

DOI: 10.3969/j.issn.1001-3881.2015.15.003

空间三自由度冗余驱动并联机构的加速度性能指标分析

周结华¹, 彭侠夫²

(1. 南昌航空大学信息工程学院, 江西南昌 330063;

2. 厦门大学信息科学与技术学院, 福建厦门 361005)

摘要: 在建立空间三自由度冗余驱动并联机构 Hessian 矩阵的基础上, 研究空间三自由度冗余驱动并联机构的加速度全域性能指标。在预设工作空间内, 绘制加速度全域性能指标图谱。通过观察图谱, 分析加速度全域性能指标随并联机构尺寸参数变化的分布规律。结果表明: η_a 的最大值为 0.803 7, 即加速度性能指标最优, 对应的结构参数为 $l_1 = 3.0 \text{ m}$, $l_2 = 4.0 \text{ m}$, $l_3 = 0.5 \text{ m}$, $l_4 = 3.0 \text{ m}$; 加速度性能指标好的空间三自由度冗余驱动并联机构组型主要集中在 $2.5 \text{ m} \leq l_1 \leq 3.0 \text{ m}$, $3.5 \text{ m} \leq l_2 \leq 4.0 \text{ m}$, $0.5 \text{ m} \leq l_3 \leq 1.0 \text{ m}$, $2.5 \text{ m} \leq l_4 \leq 3.0 \text{ m}$ 的区域。

关键词: 冗余驱动; 并联机构; 加速度; 性能指标**中图分类号:** TH112 **文献标志码:** A **文章编号:** 1001-3881(2015)15-011-5

Acceleration Performance Index Analysis of Spatial 3-DOF Parallel Manipulator with Redundant Actuator

ZHOU Jiehua¹, PENG Xiafu²

(1. School of Information Engineering, Nanchang Hangkong University, Nanchang Jiangxi 330063, China;

2. College of Information & Technology, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005, China)

Abstract: The acceleration global performance index of spatial three degree-of-freedom parallel manipulator with redundant actuator was researched by Hessian matrix. The performance atlas was drawn in the default workspace. The geometry size distribution law of spatial three degree-of-freedom parallel manipulator with redundant actuator was analyzed, and the optimal size range under acceleration global performance index was established by the performance atlas. The results show that the best acceleration global performance index η_a is 0.803 7 and the corresponding structure parameters are $l_1 = 3.0 \text{ m}$, $l_2 = 4.0 \text{ m}$, $l_3 = 0.5 \text{ m}$, $l_4 = 3.0 \text{ m}$, furthermore the good acceleration global performance areas are $2.5 \text{ m} \leq l_1 \leq 3.0 \text{ m}$, $3.5 \text{ m} \leq l_2 \leq 4.0 \text{ m}$, $0.5 \text{ m} \leq l_3 \leq 1.0 \text{ m}$, $2.5 \text{ m} \leq l_4 \leq 3.0 \text{ m}$.

Keywords: Redundant actuator; Parallel manipulator; Acceleration; Performance index

0 前言

随着科学技术的发展和并联机构应用领域的不断扩大, 对并联机构性能指标的要求越来越高, 从而对并联机构的设计提出了更高意义上的要求^[1-2]。在并联机构的设计过程中, 并联机构的机构尺寸决定了并联机构的操作特性^[3-4]。如何根据实际应用, 选择符合要求的并联机构尺寸, 成为了并联机构设计的首要任务, 而依据往往是基于性能指标之上的^[5-6]。探讨并联机构的性能指标与杆件尺寸之间的关系, 并绘制相应的全域性能指标图谱, 这些图谱均是设计并联机构尺寸的重要依据^[7-8]。

本文作者基于空间三自由度冗余驱动并联机构的运动学模型^[9]而展开研究。首先, 推导出该并联机构的 Hessian 矩阵; 随后, 将其引入全域性能指标中, 对空间三自由度冗余驱动并联机构进行加速度性能指

标分析, 并绘制加速度性能图谱; 最后, 讨论了机构尺寸参数对加速度性能指标的影响。

1 Hessian 矩阵

空间三自由度冗余驱动并联机构由台基、动平台、4 条 SPS 主动支链和 1 条被动约束支链组成, 其结构如图 1 所示。其中, 被动约束支链上端通过球铰与动平台连接, 下端与台基固连在一起, 4 条 SPS 主动支链均通过球铰与动平台和台基相连, 上支点 B_1, B_2, B_3, B_4 和下支点 A_1, A_2, A_3, A_4 呈长方形分布, 上支点 B_5 和下支点 A_5 均位于各长方形的中心位置。

为了研究方便, 分别建立动坐标系 $\{B\}$ 、静态参考坐标系 $\{A\}$ 。以上支点 B_5 为坐标系原点, X 轴平行于 B_1B_2 , Y 轴平行于 B_2B_3 , Z 轴与 X 、 Y 轴满足右手定则关系, 建立动坐标系 $O-XYZ$ 。其中, 由上支点 B_1 指向 B_2 为 X 轴的正方向, 由上支点 B_2 指向 B_3

收稿日期: 2014-05-29

基金项目: 江西省青年自然科学基金项目(20151BAB217022); 江西省教育厅青年自然科学基金项目(GJJ14549); 南昌航空大学博士启动金项目(EA201204428)

