

稳定化的有限频段 H_∞ 控制及有限频段跟踪问题

付 荣¹, 曾建平²

FU Rong¹, ZENG Jianping²

1.福州海峡职业技术学院,福州 350014

2.厦门大学 自动化系,福建 厦门 361005

1.Fuzhou Strait Vocational & Technological College, Fuzhou 350014, China

2.Department of Automation, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China

FU Rong, ZENG Jianping. Stabilizing H_∞ control in finite frequency ranges and finite frequency tracking problem. Computer Engineering and Applications, 2013, 49(6): 240-244.

Abstract: Dynamic output feedback control via GKYP lemma with small gain specification does not automatically guarantee the stability of the resulting closed-loop systems. Improvements are made to the existing approach to render the asymptotical stability, and the new approach is applied to researching the tracking problem. For the synthesis problem with finite frequency small gain specification via dynamic output feedback control, this paper adds a stability constraint to the design in terms of Linear Matrix Inequality (LMI), without adding any new variables. Furthermore, for the situation that feasible solution can not be found after adding the stability constraint, based on the non-uniqueness of the null space condition, it provides an alternative null space condition to enlarge the feasibility region of this design. Simulation example in tracking problem shows that, although dynamic output feedback control in finite frequency range is conservative, by choosing basis matrix reasonably, the degree of conservatism can be smaller than that of optimal H_∞ control in entire frequency range.

Key words: stability; dynamic output feedback; finite frequency range; Generalized Kalman-Yakubovich-Popov (GKYP) lemma; tracking problem; null space

摘 要: 基于 GKYP 引理的动态输出反馈设计, 未保证设计后闭环系统的稳定性。针对以小增益作为指标的有限频段动态输出反馈问题, 在不增加新变量的前提下, 增加稳定性约束, 使得设计后的闭环系统渐近稳定且满足有限频段性能指标。针对增加约束后难以找到可行解的情况, 基于零空间条件的不唯一性, 补充了另一种零空间条件, 从而扩大了问题的可行域。将改进后的方法应用于有限频段跟踪问题的研究, 通过仿真例子验证, 有限频段动态输出反馈虽然存在保守性, 但在合理选择基矩阵 R 的情况下, 仍然可以使得其保守性小于传统的全频段最优 H_∞ 控制的保守性。

关键词: 稳定性; 动态输出反馈; 有限频段; 广义的卡尔曼-雅可波维奇-波波夫引理 (GKYP); 跟踪问题; 零空间

文献标志码: A **中图分类号:** TP273 **doi:** 10.3778/j.issn.1002-8331.1108-0015

1 引言

Kalman-Yakubovich-Popov (KYP) 引理^[1]被认为是沟通频率域和状态空间的一座桥梁, 它可以将以频率域不等式 (FDIs) 形式描述的设计指标转换成线性矩阵不等式 (LMIs) 形式进行求解, 从而为设计带来极大的便利, 因此 KYP 引理在控制系统综合问题中被广泛采用。同时, 标准 KYP 引理的缺陷也暴露出来, 它不太适合用来解决许多实际的工程问题。标准 KYP 引理针对的是全频段, 因而由 FDIs 体现出来的设计指标也只能是全频段的, 然而工程实际中往

往仅需要针对有限频段进行设计 (例如伺服系统设计时主要考虑中低频段的跟踪性能和稳态精度), 或者对不同的频段使用不同的设计指标进行设计 (例如在混合灵敏度^[2]设计中, 要求低频段具有较小的灵敏度, 高频段具有较小的补灵敏度), 因此标准的 KYP 引理就有些不合适了, 因为这样设计出来的系统并不能凸显有限频率范围的特性, 可能含有较大的保守性。

