

滑轮对绳拉力损耗影响的分析研究*

江子扬 冀洋锋 林 麒 王晓光

(厦门大学航空系 福建 厦门 361005)

摘 要 针对滑轮 绳索系统处于平衡和非平衡两种情况,从理论上分析并计算出滑轮两端的绳索拉力,研究滑轮对绳索拉力损耗的影响规律。以绳牵引机器人的动平台做单自由度振荡为例,采用 Matlab 软件计算出动平台在不同振幅、不同振动频率的情况时,牵引动平台运动的绳索在滑轮两端的拉力差值,并分析在滑轮后测量绳索拉力以预测滑轮前绳索拉力的误差程度。文章所做研究为预测滑轮对绳索拉力的影响,以及滑轮后测量绳索拉力带来的误差提供了参考。

关键词 滑轮 测力方法 绳索拉力 绳牵引机构动平台

中图分类号 :TH112.3 文献标识码 :A 文章编号 :1672-4801(2015)02-002-05

滑轮的功能主要是用于改变拉力的方向,也用于传递拉力。滑轮作为绳牵引机器人中不可或缺的关键、工程机械中的重要部件,发挥着不可替代的作用。为了使滑轮机构在运行中准确地按照指令或需求工作,必须掌握绳的拉力变化。

为了方便计算,习惯上通常将滑轮质量忽略不计,认为滑轮两端的绳拉力相等。但是对于工业运用和精密计算,滑轮两端的拉力不能简单地处理成相等。文献[1-2]采用微元法计算出滑轮问题中绳拉力的一般表达式,得到绳的张力并没有直接作用于滑轮上,而是摩擦力矩作用的结论,但是文献中并未给出滑轮处于静平衡状态下滑轮两端绳拉力关系。文献[3]从物理模型的角度分析了绳与有质量的滑轮之间的运动,得到滑轮转动力的影响因素,但是文中并没有对滑轮前后的绳索拉力与滑轮转动的关系进行探讨。

本文针对绳索 滑轮处于不同状态时对滑轮前后绳索拉力的变化进行研究。假设绳索与滑轮之间不打滑,从理论上进行分析,并在滑轮前后的绳索不同部位设置拉力传感器,考察绳索经过滑轮后拉力的损耗情况,

为由经过滑轮后测量得到的绳索拉力推算滑轮前绳索拉力提供参考。

1 过滑轮的绳索拉力测量方法

在绳牵引机器人系统中,为了得知连接动平台的绳索拉力,最直接的方法是在动平台(工作台)与绳索中接入拉力传感器。如图1所示,传感

器安装在动平台和滑轮之间。为表示方便,本文称该部位为“滑轮前”。这种滑轮前测量得到的拉力 T_1 是动平台所受的直接外力。

在很多情况下,动平台与滑轮之间不便接入拉力传感器,而将拉力传感器设置于滑轮的另一端的绳索中,本文将该部位称为“滑轮后”,如图2所示。这种滑轮后传感器测量得到的绳拉力 T_2 与滑轮前测得的绳拉力 T_1 是有所区别的。

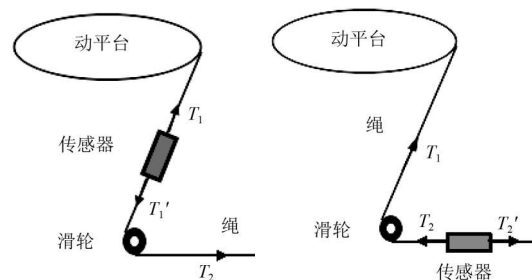


图1 滑轮前绳拉力的测量方式 图2 滑轮后绳拉力的测量方式

对于图1的情况,拉力传感器直接测量得到绳索对动平台的作用力 T_1 。但图2的拉力传感器测得的结果 T_2 并非绳索对动平台的直接作用力 T_1 。通常, T_1 才是人们真正关心的用于进行机构参数计算、对动平台施以控制的绳索拉力,并且对于绳牵引机器人, T_1 是进行力/位混合控制所需的重要参数。因此,当采用滑轮后方式测量绳索拉力时,就有必要了解 T_1 和 T_2 之间的关系。本文将对 T_1 、 T_2 之间的关系进行研究。

