广义加权多重平均组合预测技术研究*

王应明

(厦门大学系统科学系, 361005)

摘 要 本文提出一类广义加权多重平均组合预测新技术,给出了其线性规划解法。理论分析和预测实例均表明,新的组合预测技术能够取得较好的预测效果。

关键词 组合预测 参数估计 多重平均 二次规划

1 引言

由于组合预测能有效地提高预测精度,故受到国内外预测界的广泛重视,一般而言,每种组合形式,都有其优越性和适用性,将不同形式的组合预测效果进行整体性综合考虑,理论上应该是比较科学的。基于此本文提出了一类广义加权多重平均组合预测技术,这种方法集多种组合形式于一体,能够取得比较好的组合预测效果。

2 模型及其参数估计

设某一预测问题在某一时段的实际值为 $y_t(t=1,2,3,\cdots,n)$,对此预测问题有 m 种可行的预测方法,其预测值或模型拟合值分别为 $f_{tj}(t=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$。又设 m 种预测方法的加权向量为 $W=(W_1,W_2,\cdots,W_m)^T$,且满足归一化约束条件和非负约束条件,即

$$e^T W = 1 \tag{1}$$

$$W \geqslant 0 \tag{2}$$

其中,$e^T=(1,1,\cdots,1)$。

根据文献[1]导出的群组预测思路,构造目标函数

$$\min J_t = \sum_{j=1}^{m} W_j\left[\left(\frac{f_{tj}}{y_t}\right)^p + \left(\frac{\hat{y}_t}{f_{tj}}\right)^p - 2\right] \quad (t=1,2,\cdots,n;\ p\neq 0) \tag{3}$$

令 $\partial J_t/\partial \hat{y}_t = 0$,整理后得到

$$\hat{y}_t = \left[\left(\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p\right)\sum_{j=1}^{m}\frac{W_j}{f_{tj}^p}\right]^{1/2p} = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p\right)^{1/p}\cdot\left(1\Big/\sum_{j=1}^{m}\frac{W_j}{f_{tj}^p}\right)^{1/p}} \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{4}$$

式中,p为非零可调参数。$\hat{y}_t$是对实际观测值 y_t的一个很好的逼近,分析上述公式可以发现,等式右端根号内第一项是笔者在文献[1]曾定义过的广义加权算术平均数,根号内第二项是广义加权调和平均数,整个公式是广义加权算术平均组合与广义加权调和平均组合的简单几何平均再组合。因此,公式(4)即为本文所给出的广义加权多重平均组合预测模型,特别是对 $p=\pm 1$的特例,有

$$\hat{y}_t = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}\right)\cdot\left(1\Big/\sum_{j=1}^{m}\frac{W_j}{f_{tj}}\right)} \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{5}$$

此公式集简单加权算术平均组合,简单加权调和平均组合和简单几何平均组合三种组合形式于一体。

由于 p是模型的可调参数,模型(4)实质上包含了一类无限多非线性组合预测形式在内,因此,可通过对模型参数 p进行寻优处理获得最佳的模型组合形式,从而取得较好的组合预测效果。

为了便于对模型(4)进行参数估计,将(4)式转化为

$$\hat{y}_t^{2p} = \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^p \sum_{j=1}^{m} W_j f_{tj}^{-p} \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{6}$$

由此可得到

$$\sum_{j=1}^{m} W_j\left(f_{tj}^p - f_{tj}^{-p}\hat{y}_t^{2p}\right) = 0 \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{7}$$

或 $$\sum_{j=1}^{m} W_j\left(f_{tj}^{-p} - f_{tj}^{p}\hat{y}_t^{-2p}\right) = 0 \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{8}$$

模型(7)和模型(8)互为对耦,也就是说,对于给定的模型参数 p,如果 $W^*=(W_1^*,W_2^*,\cdots,W_m^*)^T$是模型(7)的最优解,则当给定参数 $-p$时,W^* 一定也是模型(8)的最优解。因此,模型(7)、(8)只要选择其中任意一个进行讨论即可,不妨以模型(7)为例。

假设不考虑预测误差的存在,在理想的情况下,理所当然有下式成立:

$$\sum_{j=1}^{m} W_j\left(f_{tj}^p - f_{tj}^{-p} y_t^{2p}\right) = 0 \quad (t=1,2,\cdots,n) \tag{9}$$

* 收稿日期: 1996-10-15 国家自然科学青年基金资助项目 (编号: 76900020)