频率加权函数作为解决上述问题的一种主流方法被提了出来。它基本的设计思想是: 设计一个加权函数 $W(s)$,

基金项目: 航空科学基金 (No.2009ZH68022)。

作者简介: 付荣 (1982—), 男, 助教, 研究领域: 鲁棒控制、智能控制; 曾建平 (1966—), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 研究领域: 鲁棒控制理论、 H_∞ 控制及其应用。 E-mail: furongfj007@163.com

收稿日期: 2011-08-02 **修回日期:** 2011-10-20 **文章编号:** 1002-8331(2013)06-0240-05

CNKI 出版日期: 2011-12-09 <http://www.cnki.net/kcms/detail/11.2127.TP.20111209.1003.077.html>

使用基于全频段的加权传递函数 $W(s)H(s)$ 的 FDI 去逼近基于有限频段的原系统传递函数 $H(s)$ 的 FDI。这里加权函数 $W(s)$ 其实就相当于一个低通、带通或高通的滤波器。加权函数方法被证明是有效的,在实际设计中也得到了广泛的应用,如混合灵敏度问题,频率分离控制^[2],平衡模型降阶中的频率加权方法^[3]等,然而它也有着许多的弊端。首先,频率加权不具有类似数学意义上的紧支撑性质,并不是严格意义上考虑有限频段。其次,由于大部分状态空间理论中,产生的控制器和控制对象是同维的,而随着加权函数复杂程度的提高,控制器的维数也将急剧上升,这为设计的应用带来极大困难。另外,寻求合适的加权函数本身是一个耗时且复杂的过程,尤其是需要在加权函数本身的复杂度和对系统设计指标描述的精确性之间平衡时。

Iwasaki 等人将 KYP 引理推广到有限频段,提出了广义的 KYP(GKYP)引理^[4-5],从而为解决有限频段混合频段问题带来了全新的思路。近年来,GKYP 引理在许多工程设计问题中得到了很好的应用,包括两类问题——结果非保守的和结果保守的。结果非保守的问题包括反馈系统的开环回路成形、数字滤波器设计、结构控制设计整合等,这类问题的共同特点是:设计指标体现在待设计参数上的约束本质上是凸的,因而最终都可以精确地(或非保守地)转化为一组 LMI 的半定规划(semidefinite programming)或凸最优规划问题。很可惜,控制中另一类基本问题——用闭环传递函数 FDI 指标刻画的反馈控制问题,恰恰属于后者。闭环传递函数 FDI 指标添加在待设计参数上的约束是非凸的,因而问题本质上是非凸的,求解变得困难。文献[6]通过增加额外条件和使用投影定理^[7],并通过变量替换^[8],得到了满足闭环传递函数小增益指标的动态输出反馈控制器存在的充分条件。但不同于全频段(全频段使用 KYP 引理解决小增益问题,LMI 本身已确保了设计后闭环系统的渐近稳定性),有限频段小增益指标问题,并未保证设计后闭环系统的稳定性。文献[5]从区域极点配置的角度,增加新的变量和附加条件,通过投影定理,得出了设计后闭环系统稳定的一个充分条件。文献[9]则通过构造两个不同的扰动输入和相应的被调输出,形成两个不同通道,使得其中一个通道满足全频段小增益指标和闭环系统渐近稳定性,另一个通道则满足有限频段小增益指标。

跟踪问题^[2,10-12]作为控制中的一类基本问题,目的是要使得系统输出尽可能地跟踪外部参考信号。跟踪问题通过适当的定义,可以很方便地转化为以跟踪误差和控制输入幅度为优化目标的标准 H_∞ 问题。

本文的目的就是针对闭环小增益指标,对现有的有限频段动态输出反馈方法进行改进,并应用于跟踪问题的研究。在不增加新变量的前提下,增加稳定性约束,同时对增加约束后难以找到可行解的情况,讨论了改变零空间条件后的求解。最后通过跟踪问题仿真例子验证,有限频段动态输出反馈虽然存在保守性,但在合理选择参数的情况下,仍然可以使得其保守性小于传统的全频段最优 H_∞ 控制的保守性。