2 滑轮两端拉力分析

*国家自然科学基金项目(11472234)

作者简介 江子扬(1990-)男,硕士研究生,研究方向 绳牵引并联机器人在风洞试验中的应用。

冀洋锋(1981-)男,博士研究生,研究方向 绳牵引并联机器人在风洞试验中的应用。

当绳索与滑轮处于平衡状态和非平衡状态时,滑轮两端的绳拉力是不相同的。下面分别对绳索-滑轮处于平衡状态和非平衡状态时滑轮前后绳索的拉力关系进行研究。

2.1 绳索-滑轮处于平衡状态

本文所谓的绳索-滑轮处于平衡状态,指的是绳索与滑轮相对静止,且都处于匀速运动状态。

由滑轮-绳索处于平衡状态可知,滑轮和绳之间不打滑。滑轮与绳索之间的受力如图3所示。对滑轮及与滑轮接触的绳索取一微元小段进行受力分析。

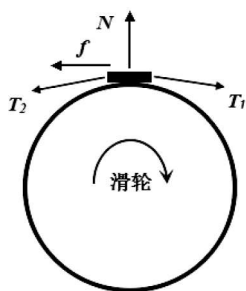


图3 绳索-滑轮处于平衡状态时的受力分析图

滑轮前后绳索受的拉力分别为 T_1 和 T_2 , 滑轮对绳索的法向支持力为 N , 对绳索的切向摩擦力为 f 。

根据牛顿第三定律,滑轮将会受到绳索对其的反作用力,即方向与 N 相反、大小与 N 相等的正压力和方向与 f 相反、大小与 f 相等的切向摩擦力。此外,滑轮还受轴对其的支持力,假设滑轮与轴之间没有轴向和周向的相对运动,滑轮所受的轴向摩擦力和切向摩擦力都可以忽略不计。

已知绳索-滑轮处于平衡状态,滑轮做匀速转动,且两者之间没有相对运动,根据受力平衡的原理,可知滑轮所受切向(即周向)力应为零。由此可判断,绳索对滑轮的摩擦力 $f=0$ 。同理绳子所受滑轮的摩擦力也为零。

显然,当绳索-滑轮处于平衡状态时,滑轮和绳索微元分别应受力平衡。滑轮所受的轴对其的向上支撑力与绳索对其的正压力互相平衡。而绳索受到的 T_1 、 T_2 、 N 3 个力组成一个平衡力系, T_1 、 T_2 在正压力 N 方向上的分量之和应与 N 平衡。显然,为了与 N 平衡,且绳处于匀速运动状态,必须有 $T_1 = T_2$, 即 T_1 、 T_2 在垂直于正压力 N 方向上的分量是平衡的,亦即滑轮两端绳索的拉力相等。由此,在平衡状态下,在滑轮两端接入的拉力传感器所测得的绳索拉力值是相同的。

2.2 绳索-滑轮处于非平衡状态

本文中所谓的绳索-滑轮处于非平衡状态,指的是绳具有加速度、滑轮具有角加速度,但绳索

和滑轮之间仍然没有相对运动的状态。这时绳索和滑轮的受力情况与绳索-滑轮处于平衡状态有很大的不同。分析中忽略绳索的重量。

为了进行受力分析,对绳索和滑轮接触部分分别取微元体。如图4所示,在绕于滑轮的绳索上任取一微元小段 ds 。 ds 相对于滑轮圆心的张角为 $d\theta$ 。设 ds 两端在滑轮前后的所受拉力分别为 T 和 $T+dT$ 。而滑轮对 ds 的支持力为 dN , 绳索对滑轮的摩擦力为 df 。各力的方向如图4所示。

