广义加权算术平均组合预测技术研究※

王应明　罗 英

(厦门大学系统科学系　361005)

摘　要　本文研究组合预测问题，提出了一类具有广泛代表性的广义加权算术平均组合预测技术。新的组合预测技术比传统的组合预测技术更具有优越性，能取得更好的组合预测效果。

关键词　组合预测　参数估计　算术平均数　二次规划

1　引言

组合预测一直受到国内外预测界的广泛重视。针对不同预测问题的实际情况，组合预测可以选用多种不同的形式，如加权算术平均组合预测、加权几何平均组合预测、加权调和平均组合预测或其它非线性组合预测等。对某一特定的预测问题而言，人们自然希望能够找到一种理想的组合形式，以便能使组合预测效果最优。但笔者在研究过程中发现，最优的组合形式并不是通过上述几种简单组合形式的对比分析就能得到的。为此，需要提供一种系统的分析技术，这就是本文所要介绍的广义加权算术平均组合预测技术。

2　广义加权算术平均组合预测模型及其参数估计

设某一预测问题在某一时段的实际值为 $y_t(t=1,2,\cdots,n)$，对此预测问题有 m 种可行的预测方法，其预测值或模型拟合值分别为 $f_{tj}(t=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$。又设 m 种预测方法的加权向量为 $W=(W_1,W_2,\cdots,W_m)^T$，且满足归一化约束条件和非负约束条件，即

$$e^TW=1 \tag{1}$$

$$W\geqslant 0 \tag{2}$$

其中 $e^T=(1,1,\cdots,1)$，根据笔者在文献[1]导出的广义加权算术平均法计算公式，令

$$\hat{y}_t=\left[\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^p\Big/\sum_{j=1}^{m}W_j\right]^{1/p}=\left(\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^p\right)^{1/p}$$

$$(t=1,2,\cdots,n，下同；p\neq 0) \tag{3}$$

其中 $\hat{y}_t$ 为 m 种可行预测方法在 t 时刻的广义加权算术平均值，p 为非零可调参数，对不同的预测问题可取不同的数值。

对公式(3)，若令 $p=1$，则有

$$\hat{y}_t=\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj} \tag{4}$$

若令 $p=-1$，则有

$$\hat{y}_t=1\Big/\sum_{j=1}^{m}\frac{W_j}{f_{tj}} \tag{5}$$

很显然，公式(4)为简单加权算术平均组合预测公式，公式(5)是简单加权调和平均组合预测公式。也就是说，简单加权算术平均和调和平均组合预测公式，仅是公式(3)取参数 $p=\pm 1$ 时的特例，因此，公式(3)更具有一般性。事实上，对公式(3)，若令 $p=2$ 或 $1/2$ 还可导出另外两种常见的组合预测形式，即

$$\hat{y}_t=\sqrt{\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^2} \tag{6}$$

或

$$\hat{y}_t=\left(\sum_{j=1}^{m}W_j\sqrt{f_{tj}}\right)^2 \tag{7}$$

公式(6)和公式(7)分别称为简单加权平方和平均组合预测公式和简单加权平方根和平均组合预测公式。可见，模型(3)具有广泛的代表性，此模型即为本文所给出的广义加权算术平均组合预测模型。

为便于对模型(3)进行组合权系数的估计，将模型(3)转变为：

$$\hat{y}_t^p=\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^p \tag{8}$$

如果不考虑预测误差的存在，在理想的情况下应有下式成立：

$$y_t^p=\sum_{j=1}^{m}W_jf_{tj}^p \tag{9}$$

但实际上，由于预测误差的客观存在性和不可避

※　收稿日期：　1997-10-03

免性,(9)式在通常情况下是不成立的。为此,引入误差项

$$\begin{aligned} \varepsilon_t(p) &= y_t^p - \hat{y}_t^p \\ &= y_t^p - \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p \end{aligned} \tag{10}$$

令

$$\begin{cases} \tilde{y}_t(p) = y_t^p & (11) \\ \tilde{f}_{tj}(p) = f_{tj}^p \quad (j = 1, 2, \cdots, m) & (12) \end{cases}$$