本文所使用符号的说明: M^T 和 M^* 分别表示矩阵 M 的转置和复共轭转置。对于方阵 M ,记 $He(M) = M + M^*$ 。 H_n 表示 $n \times n$ 的 Hermitian 矩阵的集合。 $\Phi \otimes P$ 表示矩阵 Φ 和 P 的 Kronecker 积。 $\sigma_{\max}(G)$ 代表矩阵 G 的最大奇异值。

2 问题描述

考虑线性时不变对象 $G(s)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ z \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 \\ C_1 & D_{11} & D_{12} \\ C_2 & D_{21} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ w \\ u \end{bmatrix} \quad (1)$$

其中, $x(t) \in R^{n_p}$, $w(t) \in R^{n_w}$, $u(t) \in R^{n_u}$, $z(t) \in R^{n_z}$, $y(t) \in R^{n_y}$ 。 n_c 阶动态输出反馈控制器 $K(s)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_c \\ u \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_c \\ y \end{bmatrix} \quad (2)$$

则从 w 到 z 的闭环传递函数 $H(s)$ 的状态空间实现为:

$$\left[\begin{array}{c|c} A_{cl} & B_{cl} \\ \hline C_{cl} & D_{cl} \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc|c} A + B_2 D_c C_2 & B_2 C_c & B_1 + B_2 D_c D_{21} \\ B_c C_2 & A_c & B_c D_{21} \\ \hline C_1 + D_{12} D_c C_2 & D_{12} C_c & D_{11} + D_{12} D_c D_{21} \end{array} \right] \quad (3)$$

其中,维数 $n := n_p + n_c$ 。

给定 $\Phi, \Psi \in H_2$, 记频率集合 $A(\Phi, \Psi)$ 为:

$$A(\Phi, \Psi) := \left\{ \lambda \in C: \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Phi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix}^* \Psi \begin{bmatrix} \lambda \\ 1 \end{bmatrix} > 0 \right\} \quad (4)$$

其中 λ 为频率变量(连续域内为 s , 离散域内为 z)。

稳定的有限频段 H_∞ 控制的目标是设计动态输出反馈控制器 $K(s)$,使得对于任意的 $s \in A(\Phi, \Psi)$,闭环系统 $H(s)$ 满足:

- (1) $H(s)$ 渐近稳定;
- (2) $\sigma_{\max}(H(s)) < \gamma$ (5)

$$\text{记 } J := \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \in R^{(2n+n_z) \times 2n}, \quad H := \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ B_{cl} & 0 \\ D_{cl} & I \end{bmatrix} \in C^{(2n+n_z) \times (n_w+n_z)},$$

$$L := \begin{bmatrix} -I \\ A_{cl} \\ C_{cl} \end{bmatrix} \in C^{(2n+n_z) \times n}, \quad F = \begin{bmatrix} I & 0 \\ Y & V \end{bmatrix}, \quad \mathcal{F} = \text{diag}(F, F, I), \quad \text{其中}$$

$Y, V \in C^{n_p \times n_p}$, V 可逆。

引理 1^[6] 对于系统(3),给定矩阵 $P, Q \in H_n, \Phi, \Psi \in H_2$, $R \in C^{n \times (2n+n_z)}$,其中 N 是 R 的零空间,以下条件等价:

- (1) 条件(5)成立并且:

$$N^* \left(J(\Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q)J^* + H \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} H^* \right) N < 0$$

- (2) 存在矩阵 $W \in C^{n \times n}$ 使得下式成立:

$$J(\Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q)J^* + H \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} H^* < He(LWR) \quad (6)$$

注 1 通过使用投影引理^[7],引理 1 可由文献[6]的定理 1 (即 GKYP 引理,其中 Π 取 $\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$) 推出,注意到 L 是

$$\begin{bmatrix} A_{cl} & I_n & 0 \\ C_{cl} & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix} \text{的零空间。}$$