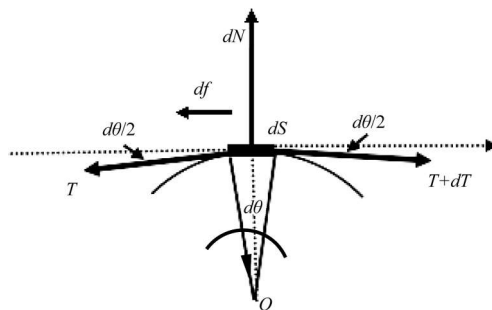


图4 绳索-滑轮处于非平衡状态时的受力分析图

假设滑轮固连与轴,与轴之间不存在轴向和周向摩擦力。由于滑轮具有角加速度,故绳索对滑轮的摩擦力 df 应不为零。

根据牛顿第二定律,所示微元小段绳索 ds 在滑轮切向的受力分量为 $dF_t = a \cdot dm_w$ 。这里 m_w 为绳索的质量。因为忽略绳索重量,故 $dm_w=0$, 于是 $dF_t=0$, 即

$$(T + dT) \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - T \cdot \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) - df = dF_t = 0 \quad (1)$$

由于张角 $d\theta$ 很小,因此 $\cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx 1$, 代入式(1)中,得

$$dT = df \quad (2)$$

下面分析滑轮转动所受的力矩。根据文献[4,5]中的结论,滑轮的转动是由于绳索对其作用的摩擦力带动的结果。因此,摩擦力对滑轮转动作用的力矩为

$$dM = R \cdot df = R \cdot dT \quad (3)$$

其中 R 为滑轮半径。对上式两端进行积分,可得

$$M = R \cdot (T_2 - T_1) \quad (4)$$

当滑轮与绳索之间不存在相对运动时,滑轮边缘线加速度 a_w 就等于绳索加速度 a , 再由文献[6,7]中阐述的刚体转动定律可知

$$M = J \cdot \beta = \frac{1}{2} m R^2 \cdot \frac{a_w}{R} = \frac{1}{2} m a R \quad (5)$$

式中 m 为滑轮质量 a 为绳索微元的线加速度。

合并式(4)、(5)可得:

$$T_2 - T_1 = \frac{1}{2}ma \quad (6)$$

从物理关系可知,在非平衡状态下,绳索经过滑轮,拉力的损耗值为 $\frac{1}{2}ma$ 。

因此,如果采用滑轮后测量方法,只要知道滑轮的质量和绳索的线加速度,就可以通过实测拉力值 T_2 换算出动平台所受的拉力 T_1 。

3 Matlab 算例分析

本文以动平台做俯仰简谐振荡运动为例,采用 Matlab 软件计算仿真滑轮两端绳索的运动与拉力变化。

在动平台做俯仰正弦振荡运动时,绳索的运动可以分解为绳的直线运动和绳的摆动。绳索的摆动变化可以等价于绳索绕滑轮包角的变化。以文献[8]中的动平台为例进行分析,滑轮与绳索等的参数关系见图5。图中所示为机构的第 i 个滑轮,其中 A_i 为滑轮的轴心, B_i 、 C_i 为绳索缠绕滑轮的始末端, P_i 为动平台与绳索连接点。