则(10)式用向量形式可表示为:

$$E_p = \tilde{Y}_p - \tilde{F}_p W \tag{13}$$

其中 $E_p = (\varepsilon_1(p), \varepsilon_2(p), \cdots, \varepsilon_n(p))^T$, $\tilde{Y}_p = (\tilde{y}_1(p), \tilde{y}_2(p), \cdots, \tilde{y}_n(p))^T$, $\tilde{F}_p = (\tilde{f}_{tj}(p))_{n\times m}$。

很显然,误差总是愈小愈好,为此定义误差性能指标为:

$$\begin{aligned} \min J_p &= \sum_{t=1}^{n} \varepsilon_t^2(p) = E_p^T E_p \\ &= (\tilde{Y}_p - \tilde{F}_p W)^T (\tilde{Y}_p - \tilde{F}_p W) \end{aligned} \tag{14}$$

于是,求解最优组合加权向量 W^* 等价于求解如下最优化问题

$$\min J_p = (\tilde{Y}_p - \tilde{F}_p W)^T (\tilde{Y}_p - \tilde{F}_p W) \tag{15}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} e^T W = 1 & (16) \\ W \geqslant 0 & (17) \end{cases}$$

显然,这是一个二次规划问题。根据二次规划理论可知,该二次规划问题的最优解一定存在,且其 Kuhn-Tucker条件可表示为:

$$\begin{cases} -\tilde{F}_p^T (\tilde{Y}_p - \tilde{F}_p W) - \lambda e - \tilde{U} = 0 & (18) \\ e^T W = 1 & (19) \\ \tilde{u}_i W_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, m) & (20) \\ W, \tilde{U} \geqslant 0 & (21) \end{cases}$$

式中 λ 为与约束条件 $e^T W = 1$ 相对应的 Lagrange乘子, $\tilde{U} = (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2, \cdots, \tilde{u}_m)^T$ 为与加权向量 $W = (W_1, W_2, \cdots, W_m)^T$ 相对应的 Kuhn-Tucker乘子, $e = (1, 1, \cdots, 1)^T$。由于 λ 无非负约束,故令 $\lambda = \lambda' - \lambda''$,且满足: $\lambda', \lambda'' \geqslant 0, \lambda' \cdot \lambda'' = 0$,同时构造辅助线性规划模型(ALP)为:

$$\min \tilde{J} = v \tag{22}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} (\tilde{F}_p^T \tilde{F}_p) W - \lambda' e + \lambda'' e - \tilde{U} = \tilde{F}_p^T \tilde{Y}_p & (23) \\ e^T W + v = 1 & (24) \\ W, \tilde{U} \geqslant 0, \lambda', \lambda'', v \geqslant 0 & (25) \\ \lambda' \text{与} \lambda'' \text{及} \tilde{u}_i \text{与} W_i \text{不能同时为基变量} & (26) \\ (i = 1, 2, \cdots, m) & \end{cases}$$

解此辅助线性规划模型(ALP),即可得到广义加权算术平均组合预测模型的最优组合加权向量 W^*。设定不同的模型参数 p,可得到不同的最优组合加权向量 W^*,但其中必有一组能使组合预测效果最佳。最优的模型参数 p 也可通过试探法或寻优的方法获得,此处不再详述。

3 组合预测效果评价

为了选择最优模型参数 p,必须制定一套切实可行的指标,对组合预测效果进行综合评价。按照预测效果评价原则和惯例,本文选择下列指标作为评判准则:

(1) 平方和误差

$$SSE = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2 \tag{27}$$

式中, y_t 为预测事物实际观测值, $\hat{y}_t$ 为预测值。

(2) 平均绝对误差

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} |y_t - \hat{y}_t| \tag{28}$$

(3) 均方误差

$$MSE = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2} \tag{29}$$

(4) 平均绝对百分比误差

$$MAPE = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} \left| \frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right| \tag{30}$$

(5) 均方百分比误差

$$MSPE = \frac{1}{n} \sqrt{\sum_{t=1}^{n} \left(\frac{y_t - \hat{y}_t}{y_t} \right)^2} \tag{31}$$

4 组合预测应用举例

以文献[2~4]所给预测实例为例进行广义加权算术平均组合预测。原始数据如表1所示。广义加权算术平均组合预测效果如表2所示,表2中的 p^* 为组合预测效果最佳的模型参数。为便于比较分析。表2中同时给出了各单个预测方法及加权几何平均组合预测的效果评价。

