判断矩阵一致性逼近的一种新方法

王应明　傅国伟
厦门大学系统科学系，361005

摘　要　本文根据一致性判断矩阵定义，提出了一种求取一致性判断矩阵的新方法。该方法充分利用了判断矩阵所提供的直接判断和全部间接判断信息，消除了专家判断思维逻辑的混乱和不一致性。

主题词　+层次分析法，+判断矩阵，决策方法，逼近。

A New Consistency Approximation Method of Pairwise Comparison Matrix

Wang Yingming and Fu Guowei
Department of Systems Science of Xiamen University, 361005

Abstract: Based on the definition of the consistency comparison matrix, this paper proposes a new consistency approximation method of pairwise comparison matrix. Since the new method can make full use of all the comparison information both direct and indirect form a pairwise comparison matrix, the unconsistency and confusions in logical thinking caused by expert judgements are all eliminated by the method.

Keywords: Analytic hierarchy process, comparison matrix, Decision making method.

一、引　言

层次分析法作为规划、预测和决策工具，自问世以来已在世界各国得到极为迅速普及和推广，并在实际的社会经济分析中发挥着重大的决策作用[1]。根据层次分析法原理，层次分析法应用的关键之一在于构造判断矩阵。判断矩阵的获得通常由专家给定。理想的判断矩阵应该满足完全一致性条件，满足完全一致性条件的判断矩阵称为一致性判断矩阵。一致性判断矩阵具有很多优越性，由一致性判断矩阵求取排序向量非常简便。虽然层次分析法的排序理论迄今已有了很大的发展，但是，所有排序方法都仅仅利用了专家判断所提供的直接判断信息，未能充分利用判断矩阵所提供的全部间接判断信息；而且现有排序方法几乎都是直接求解判断矩阵的排序向量。此类排序方法固然很有用也很有效，但理论上终究不够完善，而且也不如由一致性判断矩阵求取排序向量简便和利索。为了克服现有排序方法的不足，本文

收稿日期：1993 年 7 月 2 日

提出一种新的排序思想和处理方法。在充分考虑专家判断全部信息的基础上，本文首先对专家判断矩阵进行一致性逼近，然后由一致性判断矩阵，可以很方便地导出判断矩阵的排序向量。

二、判断矩阵一致性逼近原理

设判断矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，其排序向量为 $W=(W_1, W_2, \cdots, W_n)^T$，并满足归一化约束条件

$$\sum_{i=1}^{n} W_i = 1 \tag{1}$$

若 A 满足完全一致性条件

$$a_{ij}=a_{ik}/a_{jk} \qquad i, j, k=1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

则称 A 为一致性判断矩阵。根据一致性判断矩阵特性，有

$$a_{ij}=W_i/W_j \qquad i, j=1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

亦即

$$W_i=a_{ij}W_j \qquad i, j=1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

将式 (4) 代入归一化约束条件式 (1)，得

$$W_j=1/\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \qquad j=1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

由此可得一致性判断矩阵排序向量 W 的精确解为

$$W^{*}=(1/\sum_{i=1}^{n} a_{i1}, \ 1/\sum_{i=1}^{n} a_{i2}, \ \cdots, \ 1/\sum_{i=1}^{n} a_{in})^T \tag{6}$$

显然，由一致性判断矩阵求取排序向量非常简便。然而，众所周知，层次分析法中判断矩阵的获得一般都是由专家给定。因此，判断矩阵的一致性必然要受到专家知识结构、判断水平和个人偏好等众多主观因素的影响，再加之判断事物本身的模糊性和不精确性，实际应用中的判断矩阵常常是非一致性的。在 A 为非一致性矩阵的情况下，式 (2) 所示完全一致性条件不再成立，亦即