作者简介: 周结华(1983—), 男, 博士, 主要研究方向为并联机构分析与设计。E-mail: jiehuazhou@126.com。

为 Y 轴的正方向，动平台的初始位置平行于台基。静态参考坐标系 $O-X'Y'Z'$ 的 X' 轴、Y' 轴和 Z' 轴分别与动坐标系 X 轴、Y 轴和 Z 轴的初始位置完全重合，动坐标系随动平台一起运动。

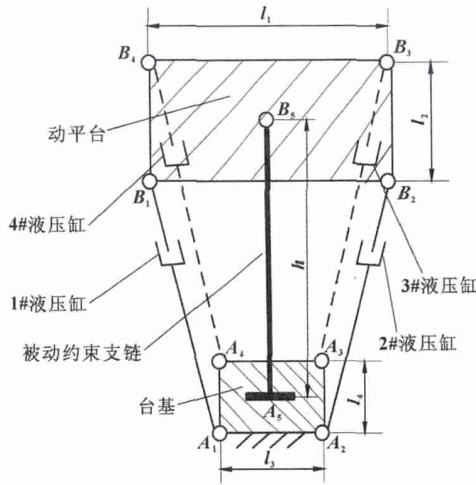


图 1 空间三自由度冗余驱动并联机构结构

在运动过程中，动坐标系相对于静态参考坐标系的姿态用三个姿态角描述，即横摇角 α ，纵摇角 β ，偏航角 γ 。动坐标系到静态参考坐标系的坐标变换矩阵为

$$R = \begin{bmatrix} c\beta \cdot c\gamma & -c\alpha \cdot s\gamma + s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma & s\alpha \cdot s\gamma + c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ c\beta \cdot s\gamma & c\alpha \cdot c\gamma + s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma & -s\alpha \cdot c\gamma + c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ -s\beta & s\alpha \cdot c\beta & c\alpha \cdot c\beta \end{bmatrix}$$

其中， $c\alpha$ ， $c\beta$ ， $c\gamma$ 和 $s\alpha$ ， $s\beta$ ， $s\gamma$ 分别为 $\cos\alpha$ ， $\cos\beta$ ， $\cos\gamma$ 和 $\sin\alpha$ ， $\sin\beta$ ， $\sin\gamma$ 的简写形式； R 是单位正交矩阵，则 $R^{-1} = R^T$ 。

根据文献 [9] 可知，4 条 SPS 主动支链的输出长度为

$$d_i^2 = \sum_{j=1}^3 ({}^A b_{j,i} - {}^A a_{j,i})^2 \quad (i=1,2,3,4) \quad (1)$$

其中

$$\begin{cases} {}^A B = [{}^A b_{j,i}]_{3 \times 4} = R \cdot {}^B B = R \cdot \begin{bmatrix} -l_1/2 & l_1/2 & l_1/2 & -l_1/2 \\ -l_2/2 & -l_2/2 & l_2/2 & l_2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ {}^A A = [{}^A a_{j,i}]_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} -l_3/2 & l_3/2 & l_3/2 & -l_3/2 \\ -l_4/2 & -l_4/2 & l_4/2 & l_4/2 \\ -h & -h & -h & -h \end{bmatrix} \end{cases}$$

将式 (1) 两边分别对时间求导，整理可得

$$\dot{A}\theta = B\dot{X} \quad (2)$$

式中： $\theta = [\alpha \ \beta \ \gamma]^T$ ， $\dot{X} = [\dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3 \ \dot{d}_4]^T$ ， $A = [a_{j,i}] \in R^{4 \times 3}$ ， $B \in R^{4 \times 4}$ ，且有

$$a_{11} = A_1 \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot s\alpha \cdot s\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ l_2 \cdot s\alpha \cdot c\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ -l_2 \cdot c\alpha \cdot c\beta \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned} a_{12} &= A_1 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot s\beta \cdot c\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma \\ l_1 \cdot s\beta \cdot s\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma \\ l_1 \cdot c\beta + l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \end{bmatrix}, \\ a_{13} &= A_1 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot c\beta \cdot s\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot c\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ -l_1 \cdot c\beta \cdot c\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot s\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \\ a_{21} &= A_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_2 \cdot s\alpha \cdot s\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ l_2 \cdot s\alpha \cdot c\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ -l_2 \cdot c\alpha \cdot c\beta \end{bmatrix}, \\ a_{22} &= A_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot s\beta \cdot c\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma \\ -l_1 \cdot s\beta \cdot s\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma \\ -l_1 \cdot c\beta + l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \end{bmatrix}, \\ a_{23} &= A_2 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot c\beta \cdot s\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot c\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ l_1 \cdot c\beta \cdot c\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot s\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \\ a_{31} &= A_3 \cdot \begin{bmatrix} l_2 \cdot s\alpha \cdot s\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ -l_2 \cdot s\alpha \cdot c\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ l_2 \cdot c\alpha \cdot c\beta \end{bmatrix}, \\ a_{32} &= A_3 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot s\beta \cdot c\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma \\ -l_1 \cdot s\beta \cdot s\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma \\ -l_1 \cdot c\beta - l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \end{bmatrix}, \\ a_{33} &= A_3 \cdot \begin{bmatrix} -l_1 \cdot c\beta \cdot s\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot c\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ l_1 \cdot c\beta \cdot c\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot s\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \\ a_{41} &= A_4 \cdot \begin{bmatrix} l_2 \cdot s\alpha \cdot s\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ -l_2 \cdot s\alpha \cdot c\gamma + l_2 \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ l_2 \cdot c\alpha \cdot c\beta \end{bmatrix}, \\ a_{42} &= A_4 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot s\beta \cdot c\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma \\ l_1 \cdot s\beta \cdot s\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma \\ l_1 \cdot c\beta - l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \end{bmatrix}, \\ a_{43} &= A_4 \cdot \begin{bmatrix} l_1 \cdot c\beta \cdot s\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot c\gamma - l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma \\ -l_1 \cdot c\beta \cdot c\gamma - l_2 \cdot c\alpha \cdot s\gamma + l_2 \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma \\ 0 \end{bmatrix}, \\ A_1 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(l_1/2) \cdot c\beta \cdot c\gamma + (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot s\gamma - (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma + (l_3/2) \\ -(l_1/2) \cdot c\beta \cdot s\gamma - (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot c\gamma - (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma + (l_4/2) \\ (l_1/2) \cdot s\beta - (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot c\beta + h \end{bmatrix}^T, \\ A_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (l_1/2) \cdot c\beta \cdot c\gamma + (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot s\gamma - (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma - (l_3/2) \\ (l_1/2) \cdot c\beta \cdot s\gamma - (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot c\gamma - (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma + (l_4/2) \\ -(l_1/2) \cdot s\beta - (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot c\beta + h \end{bmatrix}^T, \end{aligned}$$