但实际上,由于预测误差的客观存在性和不可避免性,(9)式在通常情况下是不成立的,为此引入误差项

$$\varepsilon_t(p)=\sum_{j=1}^{m} W_j\left(f_{tj}^{p}-f_{tj}^{-p}y_t^{2p}\right) \quad (10)$$

$$(t=1,2,\cdots,n)$$

令

$$\tilde{f}_{tj}(p)=f_{tj}^{p}-f_{tj}^{-p}y_t^{2p} \quad (11)$$

$$(t=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$$

则(10)式用向量形式可表示为

$$E_p=\tilde{F}_p W \quad (12)$$

其中,$E_p=(\varepsilon_1(p),\varepsilon_2(p),\cdots,\varepsilon_n(p))^T$,

$\tilde{F}_p=(\tilde{f}_{tj}(p))_{n\times m}$

人们自然希望误差愈小愈好,为此,定义误差性能指标为

$$\min J_p=\sum_{t=1}^{n}\varepsilon_t^2(p)=E_p^T E_p=W^T\left(\tilde{F}_p^T\tilde{F}_p\right)W \quad (13)$$

于是,求解最优组合加权向量 W^* 等价于求解如下最优化的问题

$$\min J_p=W^T\left(\tilde{F}_p^T\tilde{F}_p\right)W \quad (14)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} e^T W=1 & (15)\\ W\geqslant 0 & (16)\end{cases}$$

显然,这是一个二次规划问题。根据二次规划理论可知,该二次规划问题的最优解一定存在,且其 Kuhn-Tucker条件可表示为

$$\begin{cases} \tilde{F}_p^T\tilde{F}_p W-\lambda e-\tilde{U}=0 & (17)\\ e^T W=1 & (18)\\ \tilde{u}_i W_i=0\quad(i=1,2,\cdots,m) & (19)\\ W,\tilde{U}\geqslant 0 & (20)\end{cases}$$

式中,λ 为与约束条件 $e^T W=1$ 相对应的 Lagrange乘子,$\tilde{U}=(\tilde{u}_1,\tilde{u}_2,\cdots,\tilde{u}_m)^T$ 为与加权向量 $W=(W_1,W_2,\cdots,W_m)^T$ 相对应的 Kuhn-Tucker乘子,$e=(1,1,\cdots,1)^T$。由于 λ 无非负约束,故可令 $\lambda=\lambda'-\lambda''$,且满足:$\lambda',\lambda''\geqslant 0,\lambda'\cdot\lambda''=0$;同时构造辅助线性规划模型(ALP)为:

$$\min\tilde{J}=v \quad (21)$$

$$\text{s.t.}\begin{cases} \tilde{F}_p^T\tilde{F}_p W-\lambda' e+\lambda'' e-\tilde{U}=0 & (22)\\ e^T W+v=1 & (23)\\ W,\tilde{U}\geqslant 0,\lambda',\lambda'',v\geqslant 0 & (24)\\ \lambda'\text{与}\lambda''\text{及}\tilde{u}_i\text{与}W_i\text{不能同时为基变量} & (25)\\ (i=1,2,\cdots,m) & \end{cases}$$

解此辅助线性规划模型(ALP),即可得到广义加权多重平均组合预测模型的最优组合加权向量 W^*。设定不同的模型参数 p,可得到不同的最优组合加权向量 W^*,但其中必有一组能使组合预测效果最佳。最优的模型参数 p 通常可采用试探法或寻优方法获得,此处不再详述。

3 组合预测效果评价

为了选择最优模型参数 p 的需要,必须制定一套切实可行的评价指标,对组合预测效果进行综合评价,本文选择下列指标作为评判准则。

(1) 平方和误差

$$SSE=\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2 \quad (26)$$

式中,y_t 为预测事物实际观测值,$\hat{y}_t$ 为预测值。

(2) 平均绝对误差

$$MAE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}|y_t-\hat{y}_t| \quad (27)$$

(3) 均方误差

$$MSE=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2} \quad (28)$$

(4) 平均绝对百分比误差

$$MAPE=\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\left|\frac{y_t-\hat{y}_t}{y_t}\right| \quad (29)$$

(5) 均方百分比误差

$$MSPE=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{y_t-\hat{y}_t}{y_t}\right)^2} \quad (30)$$

4 组合预测应用举例

本文以文献[2~4]所给预测实例进行广义加权多重平均组合预测。原始数据如表 1所示,广义加权多重平均组合预测效果如表 2所示。表 2中的 p^* 为使组合预测效果最佳的模型参数。为了便于比较分析,表 2中还同时给出了各单个预测方法及常用组合预测方法效果评价。