以例1的评价效果可以看出,取得最佳预测效果的模型组合形式,既不是比较常见的简单加权几何平均、简单加权算术平均($p = 1$)和简单加权调和平均($p = -1$)等形式,也不是简单加权平方和平均($p = 2$)和简单加权平方根和($p = 0.5$)等形式,而是取 $p = -0.64$ 时的广义加权算术平均组合形式。例2和例3的评价效果则表明,仅就这两个实例而言,简单加权算术平均组合形式是预测模型的最佳组合形式,这也是通过对模型参数 p 进行寻优而得出的结论。综合以上分析可以看出,广义加权算术平均组合形式具有广泛的代表性、普遍性和适用性,能针对各种不同的预测问题寻优确定模型的最佳组合形式,从而能够有效地提高预测精度,取得较好的预测效果。

表 1　预测实例原始数据简表

t		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
例 1[2]	y_t	14.9	18.6	22.2	17.6	19.6	24	31.6	43.7	37	47.2		
	f_{t1}	10	14.9	23.3	26.1	17.5	20.2	26.4	36.8	52.5	38.5		
	f_{t2}	12	15.48	18.95	22.43	25.9	29.38	32.85	36.33	39.8	43.28		
例 2[3]	y_t	57.0	65.4	75.4	82.5	92.8	102.7	119.5	143.8	169.7	201.0	251.2	
	f_{t1}	54.52	62.89	72.54	83.67	96.51	111.32	128.41	148.11	170.84	197.06	227.31	
	f_{t2}	64.68	64.74	68.72	76.61	88.42	104.15	123.79	147.35	174.82	206.21	241.51	
例 3[4]	y_t	11.49	13.06	15.34	20.58	23.28	26.46	27.33	34.22	40.19	53.37	77.79	100.63
	f_{t1}	18.47	14.54	12.84	13.38	16.15	21.16	28.40	37.87	49.58	63.53	79.00	98.12
	f_{t2}	10.03	11.23	15.24	18.67	27.78	26.36	29.67	27.40	42.73	47.36	71.00	109.32

表 2　预测效果评价简表

预测效果评价指标					SSE	MAE	MSE	MAPE	MSPE
例 1	个体预测			方法 (Ⅰ)	520.60	6.04	2.28	0.2251	0.0825
				方法 (Ⅱ)	199.76	4.11	1.41	0.1696	0.0599
	组合预测	简单加权几何平均		$W_1=0.2159$ $W_2=0.7841$	191.35	3.97	1.38	0.1590	0.0561
		广义加权算术平均	$p^*=-0.64$	$W_1=0.1387$ $W_2=0.8613$	185.69	3.93	1.36	0.1597	0.0562
			$p=-1$	$W_1=0.0393$ $W_2=0.9607$	192.71	4.05	1.39	0.1663	0.0584
			$p=0.5$	$W_1=0.1910$ $W_2=0.8090$	193.25	3.98	1.39	0.1605	0.0579
			$p=1$	$W_1=0.1158$ $W_2=0.8842$	194.16	4.05	1.39	0.1649	0.0579
			$p=2$	$W_1=0$ $W_2=1.0$	199.76	4.11	1.41	0.1696	0.0599
例 2	个体预测			方法 (Ⅰ)	795.59	5.78	2.56	0.0440	0.0156
				方法 (Ⅱ)	338.25	4.96	1.67	0.0474	0.0179
	组合预测	简单加权几何平均		$W_1=0.5652$ $W_2=0.4384$	449.04	4.28	1.92	0.0334	0.0122
		广义加权算术平均	$p=-1$	$W_1=0.7017$ $W_2=0.2983$	536.54	4.53	2.11	0.0332	0.0126
			$p=0.5$	$W_1=0.3833$ $W_2=0.6167$	369.85	4.48	1.75	0.0378	0.0129
			$p=1^*$	$W_1=0.1259$ $W_2=0.8741$	328.56	4.80	1.65	0.0443	0.0159
			$p=2$	$W_1=0$ $W_2=1.0$	338.25	4.96	1.67	0.0474	0.0179

(下转 67 页)