$$A_3 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (l_1/2) \cdot c\beta \cdot c\gamma - (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot s\gamma + (l_2/2) \cdot \\ s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma - (l_3/2) \\ (l_1/2) \cdot c\beta \cdot s\gamma + (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot c\gamma + (l_2/2) \cdot \\ s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma - (l_4/2) \\ -(l_1/2) \cdot s\beta + (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot c\beta + h \end{bmatrix}^T$$

$$A_4 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -(l_1/2) \cdot c\beta \cdot c\gamma - (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot s\gamma + (l_2/2) \cdot \\ s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma + (l_3/2) \\ -(l_1/2) \cdot c\beta \cdot s\gamma + (l_2/2) \cdot c\alpha \cdot c\gamma + (l_2/2) \cdot \\ s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma - (l_4/2) \\ (l_1/2) \cdot s\beta + (l_2/2) \cdot s\alpha \cdot c\beta + h \end{bmatrix}^T$$

$$B = \text{diag}(d_1 \quad d_2 \quad d_3 \quad d_4)。$$

动平台输出速度与驱动杆件速度能通过雅可比矩阵进行联系, 即

$$\dot{\theta} = J_f \dot{X} \quad (3)$$

其中, $J_f = (J_E^T \cdot J_E)^{-1} \cdot J_E^T$, J_f 为并联机构的正向运动学雅可比矩阵, 也称为一阶影响系数矩阵。 $J_E = B^{-1}A$, J_E 为并联机构的逆向运动学雅可比矩阵。

将式 (3) 两边分别对时间求导, 可得

$$\dot{\theta} = J_f \ddot{X} + \dot{X}^T [H] \dot{X} \quad (4)$$

式中: $[H] = \frac{\partial J_f}{\partial X} \in R^{3 \times 4 \times 4}$ 为三自由冗余驱动并联机构的 Hessian 矩阵。

为了求解 Hessian 矩阵, 首先建立单支链的二阶影响系数矩阵, 由式 (2) 可得

$$a_{i1} \ddot{\alpha} + a_{i2} \ddot{\beta} + a_{i3} \ddot{\gamma} = d_i \ddot{d}_i \quad (5)$$

将式 (5) 两边对时间求导, 整理可得

$$[a_{i1} \quad a_{i2} \quad a_{i3}] \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} = d_i \ddot{d}_i + \dot{d}_i \dot{d}_i - \dot{a}_{i1} \dot{\alpha} - \dot{a}_{i2} \dot{\beta} - \dot{a}_{i3} \dot{\gamma} \quad (6)$$

由式 (2) 可得

$$\dot{a}_{i1} = \begin{bmatrix} k_{11} \dot{\alpha} + k_{12} \dot{\beta} + k_{13} \dot{\gamma} \\ k_{41} \dot{\alpha} + k_{42} \dot{\beta} + k_{43} \dot{\gamma} \\ k_{71} \dot{\alpha} + k_{72} \dot{\beta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{91} \\ k_{101} \\ k_{111} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{121} \\ k_{131} \\ k_{141} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{151} \dot{\alpha} + k_{152} \dot{\beta} + k_{153} \dot{\gamma} \\ k_{181} \dot{\alpha} + k_{182} \dot{\beta} + k_{183} \dot{\gamma} \\ k_{211} \dot{\alpha} + k_{212} \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{a}_{i2} = \begin{bmatrix} k_{11} \dot{\alpha} + k_{12} \dot{\beta} + k_{13} \dot{\gamma} \\ k_{41} \dot{\alpha} + k_{42} \dot{\beta} + k_{43} \dot{\gamma} \\ k_{71} \dot{\alpha} + k_{72} \dot{\beta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{231} \\ k_{241} \\ k_{251} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{121} \\ k_{131} \\ k_{141} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{261} \dot{\alpha} + k_{262} \dot{\beta} + k_{263} \dot{\gamma} \\ k_{291} \dot{\alpha} + k_{292} \dot{\beta} + k_{293} \dot{\gamma} \\ k_{321} \dot{\alpha} + k_{322} \dot{\beta} \end{bmatrix}$$