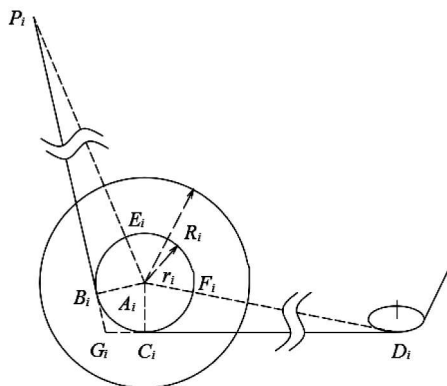


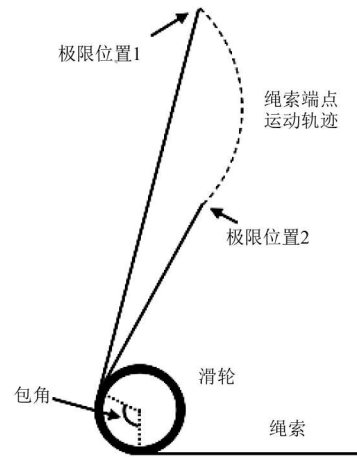
图5 滑轮参数示意图

所谓滑轮包角,指的是绳索与滑轮相接触的部分所对的滑轮的圆心角。在图5中,滑轮包角为 $\theta_{B_i A_i C_i}$,具体表示为

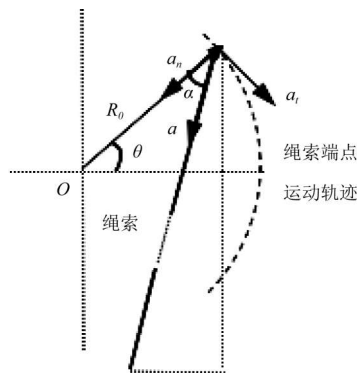
$$\theta_{B_i A_i C_i} = 2\pi - (\theta_{P_i A_i B_i} + \theta_{P_i A_i D_i} + \theta_{C_i A_i D_i}) \quad (7)$$

图6a是文献[8]中与动平台的运动边界对应的系于其一个端点的绳索的两个极限位置的示意图。图6b则给出了对应的系有绳索的动平台端点的运动轨迹。

图6b所示,动平台做俯仰振荡运动的运动方程为 $\theta = A \cdot \sin(2\pi f t)$,其中 θ 为动平台的俯仰角, A 为振幅, f 为振荡频率, R_0 为动平台顶点(这里即系绳端点)到动平台转动中心的距离。因此系绳



(a)绳索极限位置与绳端点轨迹示意图



(b)系绳端点运动轨迹示意图

图6 动平台-绳索运动示意图

端点的运动方程为

$$\omega = 2\pi f \cdot A \cos(2\pi f t) \quad (8)$$

$$\varepsilon = -A \cdot (2\pi f)^2 \cdot \sin(2\pi f t) \quad (9)$$

$$a_t = \varepsilon \cdot R \quad (10)$$

$$a_n = \omega^2 \cdot R \quad (11)$$

$$a = a_t \sin \alpha + a_n \cos \alpha \quad (12)$$

其中:式(8)描述动平台系绳端点角速度 ω 的规律,式(9)是它的角加速度 ε ;式(10)式是它的切向加速度 a_t ;式(11)是它的法向加速度 a_n ;式(12)式是系绳端点的加速度在绳索方向上的投影 a ,也就是绳索的运动加速度。

当系绳端点到转动中心距离为 $R_0 = 160$ mm 时,以动平台的振荡频率为 $f = 2$ Hz、振荡幅值为 $A = 10^\circ$ 为例,在 Matlab 环境下可计算出动平台的姿态角 θ ,系绳端点角速度 ω 、角加速度 ε 和绳索的运动加速度 a 随时间的变化规律。所得的相应各曲线绘制于图7-10中。

本文的绳牵引并联机构所采用的滑轮质量为 $m = 25$ g。仍以动平台的振荡频率 $f = 2$ Hz 为例,

根据式(6)和式(12),可得动平台振荡振幅不同时,滑轮前后牵引绳索的拉力差值 $\Delta T = T_2 - T_1$ 的变化规律。特别地,当滑轮前绳索拉力 T_1 处于20~70 N的范围内,滑轮两端绳索的拉力差值 ΔT 的变化曲线如图11-13所示。