条件 1 存在 $R \in C^{n \times (2n+n_z)}$ 满足:

$$N^* \left(J(\Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q)J^* + H \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} H^* \right) N < 0 \quad (7)$$

$$R\bar{F}^* = F^*R \quad (8)$$

文献[6]基于引理1,通过变量替换,给出了满足有限频段小增益指标的动态输出反馈控制器存在的充分条件。

引理2^[6] 对于系统(1),给定矩阵 $\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ 、 $\Psi \in H_2$ 、 $s \in \Lambda(\Phi, \Psi)$,并且假设 R 满足条件1,则以下条件等价:

(1)存在一个结构如(2)所示,阶数 $n_c = n_p$ 的动态输出反馈控制器 $K(s)$ 满足设计指标条件(5)。

(2)存在矩阵 $X, Y, Z, M, G, H, L, \bar{W} = \begin{bmatrix} X & I \\ Z & Y \end{bmatrix}$ 和 $\bar{P}, \bar{Q} \in H_n$ 满足 $\bar{Q} > 0$ 使得下式成立:

$$J(\Phi^T \otimes \bar{P} + \Psi^T \otimes \bar{Q})J^* + \bar{H} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \bar{H}^* < He(\bar{L}R) \quad (9)$$

其中:

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{cl} & \bar{B}_{cl} \\ \bar{C}_{cl} & \bar{D}_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} FA_{cl}WF^* & FB_{cl} \\ C_{cl}WF^* & D_{cl} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} AX+B_2H & A+B_2LC_2 & B_1+B_2LD_{21} \\ M & YA+GC_2 & YB_1+GD_{21} \\ C_1X+D_{12}H & C_1+D_{12}LC_2 & D_{11}+D_{12}LD_{21} \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = FPF^*, \bar{Q} = FQF^*, \bar{H} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{B}_{cl} & 0 \\ \bar{D}_{cl} & I \end{bmatrix}$$

$$\bar{W} = FWF^* = \begin{bmatrix} X & I \\ Z & Y \end{bmatrix}, \bar{L} = \begin{bmatrix} -\bar{W} \\ \bar{A}_{cl} \\ \bar{C}_{cl} \end{bmatrix}$$

不失一般性,假设 $Z-YX$ 非奇异,令 U 和 V 为满足 $VU=Z-YX$ 的任意矩阵,控制器参数 (A_c, B_c, C_c, D_c) 可通过求解下式得到:

$$\begin{bmatrix} M & G \\ H & L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} YAX & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} V & YB_2 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_c & B_c \\ C_c & D_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U & 0 \\ C_2X & I \end{bmatrix} \quad (10)$$

注2 引理2是文献[6]定理2的特殊形式(连续域情形),通过变量替换^[8]引理2可由引理1推出。

3 保证闭环稳定的有限频段 H_∞ 控制

由于引理2并未保证设计后闭环系统稳定,下面考虑在不增加新变量的前提下,增加稳定性约束,使得设计后的闭环系统渐近稳定且满足小增益指标。

定理1 对于系统(1),给定矩阵:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^* & \Psi_{22} \end{bmatrix} \in H_2, s \in \Lambda(\Phi, \Psi)$$

选择 $R \in C^{n \times (2n+n)}$ 满足条件1,当存在矩阵 $X, Y, M, G, H, L, \bar{W} = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = \bar{W}^* = \begin{bmatrix} X^* & I \\ I & Y^* \end{bmatrix} > 0$ 和 $\bar{P}, \bar{Q} \in H_n$ 满足 $\bar{Q} > 0$ 使得下面两式成立:

$$\begin{bmatrix} AX+B_2H+(AX+B_2H)^* & A+B_2LC_2+M^* \\ M+(A+B_2LC_2)^* & YA+GC_2+(YA+GC_2)^* \end{bmatrix} < 0 \quad (11)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}\bar{Q} & \bar{P}+\Psi_{12}\bar{Q} & 0 \\ \bar{P}+\Psi_{12}^*\bar{Q} & \Psi_{22}\bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \\ 0 & \bar{B}_{cl}^* & \bar{D}_{cl}^* \end{bmatrix} - He(\bar{L}R) \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{cl} \\ \bar{D}_{cl} \\ -I \end{bmatrix} < 0 \quad (12)$$

