# 调和平均组合预测中的参数估计技术

王应明 罗 英
厦门大学系统科学系,361005

摘 要 本文从几何距离角度出发,研究调和平均组合预测中的参数估计技术,提出三种确定组合预测权系数的新方法。理论分析和预测实例表明,新的组合预测参数估计技术行之有效。

主题词 预测方法,参数估计,线性规划,算法。

**Techniques of Parameter Estimation in Harmonic-Means Combining Forecasts**

Wang Yingming and Luo Ying
*Dept. of Systems Science, Xiamen University, 361005*

**Abstract** This paper studies the techniques of parameter estimation in harmonic-means combining forecasts at the angle of geometric distance. Three new techniques of determining the combining weights are proposed. Theoretical analysis and forecasting examples all show that the new techniques are feasible and effective.

**Keywords** Combining forecasts, Geometric distance, Harmonic-means, Linear programming algorithm.

## 1 引 言[20]

预测是决策的前提和计划的基础,预测的好坏是决策和计划成败的关键。由于现实事物的复杂性,为了提高预测精度,人们对预测事物往往采用多种模型或方法进行组合预测。自从 J. M. Bates和 C. W. J. Granger首次提出组合预测方法以来,国外对组合预测方法的研究一直经久不衰;国内预测界最近几年也开始注重对组合预测方法的研究。根据模型组合方式的不同,组合预测一般可分为加权算术平均组合预测(线性组合预测)、加权几何平均组合预测、加权调和平均组合预测及其它非线性组合预则等。关于线性组合预测和加权几何平均组合预测,目前已取得丰硕研究成果,本文主要研究加权调和平均组合预测技术,尤其是参数估计技术。因为加权调和平均组合预测本质上属于非线性组合预测,传统的最小二乘参数估计技术未必能够取得最好的预测效果,这从笔者大量的仿真预测实例中可以得到验证。本文通过引入几何距离概念,导出三种确定组合预测权系数的新方法,新的参数估计技术能够取得较好的组合预测效果。

## 2 调和平均组合预测模型及其参数估计

设某一预测问题在某一时段的实际值为 $y_t$($t=1, 2,\cdots, n$),对此预测问题共有 $m$ 种可行的预测方法,其预测值或模型拟合值分别为 $f_{t_j}$($t=1, 2,\cdots, n$; $j=1, 2,\cdots, m$)。又设 $m$ 种预测方法的加权向量为 $W=(W_1, W_2,\cdots, W_m)^T$,且满足归一化约束条件

$$e^T W = 1 \tag{1}$$

其中 $e^T=(1, 1,\cdots, 1)$。为使组合预测模型能从经济意义上作出科学而合理的解释,加权向量 $W$ 还必须满足非负性约束条件

$$W \geqslant 0 \tag{2}$$

[20] 收稿日期: 1996年 10月 9日

根据加权调和平均数计算公式[1],令

$$\hat{y}_t = \frac{\sum_{j=1}^{m} W_j}{\sum_{j=1}^{m} \frac{W_j}{f_{t_j}}} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{m} \frac{W_j}{f_{t_j}}}$$

$$t = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

其中 $\hat{y}_t$ 为 $m$ 种可行预测方法在 $t$ 时刻的加权调和平均值。很显然,$\hat{y}_t$ 是 $y_t$ 的一个很好的逼近。因此,(3)式即为基于调和平均数的非线性组合预测模型。为便于进行组合权系数的参数估计,将(3)式转变为

$$\frac{1}{y_t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{W_j}{f_{t_j}}, \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{4}$$

如果不考虑预测误差的存在,在理想的情况下应有下式成立。

$$\frac{1}{y_t} = \sum_{j=1}^{m} \frac{W_j}{f_{t_j}}, \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{5}$$

令

$$\begin{cases} \tilde{y}_t = 1/y_t \quad t = 1, 2, \cdots, n & (6) \\ \tilde{f}_{t_j} = 1/f_{t_j} \quad t = 1, 2, \cdots, n;\ j = 1, 2, \cdots, m & (7) \end{cases}$$

则(5)式可表示为

$$\tilde{y}_t = \sum_{j=1}^{m} W_j \tilde{f}_{t_j} \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{8}$$