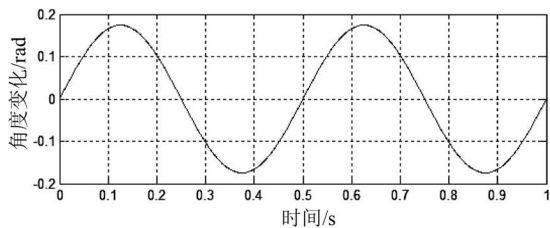


图7 动平台姿态变化规律

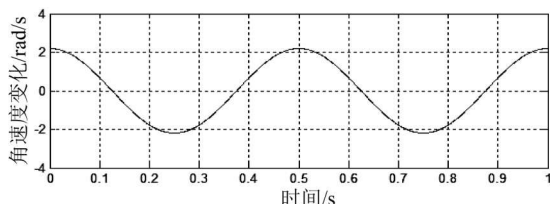


图8 系绳端点角速度 ω 变化规律

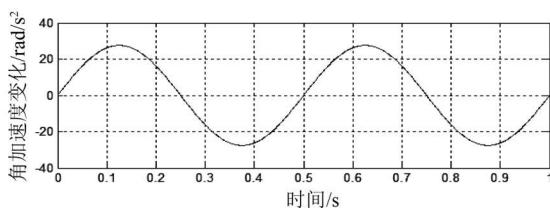


图9 系绳端点角加速度 ε 变化规律

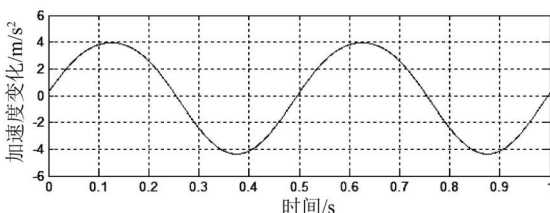


图10 绳索运动加速度 a 变化规律

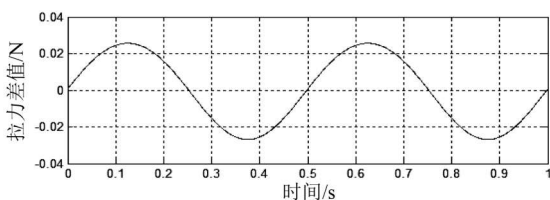


图11 滑轮前后绳索的 $\Delta T(A=5^\circ f=2 \text{ Hz})$

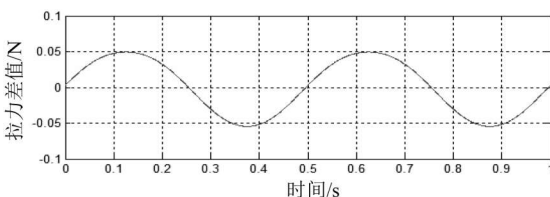


图12 滑轮前后绳索的 $\Delta T(A=10^\circ f=2 \text{ Hz})$

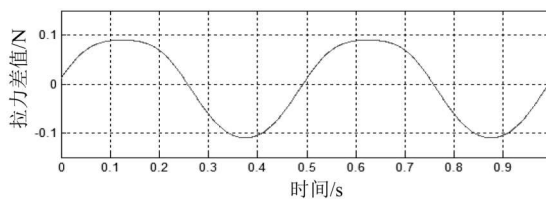


图13 滑轮前后绳索的 $\Delta T(A=20^\circ f=2 \text{ Hz})$

从Matlab仿真数据可以看出,动平台以低频小振幅做振荡运动时,绳索线加速度比较小,并且实验装置中使用的滑轮质量为25 g,属于轻质滑轮,所以滑轮两端绳索的拉力差值 ΔT 不大。当动平台的振幅为 5° 时,滑轮两端绳索的拉力差值 ΔT 的最大值不到0.06 N。当动平台的振幅增大到 20° ,滑轮两端拉力差值最大时也不超过0.1 N。这表明,对于20 N的绳拉力,滑轮后端测得的拉力值的相对误差仅为0.5%。相对于传感器的自身误差,滑轮两端的拉力差几乎可以忽略不计。