$$a_{ij}\neq a_{ik}/a_{jk} \qquad i, j, k=1, 2, \cdots, n; \ k\neq j \tag{7}$$

从上式可以看出，a_{ij} 只是由判断矩阵 A 给出的有关 i 和 j 事物的直接判断元素；而 a_{ik}/a_{jk} $(k=1, 2, \cdots, n; \ k\neq j)$ 则是由判断矩阵 A 所提供的有关 i 和 j 事物的间接判断元素。迄今为止，所有的排序方法仅仅利用了判断矩阵 A 所提供的直接判断元素，而疏忽了 A 矩阵所提供的间接判断元素。直接判断元素对导出判断事物的排序权值固然很重要，然而，间接判断元素对导出判断事物的真实排序权值同样也很重要。当同时考虑直接判断和间接判断元素时，可得到有关 i 和 j 事物相对重要性的判断元素共 n 个，其具体数值可统一表示为

$$a_{ik} / a_{jk} \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

当 A 为一致性判断矩阵时，上述 n 个判断元素具有相同的数值 a_{ij}；若 A 为非一致性判断矩阵，则上述 n 个判断元素彼此之间互有差异，此类差异往往是由专家判断思维逻辑的混乱或判断不准所造成。为了更加准确地定量测度 i 和 j 事物的相对重要性，可对式（8）有关 i 和 j 事物相对重要性的 n 个判断元素值进行全面综合。综合的方式理论上可有算术平均方法和几何平均方法两种，但由于算术平均方法综合的结果破坏了判断矩阵元素间的互反特性，故而仅能按几何平均方法进行综合，由此有

$$\tilde{a}_{ij} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n}\left(\frac{a_{ik}}{a_{jk}}\right)} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ik}} \Big/ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{jk}} \qquad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{9}$$

显然，$\tilde{a}_{ij}$ 比 a_{ij} 更能准确地测度出 i 和 j 事物的相对重要性。设矩阵 $\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$，则有

定理 1　$\tilde{A}$ 为一致性判断矩阵，其导出标度 W^* 与对数最小二乘排序方法 (LLSM) 导出的 A 矩阵的排序向量吻合，亦即

$$W_j^* = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{jk}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ik}} \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{10}$$

证：根据公式（9），有

$$\tilde{a}_{il} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ik}} \Big/ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{lk}} \qquad i, l = 1, 2, \cdots, n \tag{11}$$

$$\tilde{a}_{jl} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{jk}} \Big/ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{lk}} \qquad j, l = 1, 2, \cdots, n \tag{12}$$

由此可导得

$$\tilde{a}_{il} / \tilde{a}_{jl} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ik}} \Big/ \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{jk}} = \tilde{a}_{ij} \qquad i, j, l = 1, 2, \cdots, n \tag{13}$$

亦即，$\tilde{A} = (\tilde{a}_{ij})_{n\times n}$ 满足完全一致性条件，故由一致性判断矩阵定义可知，$\tilde{A}$ 为一致性判断矩阵。

根据一致性判断矩阵排序公式（5），$\tilde{A}$ 矩阵的排序权值可表示为

$$W_j^* = 1 \Big/ \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ij} = \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{jk}} \Big/ \sum_{i=1}^{n} \sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} a_{ik}} \qquad j = 1, 2, \cdots, n \tag{14}$$

此式正好为对数最小二乘排序方法导出的 A 矩阵的排序公式[2]。[证毕]

定理 2　若 A 为一致性判断矩阵，则有 $\tilde{A} = A$。虽然 $\tilde{A}$ 恒为一致性判断矩阵，但并不等于 A 矩阵无需进行一致性检验。$\tilde{A}$ 依赖于判断矩阵 A，不同的 A 矩阵分别对应于不同的 $\tilde{A}$ 矩阵。文献 [3] 通过最优传递矩阵 $C = (c_{ij})_{n\times n}$ 对 A 矩阵进行对数逼近并由此导出一个拟优一致性判断矩阵 $A^* = \mathrm{EXP}(C)$，从而错误地认为对 A 矩阵无需进行一致性检验的观点非常值得商榷，此文已经导致一些错误的应用[4, 5]。理论上可以证明，最优传递矩阵方法与对