写成向量形式,有

$$\tilde{Y} = \tilde{F} W \tag{9}$$

其中 $\tilde{Y} = (\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \cdots, \tilde{y}_n)^T$, $\tilde{F} = (\tilde{f}_{t_j})_{n \times m}$。很显然,从解析几何角度考虑,(8)式代表了 $n$ 个以 $W_1, W_2, \cdots, W_m$ 为坐标空间的平面方程。若 $n < m$,则 $n$ 个平面将有无穷多个公共交点;若 $n = m$,则 $n$ 个平面将相交于唯一的公共交点;若 $n > m$,此时由于模型拟合误差的客观存在性,$n$ 个平面将不再具有非零公共交点。因此,很自然的想法是在坐标空间中找到某点 $W^*$,使得该点 $W^*$ 至所有平面的总距离和为最短。

不失一般性,设平面方程的通式为

$$A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_n x_n + B = 0 \tag{10}$$

则点 $\bar{x} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \cdots, \bar{x}_n)$ 到平面方程(10)式的欧氏距离为

$$d = \left| \frac{A_1 \bar{x}_1 + A_2 \bar{x}_2 + \cdots + A_n \bar{x}_n + B}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + \cdots + A_n^2}} \right| \tag{11}$$

对组合预测而言,待求的最优组合加权向量 $W$ 可以看成是 $W_1, W_2, \cdots, W_m$ 坐标空间中的一个点。因此,根据公式(11),点 $W$ 至(8)式所示平面方程的欧氏距离可表示为

$$d_t = \left| \frac{\sum_{j=1}^{m} W_j \tilde{f}_{t_j} - \tilde{y}_t}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m} \tilde{f}_{t_j}^2}} \right| \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{12}$$

很显然,$d_t$ 总是愈小愈好。为此,定义范数性能指标为

$$\min J = \left( \sum_{t=1}^{n} d_t^p \right)^{1/p} \tag{13}$$

式中 $p = 1, 2, \infty$ 分别对应于 $L_1, L_2$ 和 $L_\infty$ 三种范数。令

$$\begin{cases} u_t = 1 \Big/ \sqrt{\sum_{j=1}^{m} \tilde{f}_{t_j}^2} \quad t = 1, 2, \cdots, n & (14) \\ \varepsilon_t = \tilde{y}_t - \sum_{j=1}^{m} W_j \tilde{f}_{t_j} \quad t = 1, 2, \cdots, n & (15) \end{cases}$$

显然,$u_t > 0$,于是 $d_t$ 可进一步简化为

$$d_t = u_t |\varepsilon_t| \quad t = 1, 2, \cdots, n \tag{16}$$

将(15)式写成向量形式,有

$$E = \tilde{Y} - \tilde{F} W \tag{17}$$

其中 $E = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n)^T$ 为误差列向量。对(13)式的范数性能指标,分别取不同的范数,由此可导出三种不同的参数估计技术。

(1) 最小几何距离参数估计技术

在(13)式中,取 $p = 1$,则有

$$\min J = \sum_{t=1}^{n} d_t \tag{18}$$

由此可以得到基于 $L_1$ 范数的最小几何距离参数估计技术为

$$\min J = \sum_{t=1}^{n} d_t = \sum_{t=1}^{n} u_t |\varepsilon_t| \tag{19}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \tilde{Y} - \tilde{F} W = E & (20) \\ e^T W = 1 & (21) \\ W \geqslant 0 & (22) \end{cases}$$

显然,这是一个带有加权系数的最小绝对误差和回归模型。令 $\varepsilon_t = \varepsilon_t^+ - \varepsilon_t^-$,且满足 $\varepsilon_t^+, \varepsilon_t^- \geqslant 0$, $\varepsilon_t^+ \cdot \varepsilon_t^- = 0$, $(t = 1, 2, \cdots, n)$,则上述最优化问题可化成如下等价的线性规划模型

$$\min J = \sum_{t=1}^{n} u_t (\varepsilon_t^+ + \varepsilon_t^-)$$

$$= C^T (E^+ + E^-) \tag{23}$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} \tilde{F} W + E^+ - E^- = \tilde{Y} & (24) \\ e^T W = 1 & (25) \\ W, E^+, E^- \geqslant 0 & (26) \end{cases}$$

其中 $E^{+}=(\varepsilon_1^{+},\varepsilon_2^{+},\cdots,\varepsilon_n^{+})^T$, $E^{-}=(\varepsilon_1^{-},\varepsilon_2^{-},\cdots,\varepsilon_n^{-})^T$, $C=(\overline{u_1},\overline{u_2},\cdots,\overline{u_n})^T$。解此线性规划模型,可得到基于最小几何距离的最优组合加权向量 $W^*$。