表 2 预测循环表 (百万元)

i \ y_{ij} \ j	1	2	3	4	Ⅰ	Ⅱ	Ⅲ	Ⅳ
1	3	1	2	5	5	3	4	7
2	5	3	4	7	7	6	6	9
3	7	6	6	9	9	8	8	11
4	9	8	8	11				
5	$\hat{y}_{51}$	$\hat{y}_{52}$	$\hat{y}_{53}$	$\hat{y}_{54}$				

表 3 总平均度变差、季节度差表 (百万元)

i \ y_{ij} \ j	1	2	3	4	u_i
1	3	1	2	5	−3.125
2	5	3	4	7	−1.125
3	7	6	6	9	1.125
4	9	8	8	11	3.125
v_j	0.125	−1.275	−0.875	2.125	M = 5.875

由命题 2 $R = 8 + 11 + 11.2 = 30.2$, $S = 3 + 6 + 8 = 17$, $T = 91 + 11.2 - 1 = 101.2$

所以: $\hat{y}_{52} = \dfrac{4R + 4S - T}{(4-1)(4-1)} = \dfrac{4\times 30.2 + 4\times 17 - 101.2}{9} = 9.73$(百万元)

同理可得: $\hat{y}_{53} = 10.9$(百万元), $\hat{y}_{53} = 13.12$(百万元)。

方法三: 用简捷预测法, 即用命题 3与命题 4的结论预测该商场第五年各季销售额 (见表 3)。

由命题 3知, $\hat{y}_{n+1} = (nu_n - u_1)/(n-1)$, 所以 $\hat{y}_5 = (4\times 3.125 + 3.125)/3 = 5.208$

由命题 4可得:

$\hat{y}_{5,1} = 5.875 + 5.208 + 0.125 = 11.20$(百万元)　　$\hat{y}_{52} = 5.875 + 5.208 - 1.375 = 9.741$(百万元)

$\hat{y}_{5,3} = 5.875 + 5.208 - 0.875 = 10.21$(百万元)　　$\hat{y}_{54} = 5.875 + 5.208 + 2.215 = 13.21$(百万元)

从方法一至方法三的 3种预测结果来看, 所得结果基本一致, 其误差在 1% 以内。因此, 可认为 3种方法预测结果精确度相当, 其微小差异一般可归因于随机因素影响或计算中间误差。但不难发现, 方法二要比方法一简单, 方法三则比方法二又要简单、方便得多。所以, 方法三即本文的命题 3与命题 4不失为预测季节变动序列的一种简捷方法。

参 考 文 献

[1] 李正龙. 渐进预测模型的一种构造证法及应用. 1996安徽大学学术活动月论文选. 安徽大学出版社, 1996.

[2] 潘介人. 宏观经济模型的解析. 上海交通大学出版社, 1995

[3] 冯文权. 经济预测与决策技术 (修订本). 武汉大学出版社, 1994

(上接 53页)

续表 2

预测效果评价指标					SSE	MAE	MSE	$MAPE$	$MSPE$
例 3	个体预测		方法 (Ⅰ)		401.56	4.88	1.67	0.1959	0.0731
			方法 (Ⅱ)		245.58	3.59	1.30	0.0998	0.0334
	组合预测	简单加权几何平均		$W_1 = 0.2617$ $W_2 = 0.7383$	117.86	2.60	0.90	0.0737	0.0242
		广义加权算术平均	$p = -1$	$W_1 = 0.2473$ $W_2 = 0.7527$	126.06	2.67	0.94	0.0742	0.0250
			$p = 0.5$	$W_1 = 0.3204$ $W_2 = 0.6796$	103.36	2.44	0.85	0.0743	0.0247
			$p = 1^*$	$W_1 = 0.4121$ $W_2 = 0.5879$	94.89	2.34	0.81	0.0791	0.0283
			$p = 2$	$W_1 = 0.6007$ $W_2 = 0.3993$	130.33	2.69	0.95	0.1052	0.0421

参 考 文 献

[1] 王应明, 傅国伟. 群组预测集结方法研究. 预测, 1993(3)

[2] 周传世, 罗国民. 加权几何平均组合预测模型及其应用. 数理统计与管理, 1995(2)

[3] 杨桂元, 唐小我, 马永开. 最优加权几何平均组合预测方法研究. 统计研究, 1996(2)

[4] 孙庆凯. 平均预测法的应用条件. 预测, 1985(2)