则存在一个结构如(2)所示,阶数 $n_c = n_p$ 的动态输出反馈控制器 $K(s)$ 使得设计后的闭环系统渐近稳定且满足小增益指标 $\sigma_{\max}(H(s)) < \gamma$ 。

不失一般性,假设 $I-YX$ 非奇异,令 U 和 V 为满足 $VU=I-YX$ 的任意矩阵,控制器参数 (A_c, B_c, C_c, D_c) 可通过求解式(10)得到。

证 因为 $\bar{A}_{cl} = \begin{bmatrix} AX+B_2H & A+B_2LC_2 \\ M & YA+GC_2 \end{bmatrix}$,故式(11)等价于 $\bar{A}_{cl} + \bar{A}_{cl}^* < 0$,又因为 $\bar{A}_{cl} = FA_{cl}WF^*$,故对式(11)两边同时左乘 F^{-1} ,再同时右乘 $(F^*)^{-1}$,得到 $A_{cl}W + WA_{cl}^* < 0$ 。又由 $\bar{W} = FWF^* = \bar{W}^* > 0$ 知, $W = W^* > 0$ 。由Lyapunov稳定性判据,知闭环系统(3)是渐近稳定的。

将引理2的式(9)展开得:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^T \otimes \bar{P} + \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^* & \Psi_{22} \end{bmatrix} \otimes \bar{Q} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \bar{B}_{cl} & 0 \\ \bar{D}_{cl} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \\ 0 & 0 \end{bmatrix} < He(\bar{L}R)$$

即

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}\bar{Q} & \bar{P}+\Psi_{12}\bar{Q} & 0 \\ \bar{P}+\Psi_{12}^*\bar{Q} & \Psi_{22}\bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{cl} \\ \bar{D}_{cl} \end{bmatrix} I \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{cl} \\ \bar{D}_{cl} \end{bmatrix}^* < He(\bar{L}R) \quad (13)$$

由Schur补引理,式(13)等价于式(12)。又由引理2,式(12)成立则设计指标(5)被满足。

证毕。

考虑到在使用投影定理从文献[6]的定理1到引理1的转化过程中, $\begin{bmatrix} A_{cl} & I_n & 0 \\ C_{cl} & 0 & I_n \end{bmatrix}$ 的零空间的不惟一性,可以得到定理2。

定理2 对于系统(1),给定矩阵:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \Psi = \begin{bmatrix} \Psi_{11} & \Psi_{12} \\ \Psi_{12}^* & \Psi_{22} \end{bmatrix} \in H_2, s \in \Lambda(\Phi, \Psi)$$

选择 $R \in C^{n \times (2n+n)}$ 满足条件1,当存在矩阵 $X, Y, M, G, H, L, \bar{W} = \begin{bmatrix} X & I \\ I & Y \end{bmatrix} = \bar{W}^* = \begin{bmatrix} X^* & I \\ I & Y^* \end{bmatrix} > 0$ 和 $\bar{P}, \bar{Q} \in H_n$ 满足 $\bar{Q} > 0$ 使得下面两式成立:

$$\begin{bmatrix} AX+B_2H+(AX+B_2H)^* & A+B_2LC_2+M^* \\ M+(A+B_2LC_2)^* & YA+GC_2+(YA+GC_2)^* \end{bmatrix} < 0 \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} \Psi_{11}\bar{Q} & \bar{P}+\Psi_{12}\bar{Q} & 0 \\ \bar{P}+\Psi_{12}^*\bar{Q} & \Psi_{22}\bar{Q} & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma^2 I \\ 0 & \bar{B}_{cl}^* & \bar{D}_{cl}^* \end{bmatrix} - He(\bar{L}R) \begin{bmatrix} 0 \\ \bar{B}_{cl} \\ \bar{D}_{cl} \\ -I \end{bmatrix} < 0 \quad (15)$$