(2) 最小平方几何距离参数估计技术

对 (13)式的范数性能指标,取 $p=2$,由此导出的参数的估计技术,称为最小平方几何距离参数估计技术,亦即

$$\min J=\sum_{t=1}^{n} d_t^2=\sum_{t=1}^{n} u_t\varepsilon_t^2 \qquad (27)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\tilde{Y}-\tilde{F}W=E & (28)\\ e^TW=1 & (29)\\ W\geqslant 0 & (30)\end{cases}$$

设对角矩阵

$$U=\mathrm{diag}\{u_1,u_2,\cdots,u_n\} \qquad (31)$$

则 (27)式的范数性能指标用向量形式可表示为

$$\begin{aligned}\min J&=E^TUE\\&=(\tilde{Y}-\tilde{F}W)^TU(\tilde{Y}-\tilde{F}W)\end{aligned} \qquad (32)$$

于是,上述最优化模型可进一步简化为

$$\min J=(\tilde{Y}-\tilde{F}W)^TU(\tilde{Y}-\tilde{F}W) \qquad (33)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}e^TW=1 & (34)\\ W\geqslant 0 & (35)\end{cases}$$

显然,这是一个二次规划问题。根据二次规划理论可知,该二次规划问题的最优解一定存在,且其 Kuhn- Tucker条件可表示为

$$\begin{cases}-\tilde{F}^TU(\tilde{Y}-\tilde{F}W)-\lambda e-\tilde{U}=0 & (36)\\ e^TW=1 & (37)\\ \tilde{u}_iW_i=0\quad i=1,2,\cdots,m & (38)\\ W,\tilde{U}\geqslant 0 & (39)\end{cases}$$

式中 $\lambda$ 为与约束条件 $e^TW=1$ 相对应的 lagrange乘子,$\tilde{U}=(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_m)^T$ 为与加权向量 $W=(W_1,W_2,\cdots,W_m)^T$ 相对应的 Kuhn- Tucker乘子,$e=(1,1,\cdots,1)^T$。由于 $\lambda$ 无非负约束,故可令 $\lambda=\lambda'-\lambda''$ 且满足: $\lambda',\lambda''\geqslant 0,\lambda'\cdot\lambda''=0$;同时构造辅助线性规划模型 (ALP)为

$$\min \tilde{J}=v \qquad (40)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}(\tilde{F}^TU\tilde{F})W-\lambda'e+\lambda''e-\tilde{U}=\tilde{F}^TU\tilde{Y} & (41)\\ e^TW+v=1 & (42)\\ W,\tilde{U}\geqslant 0,\lambda',\lambda'',v\geqslant 0 & (43)\\ \lambda'\text{与}\lambda''\text{及}\tilde{u}_i\text{与}W_i\text{不能同时为基变量}(i=1,2,\cdots,m) & (44)\end{cases}$$

解此辅助线性规划模型,可得到基于最小平方几何距离的最优组合加权向量 $W^*$。

(3) 最小最大几何距离参数估计技术

在 (13)式中,令 $p=\infty$,则由此导出的参数估计技术,称为最小最大几何距离参数估计技术亦即

$$\begin{aligned}\min J&=\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{t=1}^{n} d_t^p\right)^{1/p}\\&=\max_t\{d_t\}\end{aligned} \qquad (45)$$

令
$$Z=\max_t\{d_t\} \qquad (46)$$

则显然有

$$Z\geqslant 0 \qquad (47)$$

且
$$d_t\leqslant Z\quad t=1,2,\cdots,n \qquad (48)$$

亦即
$$|\varepsilon_t|\leqslant Z/\overline{u_t}\quad t=1,2,\cdots,n \qquad (49)$$

记
$$H=\left(\frac{1}{\overline{u_1}},\frac{1}{\overline{u_2}},\cdots,\frac{1}{\overline{u_n}}\right)^T \qquad (50)$$

则 (49)式用向量形式可表示为

$$|E|\leqslant ZH \qquad (51)$$

亦即
$$|\tilde{Y}-\tilde{F}W|\leqslant ZH \qquad (52)$$

上式进一步展开,有

$$\begin{cases}\tilde{F}W+ZH\geqslant\tilde{Y} & (53)\\ -\tilde{F}W+ZH\geqslant-\tilde{Y} & (54)\end{cases}$$

