, 2, 3 \dots m \quad (15)$$

由此得到,

$$W_j^* = \frac{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |z_{ij} - z_{kj}|}{\sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n |z_{ij} - z_{kj}|} \quad j=1, 2, \dots, m \quad (16)$$

综上所述, 多指标决策与排序的方法和步骤可以归纳和概括为:

- (1) 根据评价指标类型构造规范化决策矩阵 $Z = (Z_{ij})_{n \times m}$;
- (2) 根据离差最大化方法计算最优加权向量 w^* , 同时计算各决策方案 A_i 的多指标综合评价 $D_i(w^*) (i=1, 2, \dots, n)$;
- (3) 根据各决策方案多指标综合评价值的大小, 对多指标决策与排序问题作出科学的评价比较

和排序分析。

三、应用举例

本文以《中国工业经济统计年鉴》1993年提供的全国16个省、直辖市主要工业经济效益指标的统计资料^[1]为基础数据进行经济效益的评价比较和排序分析。很显然, 此类问题是一个典型的多指标决策与排序问题, 已知方案集为 $A = \{\text{北京, 天津, 上海, 江苏, } \dots, \text{山西}\}$ 共有16个决策方案, 指标集 $G = \{G_1, G_2, \dots, G_5\}$ 其中 G_1 : 全员劳动生产率(元/人), G_2 : 资金利税率(%), G_3 : 百元销售收入实现利润(元), G_4 : 百元工业产值占用流动资金(元), G_5 : 产值利税率(%), 共5个评价指标, 除百元工业产值占用流动资金为成本型指标外, 其余均为效益型指标, 各指标的原始数据如表1所示。根据本文提供的多指标离差最大化决策方法, 通过模型运算得到各个评价指标间的加权向量为 $w^* = (0.5372, 0.4399, 0.3843, 0.4701, 0.3864)^T$, 规一化之后有 $\tilde{w}^* = (0.2422, 0.1983, 0.1733, 0.2119, 0.1742)^T$, 在此加权向量作用下, 各省、直辖市在1992年度的工业经济效益综合评价值及其排序号如表1最后两列所示。

表1 1992年全国部分省、直辖市主要工业经济效益指标及其排序比较

省市	权重					评价值 $D_i(w)$	排序号
	0.2422	0.1983	0.1733	0.2119	0.1742		
指标	全员劳动生产率(元/人)	资金利税率(%)	百元销售收入实现利润(元)	百元工业产值占用流动资金(元)	产值利税率(%)		
北京	47177	16.61	8.89	31.05	15.77	0.7821	1
天津	43323	9.08	3.65	29.80	8.44	0.3285	9
上海	59023	13.84	6.06	26.55	12.87	0.7402	2
江苏	46821	10.59	3.51	22.46	7.41	0.4794	6
浙江	41646	13.24	4.64	24.33	9.33	0.5412	4
安徽	26446	10.16	2.38	26.80	9.85	0.2888	10
福建	38381	11.97	4.79	26.45	10.64	0.4890	5
广东	57808	10.29	4.54	23.00	9.23	0.5994	3
辽宁	28869	7.68	2.12	31.08	9.05	0.1573	14
山东	38812	8.92	3.38	25.68	8.73	0.3628	7
湖北	30721	10.87	4.15	30.36	11.44	0.3517	8
湖南	24848	10.77	2.42	30.71	11.37	0.2601	11
河南	26925	9.34	3.06	30.11	10.84	0.2579	12
江西	23269	8.25	2.58	32.57	8.62	0.1117	16
河北	28267	8.13	3.17	29.25	9.17	0.2226	13
山西	21583	7.41	4.66	35.35	11.27	0.1454	15

(下接 65 页)