但是,对于动平台做大振幅振荡运动,尤其是高频大振幅的运动,由于绳索的线加速度增大,滑轮两端的拉力差别就变得明显起来,如图14、15所示。

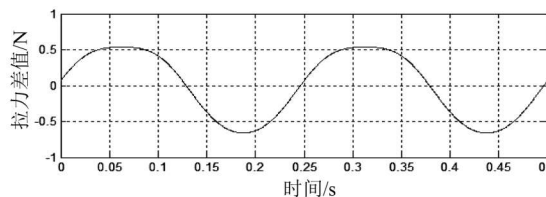


图14 滑轮前后绳索的 $\Delta T(A=30^\circ f=4 \text{ Hz})$

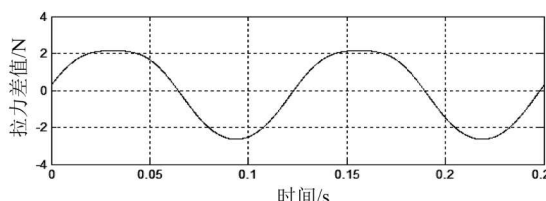


图15 滑轮前后绳索的 $\Delta T(A=30^\circ f=8 \text{ Hz})$

由图14、15可看出,在动平台以振幅 30° ,频率分别为4 Hz和8 Hz做振荡运动的情况下,滑轮前后端的绳索拉力差值最大约为0.7 N和2.5 N。对于20 N的绳拉力,相对误差分别达到3.5%和12.5%。显然,此时如果以滑轮后测得的拉力来作为动平台所受的作用力,误差就太大了。如果以滑轮后的绳索拉力来对机构运动进行控制,将带来极大的影响。

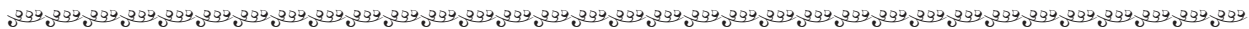
从以上计算结果可知,当动平台的运动状态不同,绳索的运动线加速度也不(下转第11页)

与黑板上下移动相配合的二自由度电动黑板擦除机构,可完成黑板的自清洁功能,封闭空间内擦除粉笔痕迹的形式,可避免教室内粉尘飞扬,保障使用者的安全;黑板后部安装丝杠螺母,电机带动丝杠转动,使黑板具有可上下移动的功能,同时电机

断电后丝杠可实现自锁,可固定黑板高度,能满足不同身高使用者的需求。作品结构简单安全、操作方便,可应用于学校的教室,也可用于会议室等场所,具有较大的市场空间和竞争潜力。

参考文献:

[1] 沈慧勤.黑板与白板比较研究[J].中国教育技术装备,2013(14):62-63.
 [2] 唐孙茹,黄凡.交互式电子白板的研究论文统计与分析[J].广西民族大学学报(自然科学版),2014,20(2):94-97.
 [3] 赵振,刘伟祥.基于单片机的自动水洗环保无尘黑板设计[J].机械工程与自动化,2013(4):80-81.
 [4] 濮良贵,陈国定,吴立言.机械设计[M].北京:高等教育出版社,2013.



(上接第5页)

同,采用滑轮后测力带来的误差也不同。这在实际测量和机构控制时是需要注意的。

4 结束语

本文通过研究滑轮-绳索系统处于平衡和非平衡两种情况,从理论上分析算出滑轮前后绳索拉力的不同。通过 Matlab 计算出不同频率振幅的

姿态运动下滑轮两端拉力差值,得出了在低频小振幅的情况,滑轮两端拉力差值可以忽略不计,高频大振幅运动下需要根据运动关系来解算拉力差值的结论。而对于滑轮与绳索之间出现打滑现象,即滑轮与绳索之间有不同的加速度时,可以通过复杂的摩擦力学进行深入分析。

参考文献:

[1] 蔡厚贵.解析滑轮的转动[J].贵阳学院学报(自然科学版),2011,6(3).
 [2] 卫常德.滑轮转动力矩初探[J].贵州师范大学学报(自然科学版),1997(1).
 [3] 陆兴中.绳与有质量的定滑轮的作用[J].物理通报,2002(9).
 [4] 葛玉俊.浅谈摩擦力[J].现代中小学教育,2007(8).
 [5] 杨毅.滑轮转动中的摩擦力做功问题[J].中国西部科技,2006(35).
 [6] 邹勇,徐斌富,章可钦.关于刚体的基本运动[J].物理与工程,2009(3).
 [7] 宋洪训.关于求解定轴转动刚体的动量矩的说明[J].青岛大学师范学院学报,1998(2).
 [8] 王钊.六自由度绳牵引并联机构的运动控制系统研究与实现[D].厦门:厦门大学,2013.