数最小二乘排序方法和方根法具有相同的导出标度 W^*。谁也不会认为，对数最小二乘排序方法无需进行一致性检验。A^* 是一致性判断矩阵并不能说明对 A 矩阵无需进行一致性检验。若 A 是高度非一致性的，疏忽一致性检验往往可能会导致错误的排序结果。

传统的一致性检验方法通常借助于 A 矩阵的最大特征根，亦即

$$CI=\frac{\lambda_{\max}-n}{n-1} \tag{15}$$

式中：$\lambda_{\max}$ 为 A 矩阵的最大特征根。由于本文提供的排序方法是通过一致性判断矩阵 $\tilde{A}$ 直接求解 A 矩阵的排序向量 W，并未求解 A 矩阵的最大特征根，故而传统的使用最大特征根进行的一致性检验方法已经不再适用，为此必须变换为适用于排序向量 W 进行一致性检验。经过变换[6]，有

$$CI=\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\left[a_{ij}\frac{W_j}{W_i}+a_{ji}\frac{W_i}{W_j}-2\right] \tag{16}$$

显然，根据此式进行一致性检验无需计算 A 矩阵最大特征根，因此，该公式比特征根检验公式（15）具有更广阔的适用范围，适用于判断矩阵所有排序方法。

如若 A 矩阵不具有满意的一致性，则 A 矩阵通常要反馈给专家本人进行调整并重新判断。专家自身得到的反馈信息充其量也只能是专家自己所给判断矩阵及其排序向量和一致性检验的结果。仅此信息，专家很难找到或发现其判断失误或逻辑混乱的地方。本文提供的一致性判断矩阵 $\tilde{A}$，则为专家重新判断并调整原始判断矩阵提供了很大的方便。在要求专家修正判断矩阵时，只需将 $\tilde{A}$ 矩阵一同反馈给专家参考，专家在对比分析判断矩阵 A 和 $\tilde{A}$ 矩阵的基础上，能够比较容易地对 A 矩阵作出科学而合理的修正。

三、算 例

例 1 该例取自文献[3]。已知

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 4 & 3 & 7\\ 1/3 & 1 & 1/3 & 1 & 3\\ 1/4 & 3 & 1 & 1/3 & 2\\ 1/3 & 1 & 3 & 1 & 2\\ 1/7 & 1/3 & 1/2 & 1/2 & 1\end{bmatrix}$$

根据特征向量排序方法(EM)，有

$$W=(0.4551,\ 0.1310,\ 0.1555,\ 0.1951,\ 0.0633)^T$$

$$\lambda_{\max}=5.4900 \qquad CI=0.1225 \qquad RI=1.12 \qquad CR=0.1094$$

基于本文的排序思想和方法，有

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1.0000 & 3.7645 & 3.4713 & 2.6307 & 7.3305 \\ 0.2656 & 1.0000 & 0.9221 & 0.6988 & 1.9473 \\ 0.2881 & 1.0845 & 1.0000 & 0.7579 & 2.1118 \\ 0.3801 & 1.4310 & 1.3195 & 1.0000 & 2.7865 \\ 0.1364 & 0.5135 & 0.4735 & 0.3589 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$W^{*}=(0.4830，0.1283，0.1392，0.1836，0.0659)^{T}$$

A矩阵相对于W^{*}的一致性指标为

$$CI=0.1183 \qquad RI=1.12 \qquad CR=0.1056$$

例 2　该例取自文献[7]。已知

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 & 7 & 6 & 6 & 1/3 & 1/4 \\ 1/5 & 1 & 1/3 & 5 & 3 & 3 & 1/5 & 1/7 \\ 1/3 & 3 & 1 & 6 & 3 & 4 & 6 & 1/5 \\ 1/7 & 1/5 & 1/6 & 1 & 1/3 & 1/4 & 1/7 & 1/8 \\ 1/6 & 1/3 & 1/3 & 3 & 1 & 1/2 & 1/5 & 1/6 \\ 1/6 & 1/3 & 1/4 & 4 & 2 & 1 & 1/5 & 1/6 \\ 3 & 5 & 1/6 & 7 & 5 & 5 & 1 & 1/2 \\ 4 & 7 & 5 & 8 & 6 & 6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