其中, $\bar{L}' = \begin{bmatrix} \bar{W} \\ -\bar{A}_{cl} \\ -\bar{C}_{cl} \end{bmatrix}$ 。

则存在一个结构如(2)所示,阶数 $n_c = n_p$ 的动态输出反馈控制器 $K(s)$ 使得设计后的闭环系统渐近稳定且满足小增益指标 $\sigma_{\max}(H(s)) < \gamma$ 。

不失一般性,假设 $I - YX$ 非奇异,令 U 和 V 为满足 $VU = I - YX$ 的任意矩阵,控制器参数 (A_c, B_c, C_c, D_c) 可通过求解式(10)得到。

证 定理2与定理1的区别仅在于零空间条件的不同。

如注1,注意到 $L' = \begin{bmatrix} I \\ -A_{cl} \\ -C_{cl} \end{bmatrix}$ 也是 $\begin{bmatrix} A_{cl} & I_n & 0 \\ C_{cl} & 0 & I_{n_z} \end{bmatrix}$ 的零空

间,用 $L' = \begin{bmatrix} I \\ -A_{cl} \\ -C_{cl} \end{bmatrix}$ 去替换 $L = \begin{bmatrix} -I \\ A_{cl} \\ C_{cl} \end{bmatrix}$,应用投影定理,式(6)

变为:

$$J(\Phi^T \otimes P + \Psi^T \otimes Q)J^* + H \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} H^* < He(L'WR)$$

通过变量替换,式(9)相应变为:

$$(s - 1.778)(s + 1.429)(s + 311.7)(s - 143)(s - 43.14)(s + 33.62)(s^2 + 1.471s + 1.014)(s^2 + 14s + 100) = 0$$

$$J(\Phi^T \otimes \bar{P} + \Psi^T \otimes \bar{Q})J^* + \bar{H} \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix} \bar{H}^* < He(\bar{L}'R)$$

同定理1,将上式展开并应用Schur补引理,可得式(12)。

证毕。

4 仿真算例

下面以导弹指令跟踪系统^[11]的例子进行说明。

针对某导弹选取 $t = 32.8$ s 时的特征点参数,则标称对象传递函数模型^[11]:

$$P(s) = \frac{0.910(1.634s + 1)}{s(0.033856s^2 + 0.033488s + 1)}$$

系统性能指标:在整个空域内实现比例导引,稳态增益保持1.0不变,且保持系统稳态误差 $e_{ss} < 5\%$,阶跃信号作用下的超调量 $\sigma\% < 5\%$,调节时间 $t_s < 1.0$ s,由此,可选择参考跟踪模型为:

$$G_m(s) = \frac{100}{s^2 + 14s + 100}$$

取跟踪问题加权控制能量项 ρu ^[2,13] 的加权因子 $\rho = 0.000015$,该跟踪问题可转化为标准 H_∞ 控制问题,被控对象如下:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -14 & -100 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \\ z &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 & 0.000015 \end{bmatrix} u \\ y &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} w + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} u \end{aligned}$$

本例中,矩阵 R 取成文[6]建议的结构:

$$R = \begin{bmatrix} aI & 0 & bI & 0 & \Gamma \\ 0 & aI & 0 & bI & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{2n_p \times (4n_p + n_z)}$$

其中, $a, b \in \mathbb{C}$, $\Gamma \in \mathbb{C}^{n_p \times n_z}$ 。这里统一取:

$$a = 0.001, b = 0.037, \Gamma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0018 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0015 \end{bmatrix}^T$$

取 $\gamma = 0.38$,在连续域内的低频段 $|\omega| \leq 10$ rad/s (即取

$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\Psi = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$) 进行设计。下面是分别使用引理2,定理1,定理2进行设计的结果。