于是,最小最大几何距离参数估计技术可表达为

$$\min J=Z \qquad (55)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\tilde{F}W+ZH\geqslant\tilde{Y} & (56)\\ -\tilde{F}W+ZH\geqslant-\tilde{Y} & (57)\\ e^TW=1 & (58)\\ Z\geqslant 0,W\geqslant 0 & (59)\end{cases}$$

显然,这是一个线性规划模型,可化成标准形式,用单纯形方法求解。根据线性规划理论,单纯形方法的迭代次数和计算时间主要取决于约束方程数目,与约束方程数目的三次方成正比[2]。因此,$n$ 愈大,上述线性规划的迭代次数愈多,计算时间愈长。为了有效地减少迭代计算次数和节省机时,可将上述线性规划模型化为对偶规划模型求解。根据对偶规划理论,上述线性规划模型的对偶规划模型可表示为

$$\max\tilde{J}=\tilde{Y}^T(V-V')+W \qquad (60)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\tilde{F}^T(V-V')+We\leqslant 0 & (61)\\ H^T(V+V')\leqslant 1 & (62)\\ V,V'\geqslant 0,W\text{无约束} & (63)\end{cases}$$

式中 $V=(V_1,V_2,\cdots,V_n)^T$, $V'=(V_1',V_2',\cdots,V_n')^T$。

该对偶规划模型的约束方程数目仅为 $(m+1)$,因此,迭代次数和计算时间均较原线性规划模型有较大改善。引入松驰变量 d和松驰向量 $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)^T$,则上述对偶规划模型可进一步化为标准形式

$$\min(-\tilde{J})=\tilde{Y}^T(V'-V)-W'+W'' \quad (64)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}\tilde{F}^T(V-V')+W'e-W''e+\lambda=0 & (65)\\ H^T(V+V')+d=1 & (66)\\ V,V'\geqslant 0,\lambda\geqslant 0,W',W'',d\geqslant 0 & (67)\end{cases}$$

解此对偶规划模型,记对偶规划最优单纯形表中松驰量 λ 的相对成本系数向量为 $Z_\lambda^*=(Z_1^*,Z_2^*,\cdots,Z_m^*)^T$,松驰变量 d的相对成本系数的 $Z_d^*$,则由对偶规划理论,有

$$\begin{cases}W^*=Z_\lambda^* & (68)\\ Z^*=Z_d^* & (69)\end{cases}$$

## 3 组合预测效果评价

为检验组合预测效果的好坏,必须制定一套切实可行的指标,对组合预测效果进行全方位的综合性衡量和评价。按照预测效果评价原则和惯例,本文提供如下评价指标:

(1) 平方和误差

$$SSE=\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2 \quad (70)$$

式中 $y_t$ 为预测事物的实际观测值,$\hat{y}_t$ 为预测值.

(2) 平均绝对误差

$$MAE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|y_t-\hat{y}_t| \quad (71)$$

(3) 均方误差

$$MSE=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2} \quad (72)$$

(4) 平均绝对百分比误差

$$MAPE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t-\hat{y}_t}{y_t}\right| \quad (73)$$

(5) 均方百分比误差

$$MSPE=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{y_t-\hat{y}_t}{y_t}\right)^2} \quad (74)$$

## 4 组合预测应用举例

本文以文献[3]预测实例说明组合预测方法的应用。已知某预测事物在某一时段的实际观测值和两种不同方法的预测值如表 1所示。运用本文提供的调和平均组合预测参数估计技术对此预测问题进行组合预测,得到三组不同的最优组合加权向量 $W^*$ 如表 2所示。为检验组合预测效果的好坏,表 2还同时给出了不同预测方法的效果评价。为了便于

表 **1** 个体预测简表

| $t$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y_t$ | 11.49 | 13.06 | 15.34 | 20.58 | 23.28 | 26.46 | 27.33 | 34.22 | 40.19 | 53.37 | 77.79 | 100.63 |
| $f_{t_1}$ | 18.47 | 14.54 | 12.84 | 13.38 | 16.15 | 21.16 | 28.40 | 37.87 | 49.58 | 63.53 | 79.00 | 98.12 |
| $f_{t_2}$ | 10.03 | 11.23 | 15.24 | 18.67 | 27.78 | 26.36 | 29.67 | 27.40 | 42.73 | 47.36 | 71.00 | 109.32 |