$$\dot{a}_{i3} = \begin{bmatrix} k_{11} \dot{\alpha} + k_{12} \dot{\beta} + k_{13} \dot{\gamma} \\ k_{41} \dot{\alpha} + k_{42} \dot{\beta} + k_{43} \dot{\gamma} \\ k_{71} \dot{\alpha} + k_{72} \dot{\beta} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{341} \\ k_{351} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{121} \\ k_{131} \\ k_{141} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} k_{361} \dot{\alpha} + k_{362} \dot{\beta} + k_{363} \dot{\gamma} \\ k_{391} \dot{\alpha} + k_{392} \dot{\beta} + k_{393} \dot{\gamma} \\ 0 \end{bmatrix}$$

式中

$$k_1^i = {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_2^i = -{}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_3^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_4^i = -{}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_5^i = -{}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_6^i = {}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_7^i = {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\beta, \quad k_8^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta,$$

$$k_9^i = {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{10}^i = -{}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{11}^i = {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\beta,$$

$$k_{12}^i = {}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma -$$

$${}^A a_{1,i},$$

$$k_{13}^i = {}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma -$$

$${}^A a_{2,i},$$

$$k_{14}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot s\beta + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta + h,$$

$$k_{15}^i = {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{16}^i = {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma, \quad k_{17}^i = {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot$$

$$c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{18}^i = -{}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma, \quad k_{19}^i = {}^B b_{2,i} \cdot$$

$$c\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{20}^i = {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{21}^i = -{}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta, \quad k_{22}^i = -{}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta,$$

$$k_{23}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{24}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{25}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta, \quad k_{26}^i = {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{27}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{28}^i = {}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{29}^i = {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{30}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{31}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{32}^i = -{}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta, \quad k_{33}^i = {}^B b_{1,i} \cdot s\beta - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta,$$

$$k_{34}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{35}^i = {}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{36}^i = {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{37}^i = {}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{38}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma,$$

$$k_{39}^i = {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot s\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{40}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot s\beta \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot c\beta \cdot s\gamma,$$

$$k_{41}^i = -{}^B b_{1,i} \cdot c\beta \cdot s\gamma - {}^B b_{2,i} \cdot c\alpha \cdot c\gamma + {}^B b_{2,i} \cdot s\alpha \cdot s\beta \cdot c\gamma。$$

$$\text{令} \quad J_f = \begin{bmatrix} j_{f1} & j_{f2} & j_{f3} & j_{f4} \\ j_{f5} & j_{f6} & j_{f7} & j_{f8} \\ j_{f9} & j_{f10} & j_{f11} & j_{f12} \end{bmatrix}, \quad \dot{a}_{i1} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{i1,1} \\ \dot{a}_{i1,2} \\ \dot{a}_{i1,3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix},$$

$$\dot{a}_{i2} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{i2,1} \\ \dot{a}_{i2,2} \\ \dot{a}_{i2,3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}, \quad \dot{a}_{i3} = \begin{bmatrix} \dot{a}_{i3,1} \\ \dot{a}_{i3,2} \\ \dot{a}_{i3,3} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \dot{\alpha} \\ \dot{\beta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

将式 (3) 代入式 (6), 整理可得

$$[a_{i1} \ a_{i2} \ a_{i3}] \begin{bmatrix} \ddot{\alpha} \\ \ddot{\beta} \\ \ddot{\gamma} \end{bmatrix} = d_i \ddot{d}_i + [\dot{d}_1 \ \dot{d}_2 \ \dot{d}_3 \ \dot{d}_4] \mathbf{K}^{(i)} \begin{bmatrix} \dot{d}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \\ \dot{d}_4 \end{bmatrix} \quad (7)$$

式中

$$\mathbf{K}^{(i)} = \begin{bmatrix} K_{11}^{(i)} & K_{12}^{(i)} & K_{13}^{(i)} & K_{14}^{(i)} \\ K_{21}^{(i)} & K_{22}^{(i)} & K_{23}^{(i)} & K_{24}^{(i)} \\ K_{31}^{(i)} & K_{32}^{(i)} & K_{33}^{(i)} & K_{34}^{(i)} \\ K_{41}^{(i)} & K_{42}^{(i)} & K_{43}^{(i)} & K_{44}^{(i)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{(i-2)(i-3)(i-4)}{-6} & \frac{(i-1)(i-3)(i-4)}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{(i-1)(i-2)(i-4)}{-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{(i-1)(i-2)(i-3)}{6} \end{bmatrix} +$$