运用特征向量排序方法，有

$$W=(0.1730，0.0540，00.1881，0.0175，0.0310，0.0363，0.1668，0.3332)^{T}$$

$$\lambda_{\max}=9.6691 \qquad CI=0.2384 \qquad RI=1.41 \qquad CR=0.1691$$

基于本文的排序思想和方法，得到

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} 1.0000 & 2.7903 & 1.1755 & 9.0362 & 4.9144 & 4.1325 & 1.0466 & 0.5000 \\ 0.3584 & 1.0000 & 0.4213 & 3.2384 & 1.7612 & 1.4810 & 0.3751 & 0.1792 \\ 0.8507 & 2.3737 & 1.0000 & 7.6871 & 4.1806 & 3.5155 & 0.8904 & 0.4253 \\ 0.1107 & 0.3088 & 0.1301 & 1.0000 & 0.5439 & 0.4573 & 0.1158 & 0.0553 \\ 0.2035 & 0.5678 & 0.2392 & 1.8387 & 1.0000 & 0.8409 & 0.2130 & 0.1017 \\ 0.2420 & 0.6752 & 0.2845 & 2.1866 & 1.1892 & 1.0000 & 0.2533 & 0.1210 \\ 0.9554 & 2.6660 & 1.1231 & 8.6336 & 4.6954 & 3.9483 & 1.0000 & 0.4777 \\ 2.0000 & 5.5807 & 2.3510 & 18.0725 & 9.8287 & 8.2649 & 2.0933 & 1.0000 \end{bmatrix}$$

$$W^{*}=(0.1748、0.0626，0.1487，0.0193，0.0356，0.0423，0.1670，0.3496)^{T}$$

A矩阵相对于W^{*}的一致性指标为

$$CI=0.2276 \qquad RI=1.41 \qquad CR=0.1614$$

以上两例均为非满意一致性判断矩阵。若要提高排序结果的准确性和可信度，还需对判断矩阵 A 作出适当程度的调整或修正。基于本文的排序思想和方法导出的排序向量和一致性指标与对数最小二乘排序方法导出的结果完全一致。有兴趣者可以自己验证。

四、结束语

判断矩阵的一致性逼近是层次分析法排序理论研究的重要内容。本文提出的一致性逼近方法概念清楚、涵义明确，而且算法也很简单。该方法不但利用了判断矩阵所提供的直接判断信息，而且还利用了判断矩阵所提供的全部间接判断信息，为判断矩阵排序提供了一种新的途径，对丰富和完善层次分析法的排序理论起到了良好的推动和促进作用。除此之外，本文提出的一致性判断矩阵为专家调整判断矩阵的一致性带来了很大方便，在 AHP 应用中具有较高的参考价值。

参 考 文 献

[1] Vargas, L.G., "An Overview of the Analytic Hierarchy Process and Its Applications", European Journal of Operational Research, 1990, 48(1), pp. 2-8.

[2] 许树柏,《层次分析法原理》，天津大学出版社，1988年，第104页。

[3] 梁梁、盛昭瀚、徐南荣,《一种改进的层次分析法》，系统工程，1989，7 (3)，第5～7页。

[4] 江孝感,《用层次分析法探讨科技情报中心建设效益的综合评价》，情报学报，1990，9 (1)，第9～17页。

[5] 江孝感、徐罗丁、潘卫、冯丽丽,《关于情报研究中群体决策AHP方法的探讨》，情报学报，1991，10 (2)，第94～99 页。

[6] 王莲芬、许树柏,《层次分析法引论》，中国人民大学出版社，1990年，第110～112页。

[7] 马维野,《一种改善判断矩阵一致性的逼近方法》，决策与层次分析法，1990，(2)，第26～31页。