价值,促进信息源和数据库社会化、商用化的渠道。据来自 CNN 的最新消息,中国北方工业公司与美国一家公司合作准备 3 年内投资 5000 万美元租用亚太一号卫星的 36M 带宽,在中国大陆经营公众 INTERNET 业务。广电部已提出了全国 CATV 联网的宏伟设想,现在正在考虑联网方案。目前国内已开展 CATV 的双向传输试验,如果 CATV 升级改造为交互式时,一旦众多的 PC 机进入 CATV 网,计算机联网将很容易实现,届时可提供 INTERNET 及公众信息服务。另一方面,从 INTERNET 接入方式上,除目前的专线接入和电话拨号两类外,国外正出现一些新的接入方式:1. 通过有线电视网接入 INTERNET。用户通过使用电缆调制解调器(CABLE MODEM)通过有线电视线路联入 INTERNET,入网速率可达 10Mbps,使用户从 INTERNET 上获得多媒体服务如:视像广播、VOD 等。美国加州硅谷的一家公司已从 1997 年 9 月开始提供这种服务,MODEM 初装费 \$150、月服务费 \$35。2. 通过蜂窝移动电话接入 INTERNET。这种无线接入 INTERNET 方式已成为发展趋势。

目前,我国面临着国外风起云涌的 INTERNET 浪潮的冲击及国内众多从事计算机服务的企

业也纷纷抢占这块领域,形成了“群雄割据”的局面。邮电部门必须进一步转变观念,加强电信竞争的紧迫感和危机感,要大胆地参与竞争,迎接挑战,使邮电部门传统的通信网逐渐变成信息网。如果我们再不加快信息服务及多媒体业务市场的发展,我们就将会导致电信领域内的电话用户、传真用户、数据用户等的用户群分流,在下一个世纪将会造成电信行业的萎缩,失去通信发展的后劲。从另一方面看,邮电公众网是国家信息化基础设施的网络基础,而建设公众多媒体通信网是对这个网络基础的进一步完善和提高。能否尽快建成公众多媒体通信网,直接关系到国家信息化的进程。目前全国公开向社会提供信息服务的数据库已达 1100 多个,已建成的电子信息服务网络已达 100 多个,形成了比较复杂的竞争局面。邮电部门应充分发挥邮电固有的网络优势,尽快建成多功能的多媒体通信网,把社会信息库、专用信息系统和大量的计算机终端连接起来,切实推动国家信息化的更快发展,同时也避免了各部门、各单位重复建设各种类型的专网,促进我国信息化建设向集约型增长的方向发展。

(本文责编:朱惠庭)

(上接 38 页)

从表 1 中的评价结果可以看出,北京作为我国的政治、经济和文化中心,其工业经济效益水平也很不错,名列 16 个省、直辖市之榜首,显示出其雄厚的经济基础和实力;上海作为我国的“第一工业大城市”,其工业经济效益水平仅次于北京,位居第 2 位;排名前 10 位的其他省市依次是广东、浙江、福建、江苏、山东、湖北、天津和安徽,其中绝大多数均为我国沿海开放省市,这充分反映了改革开放以来,我国沿海地区省份经济发达、技术先进、管理水平高、经济效益比较好,显示了比较强劲的区位优势特点;江西、山西两省作为我国的革命老区和内陆省份,由于经济基础薄弱、技术落后、管理水平跟不上,其工业经济效益综合评价价值分别排名第 16

位和第 15 位;辽宁省作为我国的重工业基地省份,由于设备陈旧老化、资金匮乏、技改措施跟不上等众多主客观因素的影响,其工业经济效益综合评价价值也很不理想,名列 16 个省、直辖市倒数第 3 位。以上评价结论是仅就 1992 年度而言的,不排除个别省份排序的偶然性,但总的来讲,评价结论与人们的直观判断和习惯认识基本一致,有一定的可信度和决策参考价值。除此之外,笔者还进行了大量的仿真评价与决策,限于篇幅,此处从略。

参考文献:

[1] 国家统计局工业交通统计司.《中国工业经济统计年鉴》(1993),中国统计出版社。

(本文责编:杜虹)