$$\begin{bmatrix} \dot{a}_{i1_1} j_{f_{i1}} + \dot{a}_{i1_2} j_{f_{i2}} + \dot{a}_{i1_3} j_{f_{i3}} & \dot{a}_{i2_1} j_{f_{i1}} + \dot{a}_{i2_2} j_{f_{i2}} + \dot{a}_{i2_3} j_{f_{i3}} & \dot{a}_{i3_1} j_{f_{i1}} + \dot{a}_{i3_2} j_{f_{i2}} + \dot{a}_{i3_3} j_{f_{i3}} \\ \dot{a}_{i1_1} j_{f_{i2}} + \dot{a}_{i1_2} j_{f_{i3}} + \dot{a}_{i1_3} j_{f_{i4}} & \dot{a}_{i2_1} j_{f_{i2}} + \dot{a}_{i2_2} j_{f_{i3}} + \dot{a}_{i2_3} j_{f_{i4}} & \dot{a}_{i3_1} j_{f_{i2}} + \dot{a}_{i3_2} j_{f_{i3}} + \dot{a}_{i3_3} j_{f_{i4}} \\ \dot{a}_{i1_1} j_{f_{i3}} + \dot{a}_{i1_2} j_{f_{i4}} + \dot{a}_{i1_3} j_{f_{i5}} & \dot{a}_{i2_1} j_{f_{i3}} + \dot{a}_{i2_2} j_{f_{i4}} + \dot{a}_{i2_3} j_{f_{i5}} & \dot{a}_{i3_1} j_{f_{i3}} + \dot{a}_{i3_2} j_{f_{i4}} + \dot{a}_{i3_3} j_{f_{i5}} \\ \dot{a}_{i1_1} j_{f_{i4}} + \dot{a}_{i1_2} j_{f_{i5}} + \dot{a}_{i1_3} j_{f_{i6}} & \dot{a}_{i2_1} j_{f_{i4}} + \dot{a}_{i2_2} j_{f_{i5}} + \dot{a}_{i2_3} j_{f_{i6}} & \dot{a}_{i3_1} j_{f_{i4}} + \dot{a}_{i3_2} j_{f_{i5}} + \dot{a}_{i3_3} j_{f_{i6}} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{J}_f$$

对比式 (4) 和式 (7), 可得

$$[\mathbf{H}] = \mathbf{J}_f * [\mathbf{K}^{(1)}/d_1 \ \mathbf{K}^{(2)}/d_2 \ \mathbf{K}^{(3)}/d_3 \ \mathbf{K}^{(4)}/d_4]^T$$

式中: “*” 表示矩阵的广义标量积。

那么, Hessian 矩阵 $[\mathbf{H}]$ 所包含的各层矩阵分别为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{(1)} &= j_{f_{i1}} \mathbf{K}^{(1)}/d_1 + j_{f_{i2}} \mathbf{K}^{(2)}/d_2 + j_{f_{i3}} \mathbf{K}^{(3)}/d_3 + j_{f_{i4}} \mathbf{K}^{(4)}/d_4 \\ \mathbf{H}^{(2)} &= j_{f_{i2}} \mathbf{K}^{(1)}/d_1 + j_{f_{i3}} \mathbf{K}^{(2)}/d_2 + j_{f_{i4}} \mathbf{K}^{(3)}/d_3 + j_{f_{i5}} \mathbf{K}^{(4)}/d_4 \\ \mathbf{H}^{(3)} &= j_{f_{i3}} \mathbf{K}^{(1)}/d_1 + j_{f_{i4}} \mathbf{K}^{(2)}/d_2 + j_{f_{i5}} \mathbf{K}^{(3)}/d_3 + j_{f_{i6}} \mathbf{K}^{(4)}/d_4 \end{aligned}$$

2 加速度全域性能指标分析

$$\text{令 } \ddot{\theta}_1 = \mathbf{J}_f \ddot{\mathbf{X}} \quad (8)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \dot{\mathbf{X}}^T [\mathbf{H}] \dot{\mathbf{X}} \quad (9)$$

设动平台位姿输出加速度 $\ddot{\theta}_1$ 和 $\ddot{\theta}_2$ 分别存在偏差 $\delta\ddot{\theta}_1$ 和 $\delta\ddot{\theta}_2$, 驱动杆件加速度存在偏差 $\delta\dot{\mathbf{X}}$, 则有

$$\delta\ddot{\theta}_1 = \mathbf{J}_f \cdot \delta\dot{\mathbf{X}} \quad (10)$$

$$\delta\ddot{\theta}_2 = \dot{\mathbf{X}}^T \cdot [\mathbf{H}] \cdot \delta\dot{\mathbf{X}} + \delta\dot{\mathbf{X}}^T \cdot [\mathbf{H}] \cdot \dot{\mathbf{X}} + \delta\dot{\mathbf{X}}^T \cdot [\mathbf{H}] \cdot \dot{\mathbf{X}} \quad (11)$$

将式 (8) 和式 (10) 两边同时取范数, 则有

$$\|\dot{\mathbf{X}}\| = \|\mathbf{J}_f^+ \ddot{\theta}_1\| \leq \|\mathbf{J}_f^+\| \cdot \|\ddot{\theta}_1\| \quad (12)$$

$$\|\delta\ddot{\theta}_1\| = \|\mathbf{J}_f \cdot \delta\dot{\mathbf{X}}\| \leq \|\mathbf{J}_f\| \cdot \|\delta\dot{\mathbf{X}}\| \quad (13)$$

联立式 (12) 和式 (13), 可得

$$\frac{\|\delta\ddot{\theta}_1\|}{\|\ddot{\theta}_1\|} \leq \|\mathbf{J}_f\| \cdot \|\mathbf{J}_f^+\| \frac{\|\delta\dot{\mathbf{X}}\|}{\|\dot{\mathbf{X}}\|}$$

由于 $\dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} \neq 0$, 设 $\dot{\mathbf{X}}^T \dot{\mathbf{X}} = r$, 则由式 (9) 可得

$$\dot{\mathbf{X}}^T = \frac{\ddot{\theta}_2 \dot{\mathbf{X}}^T ([\mathbf{H}])^{-1}}{r} \quad (14)$$