(1)由引理2,得到控制器的参数分别为:

$$A_c = 10^{12} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0204 & -1.8671 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0008 & -0.0734 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.0001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = 10^{13} \times \begin{bmatrix} -6.1598 & 0.7080 \\ -0.2421 & 0.0278 \\ -0.0004 & 0.0001 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = 10^3 \times [0 \quad 0 \quad 0.0001 \quad 0.0514 \quad -4.7166]$$

$$D_c = 10^5 \times [-1.5561 \quad 0.1789]$$

易知,构成的闭环系统特征方程为:

即存在右半复平面极点,因而不稳定的。

(2)由定理1,无法得到可行解。

(3)由定理2,得到控制器参数分别为:

$$A_c = 10^{14} \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 2.2300 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0508 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0056 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_c = 10^{13} \times \begin{bmatrix} -6.5130 & -0.6768 \\ -0.1483 & -0.0154 \\ -0.0165 & -0.0018 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_c = 10^5 \times [0 \quad 0 \quad 0 \quad 0.0001 \quad -5.9311]$$

$$D_c = 10^5 \times [1.7323 \quad 0.1800]$$

构成的闭环系统的阶跃响应曲线如图1实线所示,另外,为了研究本文方法的保守性,同时也给出了按照文献[14]方法,使用LMI工具箱的hinflmi求解器得出的全频段输出

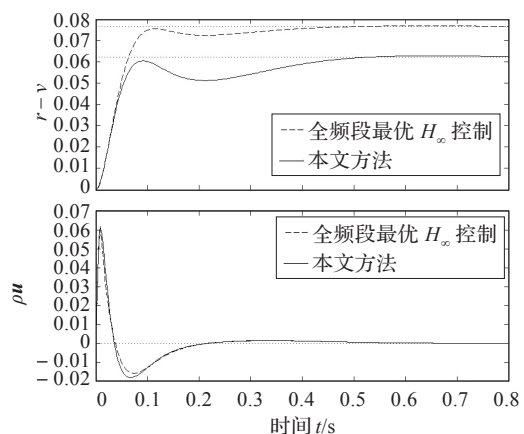


图1 阶跃响应曲线

反馈最优 H_∞ 控制的结果, 如图中虚线所示。输出 1 代表 $z = \begin{bmatrix} r-v \\ \rho u \end{bmatrix}$ 中的跟踪误差 $(r-v)$, 输出 2 为加权控制能量项 ρu 。很显然, 从 ρu 看, 两条曲线几乎重叠了, 而从 $(r-v)$ 看, 定理 2 方法的跟踪误差较小。这说明在同样的能量消耗下, 按照本文方法设计的系统比全频段最优 H_∞ 控制设计的系统具有更好的跟踪性能(更小的跟踪误差)。

引理 2 仅仅考虑有限频段内的小增益, 自然无法确保设计后闭环系统的稳定性。定理 1 和定理 2 在引理 2 的基础上添加了稳定性约束, 确保设计后系统渐近稳定且满足小增益指标。定理 1 和定理 2 的零空间条件不同, 导致解的空间也不相同, 从而产生了本例中有可行解和无可行解的区别, 从这个意义上说, 补充的零空间条件扩大了问题的可行域。另外, 要注意到, 本文中的稳定性约束是与频段无关的, 因而确保的是全频段的渐近稳定。

5 结论

有限频段指标的提出, 相对于传统全频段指标, 减少设计上的保守性。本文通过增加稳定性约束, 对已有的有限频段动态输出反馈设计方法进行了改进, 同时针对增加约束后难以找到可行解的情况, 基于零空间条件的不惟一性, 补充了另一种零空间条件。自有限频段动态输出反馈方法提出以来, 其保守性一直是大家感兴趣的话题, 从本文对跟踪问题的研究可以看到, 虽然有限频段动态输出反馈本身存在保守性, 但通过合理选择参数, 仍然可以使得其保守性小于全频段最优 H_∞ 控制的保守性。可以预见, 有限频段设计方法所具有的优越性将在多指标多频段综合问题中得到更多的体现。

参考文献:

- [1] Rantzer A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma[J]. System and Control Letters, 1996, 28(1): 7-10.
- [2] 吴敏, 桂卫华, 何勇. 现代鲁棒控制[M]. 2版. 长沙: 中南大学出版社, 2006: 66-72, 343-346.