从例 1的评价效果可以看出,取得较好组合预测效果的模型组合形式,是取 $p=\pm 0.933$ 时的广义加权多重平均组合形式;例 2表明,简单加权算术平均组合预测与广义加权多重平均组合预测同时取得了最佳组合预测效果;例 3则显示,简单加权算术平均组合预测是最佳组合预测,广义加权多重平均预测组合与最佳组合预测效果已很接近。综上分析可以看出,广义加权多重平均组合预测模型具有广泛的适用性,能针对各种不同的预测问题寻优确定模型的最佳组合形式,从而能够有效地提高预测精度,取得比较好的组合预测效果。

参 考 文 献

[1] 王应明,傅国伟.群组预测集结方法研究.预测,1993(3)

[2] 周传世,罗国民.加权几何平均组合预测模型及其应用.数理统计与管理,1995(2)

[3] 杨桂元,唐小我,马永开.最优加权几何平均组合预测方法研究.统计研究,1996(2)

[4] 王应明,傅国伟.基于不同误差准则和范数的组合预测方法研究.控制与决策,1994(1)

表 1　预测实例原始数据简表*

t		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
例 1	y_t	14.9	18.6	22.2	17.6	19.6	24	31.6	43.7	37	47.2		
	f_{t1}	10	14.9	23.3	26.1	17.5	20.2	16.4	36.8	52.5	38.5		
	f_{t2}	12	15.48	18.95	22.43	25.9	29.38	32.85	36.33	39.8	43.28		
例 2	y_t	57.0	65.4	75.4	82.5	92.8	102.7	119.5	143.8	169.7	201.0	251.2	
	f_{t1}	54.52	62.89	72.54	83.67	96.51	111.32	128.41	148.11	170.84	197.06	227.31	
	f_{t2}	64.68	66.74	68.72	76.61	88.42	104.15	123.79	147.35	174.82	206.21	241.51	
例 3	y_t	11.49	13.06	15.34	20.58	23.28	26.46	27.33	34.22	40.19	53.37	77.79	100.63
	f_{t1}	18.47	14.54	12.84	13.28	16.15	21.16	28.40	37.87	49.58	63.53	79.00	98.12
	f_{t2}	10.03	11.23	15.24	18.67	27.78	26.36	29.67	27.40	42.73	47.36	71.00	109.32

* 原始数据取自文献〔2～4〕。

表 2　预测效果评价简表

预测效果评价指标				SSE	MAE	MSE	$MAPE$	$MSPE$
例 1	个体预测	方法(Ⅰ)		520.60	6.04	2.28	0.2251	0.0825
		方法(Ⅱ)		199.76	4.11	1.41	0.1696	0.0599
	组合预测	简单加权算术平均	$W_1=0.1158$ $W_2=0.8842$	194.16	4.05	1.39	0.1649	0.0579
		简单加权几何平均	$W_1=0.2159$ $W_2=0.7841$	191.35	3.97	1.38	0.1590	0.0561
		简单加权调和平均	$W_1=0.0393$ $W_2=0.9607$	192.71	4.05	1.39	0.1663	0.0584
		广义加权多重平均 ($p^*=\pm0.933$)	$W_1=0.1438$ $W_2=0.8562$	188.89	3.97	1.37	0.1611	0.0567
例 2	个体预测	方法(Ⅰ)		795.59	5.78	2.56	0.0440	0.0156
		方法(Ⅱ)		338.25	4.96	1.67	0.0474	0.0179
	组合预测	简单加权算术平均	$W_1=0.1259$ $W_2=0.8741$	328.56	4.80	1.65	0.0443	0.0159
		简单加权几何平均	$W_1=0.5652$ $W_2=0.4384$	449.04	4.28	1.92	0.0334	0.0122
		简单加权调和平均	$W_1=0.7017$ $W_2=0.2983$	536.54	4.53	2.11	0.0332	0.0126
		广义加权多重平均 ($p^*=\pm0.96$)	$W_1=0.1237$ $W_2=0.8763$	328.67	4.81	1.65	0.0442	0.0159
例 3	个体预测	方法(Ⅰ)		401.56	4.88	1.67	0.1959	0.0731
		方法(Ⅱ)		245.58	3.59	1.30	0.0998	0.0334
	组合预测	简单加权算术平均	$W_1=0.4121$ $W_2=0.5879$	94.89	2.34	0.81	0.0791	0.0283
		简单加权几何平均	$W_1=0.2617$ $W_2=0.7383$	117.86	2.60	0.90	0.0737	0.0242
		简单加权调和平均	$W_1=0.2473$ $W_2=0.7527$	126.06	2.67	0.94	0.0742	0.0250
		广义加权多重平均 ($p^*=\pm1$)	$W_1=0.4137$ $W_2=0.5863$	96.61	2.38	0.82	0.0799	0.0276