将式 (14) 两边同时取范数, 则有

$$\|\dot{\mathbf{X}}^T\| = \left\| \frac{\ddot{\theta}_2 \dot{\mathbf{X}}^T ([\mathbf{H}])^{-1}}{r} \right\| \leq \frac{\|\ddot{\theta}_2\| \cdot \|\dot{\mathbf{X}}^T\| \cdot \|([\mathbf{H}])^{-1}\|}{r} \quad (15)$$

那么, 由式 (15) 可推得

$$\frac{1}{\|\ddot{\theta}_2\|} \leq \frac{\|([\mathbf{H}])^{-1}\|}{r} \quad (16)$$

由式 (11) 两边同时取范数, 可得

$$\|\delta\ddot{\theta}_2\| \leq \|[\mathbf{H}]\| \cdot (2\|\dot{\mathbf{X}}\| \cdot \|\delta\dot{\mathbf{X}}\| + \|\delta\dot{\mathbf{X}}\|^2) \quad (17)$$

联立式 (16) 和式 (17), 可得

$$\frac{\|\delta\ddot{\theta}_2\|}{\|\ddot{\theta}_2\|} \leq \|[\mathbf{H}]\| \cdot \|([\mathbf{H}])^{-1}\| \cdot \frac{(2\|\dot{\mathbf{X}}\| \cdot \|\delta\dot{\mathbf{X}}\| + \|\delta\dot{\mathbf{X}}\|^2)}{r} \quad (18)$$

取 Frobenius 范数, 有 $r = \|\dot{\mathbf{X}}\|^2$ 。那么, 式 (18) 可变换为

$$\frac{\|\delta\ddot{\theta}_2\|}{\|\ddot{\theta}_2\|} \leq \|[\mathbf{H}]\| \cdot \|([\mathbf{H}])^{-1}\| \cdot \left(\frac{2\|\delta\dot{\mathbf{X}}\| + \|\delta\dot{\mathbf{X}}\|^2}{\|\dot{\mathbf{X}}\| + \|\dot{\mathbf{X}}\|^2} \right)$$

故

$$\frac{\|\delta\ddot{\theta}_2\|}{\|\ddot{\theta}_2\|} \leq \|\mathbf{J}_f\| \cdot \|\mathbf{J}_f^+\| \cdot \frac{\|\delta\dot{\mathbf{X}}\|}{\|\dot{\mathbf{X}}\|} + \|[\mathbf{H}]\| \cdot \|([\mathbf{H}])^{-1}\| \cdot \left(\frac{2\|\delta\dot{\mathbf{X}}\| + \|\delta\dot{\mathbf{X}}\|^2}{\|\dot{\mathbf{X}}\| + \|\dot{\mathbf{X}}\|^2} \right)$$

加速度性能指标定义为^[10]：输入速度和加速度相对偏差放大因子的倒数在工作空间内的积分，即

$$\eta_a = \frac{\int_w \frac{1}{K_{J_i+H}} dw}{\int_w dw} \quad (19)$$

式中

$$K_{J_i+H} = b \| \mathbf{J}_i \| \cdot \| \mathbf{J}_i^* \| + (a^2 + 2a) \| [\mathbf{H}] \| \cdot \| ([\mathbf{H}])^{-1} \|$$

其中， a 、 b 分别为机构输入速度和输入加速度的误差系数，指标 η_a 反映了空间三自由度冗余驱动并联机构在整个工作空间内加速度逆解的精确度。由于 $\| [\mathbf{H}] \| \cdot \| ([\mathbf{H}])^{-1} \|$ 分别为 3 个数，故取此 3 个数的平方和开方作为 $\| [\mathbf{H}] \| \cdot \| ([\mathbf{H}])^{-1} \|$ 的值，使得 $\| [\mathbf{H}] \| \cdot \| ([\mathbf{H}])^{-1} \|$ 变为 1 个数，即

$$\| [\mathbf{H}] \| \cdot \| ([\mathbf{H}])^{-1} \| = \left[(\| \mathbf{H}^{(1)} \| \cdot \| [\mathbf{H}^{(1)}]^{-1} \|^2 + (\| \mathbf{H}^{(2)} \| \cdot \| [\mathbf{H}^{(2)}]^{-1} \|^2 + (\| \mathbf{H}^{(3)} \| \cdot \| [\mathbf{H}^{(3)}]^{-1} \|^2)^{1/2}$$

3 应用算例分析及结论

在对空间三自由度冗余驱动并联机构的加速度性能指标分析前，首先要确定空间三自由度冗余驱动并联机构的结构参数变化范围。从理论上讲，结构参数 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 和 h 可以有无数种组合方式，即对应有无数组机构，从而导致性能指标分析工作无法执行。

为了分析问题方便，结合工程项目要求背景，对结构参数范围作如下说明：(1) 选定 $h = 4.7 \text{ m}$ 不变，只考虑 l_1 、 l_2 、 l_3 、 l_4 对空间三自由度冗余驱动并联机构性能指标的影响；(2) 根据本项目提供的场地要求，占地面积不能超过 $4 \text{ m} \times 5 \text{ m}$ ，综合考虑各个球铰链的安装直径和各支链的外径要求，选定各边长的变化范围分别为： $0.5 \text{ m} \leq l_1 \leq 5.0 \text{ m}$ ， $0.5 \text{ m} \leq l_2 \leq 4.0 \text{ m}$ ， $0.5 \text{ m} \leq l_3 \leq 5.0 \text{ m}$ ， $0.5 \text{ m} \leq l_4 \leq 4.0 \text{ m}$ ，每条边的步长均取 0.5 m ，共搜索 6 400 组机构，而在每个机构均取 1 000 个位形采样点（在其预设工作空间内取出均匀分布的 1 000 个点）。