与传统的基于误差的参数估计技术相比较,表 2同时给出了以

$$\min J=\left(\sum_{t=1}^{n}|X_t|^p\right)^{1/p}$$

$$=\left[\sum_{t=1}^{n}\left|\tilde{y}_t-\sum_{j=1}^{m}W_j\tilde{f}_{t_j}\right|^p\right]^{1/p} \quad (75)$$

为误差性能指标的组合权系数估计结果及其相应的预测效果评价。从评价结果可以看出,基于几何距离的参数的估计技术明显优于传统的基于误差的参数估计技术。仅就本例而言,$p=\infty$时的参数估计技术稍差,但此结论不具有一般性,不同的参数估计技术各有千秋。此外,笔者还运用本文所提供的调和平均组合预测参数估计技术进行了大量的仿真组合预测,效果均令人满意。

## 5 结束语

组合预测是预测学理论研究的重要内容,有关其理论和方法的研究,目前虽然有了很大的进展,但仍很不完善。本文提出的调和平均组合预测参数估计技术对推动和促进组合预测学理论的进一步研究和发展具有一定意义,而且具有较高实用价值。与所有最优化组合预测方法一样,调和平均组合预测参数估计技术同样具有自动筛选模型的功能,对于不适合进行组合预测的模型或方法,新的参数估计技术会自动令其权系数为零。

表 2　组合预测效果评价表

| 误差指标 / 预测方法 | | | SSE | MAE | MSE | MAPE | MSPE |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 个体预测方法 (I　) | | | 401. 5570 | 4. 8817 | 1. 6699 | 0. 1959 | 0. 0731 |
| 个体预测方法 (II　) | | | 245. 5786 | 3. 5908 | 1. 3059 | 0. 0998 | 0. 0334 |
| 基于几何距离的参数估计技术 | $p=1$ | $W_1=0.2781$<br>$W_2=0.7219$ | 118. 2987 | 2. 5689 | 0. 9064 | 0. 0719 | 0. 0250 |
| | $p=2$ | $W_1=0.2775$<br>$W_2=0.7225$ | 118. 4409 | 2. 5698 | 0. 9069 | 0. 0742 | 0. 0250 |
| | $p=\infty$ | $W_1=0.2364$<br>$W_2=0.7636$ | 129. 1555 | 2. 7044 | 0. 9471 | 0. 0754 | 0. 0251 |
| 基于误差的参数估计技术 | $p=1$ | $W_1=0.2781$<br>$W_2=0.7219$ | 118. 2987 | 2. 5689 | 0. 9064 | 0. 0719 | 0. 0250 |
| | $p=2$ | $W_1=0.2473$<br>$W_2=0.7527$ | 126. 0584 | 2. 6633 | 0. 9356 | 0. 0742 | 0. 0250 |
| | $p=\infty$ | $W_1=0.1811$<br>$W_2=0.8189$ | 147. 8002 | 2. 9126 | 1. 0131 | 0. 0812 | 0. 0258 |

## 参　考　文　献


1　于涛 ,栗方忠．社会经济统计学原理．武汉大学出版社 , 1992 138~ 142

2　薛履中．工程最优化技术．天津大学出版社 , 1988

3　孙庆凯．平均预测法的应用条件．预测 , 1985, ( 2): 18~ 21


(上接第 36页 )

## 参　考　文　献


1　Gill G S. Step Frequency Waveform Design and Processing for Detection of Moving Targets in Clutter. IEEE International Radar Conference, 1994

2　Khan R H, Mitchell D. Waveform Analysis for High Frequency FMICW Radar. IEE. Proc. F, 1991, 138( 5): 411~ 419

3　Khan R H, Gamberg B, et al. Target Detection and Tracking with a High Frequency Ground Wave Radar. IEEE J. Oceanic Eng. , 1994, 19( 4)

4　林茂庸 ,柯有安．雷达信号理论．国防工业出版社 , 1981

5　Skolnik M I. An Introduction to Radar Systems. New York: McGraw-HILL, 1980

6　Poole A W V. On the Use of Pseudor-Andom Codes for "Chirp" Radar. IEEE Trans. on Antennas and Propagation, 1979, AP- 27( 4)