- [3] Zhou K, Doyle J, Glover K. Robust and optimal control[M]. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1996.
- [4] Iwasaki T, Hara S. Generalized KYP lemma: unified frequency domain inequalities with design applications[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 2005, 50(1): 41-59.
- [5] Iwasaki T, Hara S. Feedback control synthesis of multiple frequency domain specifications via generalized KYP lemma[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2007, 17: 415-434.
- [6] Iwasaki T, Hara S. Dynamic output feedback synthesis with general frequency domain specifications[C]/Proceedings of the 16th IFAC World Congress. Prague, Czechoslovakia: Elsevier, 2005.
- [7] Iwasaki T, Skelton R E. All controllers for the general H_∞ control problem: LMI existence conditions and state space formulas[J]. Automatica, 1994, 30(8): 1307-1317.
- [8] de Oliveira M C, Geromel J C, Bernussou J. Extended H_2 and H_∞ and characterizations and controller parametrizations for discrete-time systems[J]. Int J Contr, 2002, 75(9): 666-679.
- [9] Zhang Xiaoni, Yang Guanghong. Dynamic output feedback control synthesis with mixed frequency small gain specifications[J]. Acta Automatica Sinica, 2008, 34(5): 551-557.
- [10] Shaked U, de Souza C E. Continuous-time tracking problems in an H_∞ setting: a game theory approach[J]. IEEE Trans on Automatic Control, 1995, 40(5): 841-852.
- [11] 杨常伟, 安锦文. 参考模型前馈 2-DOF 指令跟踪 H_∞ 控制器设计研究[J]. 火箭与制导学报, 2008, 28(3): 15-18.
- [12] 冯纯伯, 田玉平, 忻欣. 鲁棒控制系统设计[M]. 南京: 东南大学出版社, 1995: 151-180.
- [13] 褚健, 俞立, 苏宏业. 鲁棒控制理论及应用[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 2000: 48-70.
- [14] 俞立. 鲁棒控制-线性矩阵不等式处理方法[M]. 北京: 清华大学出版社, 2002: 41-67.

(上接 216 页)

参考文献:

- [1] 陈宗胜. 中国居民收入分配差别的深入研究[J]. 经济研究, 2000(7): 68-72.
- [2] 钞小静, 任保平. 中国经济增长质量的时序变化与地区差异分析[J]. 经济研究, 2011(4): 26-40.
- [3] Gyemin L, Gwang I K. Degree and wealth networks with local redistribution[J]. Physica A, 2007, 383: 677-686.
- [4] Simggon K, Gwang I K, Gyemin L. Wealth network with local redistribution[J]. Physica A, 2008, 387: 4973-4981.

- [5] Albert R, Barabasi A L. Statistical mechanics of complex networks[J]. Review of Modern Physics, 2002, 74: 47-91.
- [6] Erdos P, Renyi A. On the evolution of random graphs[J]. Publ Math Inst Hung Acad Sci, 1960, 5: 17-60.
- [7] Watts D J, Strogatz S H. Collective dynamics of 'small-world' networks[J]. Nature, 1998, 393(6684): 440-442.
- [8] Barabasi A L, Albert R. Emergence of scaling in random networks[J]. Science, 1999, 286(5439): 509-512.
- [9] 王海港. 我国居民收入分配的格局—帕雷托分布方法[J]. 南方经济, 2006(5): 73-82.