取 $a = 2\%$ ， $b = 2\%$ ，根据式 (19)，编程计算空间三自由度冗余驱动并联机构的加速度性能指标 η_a ，绘制出加速度性能指标与机构组型的关系图谱和加速度性能指标与结构参数的等高线图谱，分别如图 2 和图 3 所示。

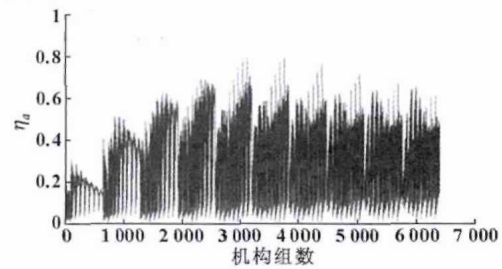


图 2 加速度性能指标与机构组型的关系图谱

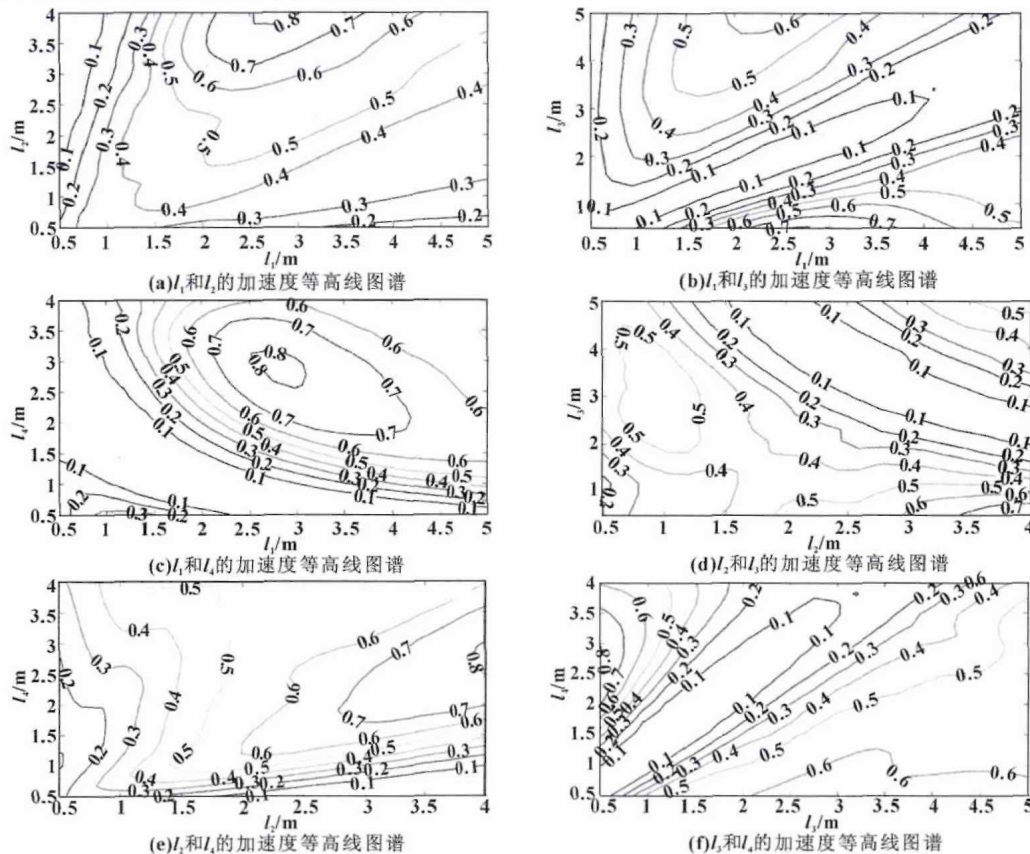


图 3 加速度性能指标的等高线图谱

(下转第 25 页)

(4) 依据实际机床的结构组成形式利用 UG 建立了相应的虚拟样机, 将其导入到 ADAMS 中对其作修饰处理、添加约束、施加驱动后进行了运动仿真分析和数据处理, 得到了该交叉杆型并联机床运动学正解、驱动杆电机驱动函数、铰链运动副转角变化范围以及机床驱动关节速度到末端执行器速度的映射关系等, 直观地反映该机床的相关运动性能。

参考文献:

- [1] RAGHAVAN M. The Stewart Platform of General Geometry Has 40 Configurations [J]. ASME Journal of Mechanical Design, 1993, 115(2): 277-282.
- [2] INNOCENTI C. Forward Kinematics of a 6-6 Fully-Parallel Manipulator with Congruent Base and Platform [M]. Advances in Robot Kinematics: Analysis and Control, 1998: 137-146.
- [3] 沈惠平, 尹洪波, 王振, 等. 基于拓扑结构分析的求解 6-SPS 并联机构位置正解的研究 [J]. 机械工程学报, 2013, 49(21): 70-80.
- [4] HUSTY M L. An Algorithm for Solving the Direct Kinematics of General Stewart-Gough Platforms [J]. Mechanism and Machine Theory, 1996, 31(4): 365-379.
- [5] WEN Fuan, LIANG Chongao. Displacement Analysis of the 6-6 Stewart Platform Mechanisms [J]. Mechanism and Machine Theory, 1994, 29(4): 547-557.
- [6] 黄昔光, 廖启征, 魏世民, 等. 一般 6-6 型平台并联机构位置正解代数消元法 [J]. 机械工程学报, 2009, 45(1): 56-61.
- [7] 程世利, 吴洪涛, 姚裕, 等. 6-SPS 并联机构运动学正解的一种解析化方法 [J]. 机械工程学报, 2010, 46(9): 26-31.
- [8] 程世利, 吴洪涛, 王超群, 等. 基于正交补的 6-3 Stewart 并联机构运动学正解 [J]. 中国机械工程, 2011, 22(5): 505-509.
- [9] TSAI L W. Robot Analysis: The Mechanics of Serial and Parallel Manipulators [M]. New York: Wiley-Interscience Publication, 1999.
- [10] 黄真, 赵永生, 赵铁石. 高等空间机构学 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2006.
- [11] MASORY O, WANG J. Workspace Evaluation of Stewart Platforms [J]. Advanced Robotics, 1995, 9(4): 443-461.
- [12] 陈小岗, 孙宇. 6-UPS 并联机床位姿空间图谱 [J]. 中国机械工程, 2013, 24(10): 1331-1335.
- [13] 肖尚彬. 四元素方法及其应用 [J]. 力学进展, 1993, 23(2): 249-260.
- [14] 李鹭扬, 吴洪涛. 一类 6-SPS 并联机构正运动学符号解分析 [J]. 扬州大学学报: 自然科学版, 2006, 9(3): 42-45.
- [15] 陈承东, 胡志痒, 吴群, 等. 矩阵分析 [M]. 上海: 同济大学出版社, 2005.
- [16] 李增刚. ADAMS 入门详解与实例 [M]. 北京: 国防工业出版社, 2010.
- [17] 于靖军, 刘辛军, 丁希伦, 等. 机器人机构学的数学基础 [M]. 北京: 机械工业出版社, 2008.

(上接第 15 页)

观察图 2 和图 3, 可得如下结论: (1) η_a 的最大值为 0.803 7, 即加速度性能指标最优, 对应的结构参数为 $l_1 = 3.0 \text{ m}$, $l_2 = 4.0 \text{ m}$, $l_3 = 0.5 \text{ m}$, $l_4 = 3.0 \text{ m}$ 。(2) 加速度性能指标好 (即加速度指标值大) 的空间三自由度冗余驱动并联机构组型主要集中在 $2.5 \text{ m} \leq l_1 \leq 3.0 \text{ m}$, $3.5 \text{ m} \leq l_2 \leq 4.0 \text{ m}$, $0.5 \text{ m} \leq l_3 \leq 1.0 \text{ m}$, $2.5 \text{ m} \leq l_4 \leq 3.0 \text{ m}$ 的区域。

4 结束语

以空间 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的位置逆解方程为基础, 运用微分法推导出空间 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的 Hessian 矩阵, 在其基础上分析了空间 4-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的加速度全域性能指标, 并绘制出与之相应的全域性能指标图谱, 为空间-SPS/S 三自由度冗余驱动并联机构的尺寸优化设计提供一定的理论依据。

参考文献:

- [1] ROY J, WHITCOMB L L. Structural Design Optimization and Comparative Analysis of a New High-performance Robot Arm Via Finite Element Analysis [C]. IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1997, 2190-2197.
- [2] 孙立宁, 楚中毅, 曲东升, 等. 2-DOF 平面并联机器人结构参数优化的研究 [J]. 哈尔滨工业大学学报, 2004, 36(3): 277-280.
- [3] 季晔, 刘宏昭, 原大宁, 等. 一种四自由度并联机构的性能指标分析 [J]. 中国机械工程, 2012, 23(3): 258-263.
- [4] 张立杰, 刘颖, 黄真. 平面 2 自由度驱动冗余并联机器人的性能分析 [J]. 机械工程学报, 2006, 42(7): 181-185.
- [5] DOEL K V D, PAI D K. Performance Measures for Robot Manipulators: A Unified Approach [J]. The International Journal of Robotics Research, 1996, 15(1): 92-111.
- [6] 刘欣, 仇原鹰, 盛英. 平面冗余驱动并联机器人的性能分析与尺度综合 [J]. 电子机械工程, 2010, 26(6): 1-5.
- [7] WANG Jinsong, WU Chao, LIU Xinjun. Performance Evaluation of Parallel Manipulators: Motion/force Transmissibility and its Index [J]. Mechanism and Machine Theory, 2010, 45(10): 1462-1476.
- [8] GEORG N. New Performance Indices for 6-dof UPS and 3-dof RPR Parallel Manipulator [J]. Mechanism and Machine Theory, 2009, 44(1): 208-221.
- [9] 周结华, 彭侠夫, 仲训昱. 空间 3 自由度冗余驱动并联机构的运动学分析 [J]. 四川大学学报: 工程科学版, 2012, 44(2): 221-226.
- [10] 郭希娟, 黄真. 并联机器人机构加速度的性能指标分析 [J]. 中国机械工程, 2002, 13(24): 2087-2091.