

# 一种提高 SVD 滤波性能的新方法

杨敦旭<sup>1</sup> 杜晓凤<sup>2</sup> 李翠华<sup>1</sup>

YANG Dun-xu<sup>1</sup>, DU Xiao-feng<sup>2</sup>, LI Cui-hua<sup>1</sup>

1.厦门大学 计算机科学系,福建 厦门 361005

2.厦门大学 自动化系,福建 厦门 361005

1.Department of Computer Science, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China

2.Department of Automation, Xiamen University, Xiamen, Fujian 361005, China

E-mail: yangdunxu@gmail.com

**YANG Dun-xu, DU Xiao-feng, LI Cui-hua. Novel approach to SVD-based image filtering improvement. Computer Engineering and Applications 2010 46(9): 146-148.**

**Abstract:** A novel approach to improve the filtering efficiency of a noisy image is proposed. Image filtering based on SVD favors the denoising in the line (horizontal) and column (vertical) direction. Based on this property, the new denoising method adapts shape and size of block to local orientation before performing SVD filtering. Through over-complete representation in overlap regions, the proposed method performs well in denoising and preserving image details.

**Key words:** Singular Value Decomposition (SVD); image denoising; orientation detection; adaptive filtering

**摘要:** 提出一种提高 SVD 滤波性能的新方法。基于奇异值分解滤波可以有效地分析水平(垂直)方向的图像特性。根据图像的局部方向,自适应地调整待滤波区域的形状,使重采样后局部区域中的边缘垂直或水平,再对局部区域进行奇异值分解滤波,所得的结果加权平均,得到信号估计值。将这一算法应用于图像去噪,实验结果表明,新方法可以有效地提高 SVD 的滤波性能。

**关键词:** 奇异值分解; 图像去噪; 方向检测; 自适应滤波

**DOI:** 10.3778/j.issn.1002-8331.2010.09.041 **文章编号:** 1002-8331(2010)09-0146-03 **文献标识码:** A **中图分类号:** TP391.41

## 1 前言

图像去噪是图像处理的一个重要研究领域,国内外学者在此领域已经进行了广泛的研究。传统的图像去噪方法包括均值滤波器、wiener 滤波器等,这类方法在滤除噪声的同时,往往破坏图像的边缘等细节<sup>[1]</sup>。为了保护图像中的边缘和纹理信息,非线性的算法日益受到重视。

奇异值分解(Singular Value Decomposition),是一种有效的代数特征提取方法。图像矩阵的奇异值及其特征空间反映了图像中的不同成分和特征。人们一般先从统计上,利用设定阈值来确定一些较大的奇异值,然后通过这些奇异值和其对应的特征向量来估计信号真实值。Konstantinides<sup>[2]</sup>等,提出了基于分块图像的 SVD 滤波。针对阈值的选取,文献[3]将图像分解到小波域,在细节子带进行分块 SVD 滤波,对其中有边缘的区域,阈值设置较小,以保护边缘信息,对平坦区域阈值较大,以去除噪声。文献[4]将图像离散余弦变换后分解到各频带,然后对不同的频带采用不同的阈值进行奇异值分解滤波。

可以看到,上述算法试图利用图像的空域或频域特征,选取

不同的阈值来保护边缘等细节信号。SVD 这类算法对于二维可分的几何特征,可以得到较优的表示,但算法本身不能很好地分析图像中出现的复杂几何信息(如斜边、角点等),不能充分利用数据本身特有的几何特征,并不是最优的或者说“最稀疏”的函数表示方法。但由于奇异值分解滤波可以有效地分析水平(垂直)方向的图像,可以利用这一特性,将图像的局部区域的斜线变换成垂直或者水平方向上的直线,再在此基础上进行奇异值分解滤波,以提高滤波性能。另外,传统的奇异值分解滤波算法,是基于图像块对图像进行处理,滤波后的图像中块效应比较严重。在文献[5]中,Coifman 指出利用图像的过完备表示(over-complete representation),可以有效地抑制这一现象。对图像中重叠区域的过完备表示,采用加权平均法,进一步提升了 SVD 的性能。

## 2 图像奇异值分解

灰度图像的每个像素的灰度值在 0~255 之间,从线性代数角度看,任意一幅数字图像所有像素的灰度值都可以组成一个

基金项目:国家重点基础研究发展规划(973)(the National Grand Fundamental Research 973 Program of China under Grant No.2007CB311005);福建省自然科学基金计划资助项目(Natural Science Foundation of Fujian Province of China under Grant No.A0710020) 厦门大学 985 二期信息创新平台项目(the 985 Innovation Project on Information Technique of Xiamen University No.2004-2008)。

作者简介:杨敦旭(1985-),男,硕士研究生,主要研究领域为视频与图像处理;杜晓凤(1975-),女,博士研究生,主要研究领域为视频与图像处理,

© 1994-目标识别;李翠华(1960-),男,教授,博士生导师,主要研究领域为视频与图像处理,计算机视觉。http://www.cnki.net

收稿日期:2009-07-14 修回日期:2010-01-13

$M \times N$  大小的实矩阵  $X$ , 当图像受噪声  $E$  污染时, 图像矩阵可表示为:

$$A = X + E \quad (1)$$

$$A = USV^T = \sum_{i=1}^R \lambda_i A_i \quad (2)$$

其中高斯噪声模型为  $E = N(0, \sigma^2)$   $U$  和  $V$  分别为  $M \times M$  及  $N \times N$  大小的正交矩阵  $S = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_R, \lambda_{R+1}, \dots, \lambda_N)$  为非负对角矩阵, 其对角元素  $\lambda_i$  即为矩阵  $A$  的奇异值, 且满足  $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_R > 0$   $R$  为  $S$  的秩. 矩阵  $A_i$  指的是第  $i$  个奇异值重构出的图像. 图像奇异值分解后, 大部分能量集中在由前几个奇异值重构出来的图像中, 而噪声则大部分分布于奇异值较小的特征矩阵中. 通过选取合适的阈值  $Th$ , 去除噪声后的图像为:

$$\hat{X} = \sum_{y=1}^{R'} U_y S_y V_y^T = \sum_{y=1}^{R'} \lambda_y Y_y \quad \lambda_y \geq Th \quad (3)$$

文献[6]分析了矩阵 SVD 与同步行列向量 PCA 之间的关系.  $U$  在奇异值分解后得到的  $U$  为  $AA^T$  的特征矢量 ( $V$  为  $A^T A$  的特征矢量), 即  $AA^T$  的列向量集的主成分矢量 ( $A^T A$  的行向量集的主成分矢量). 这样, 就建立了图像奇异值分解与主成分之间的关系, 即矩阵的奇异值分解等价于行列向量同步主成分分析. 如果图像中仅有水平 (垂直) 线, 奇异值分解后的图像信号能量基本集中在一个奇异值及其对应的特征向量上. 反之, 如果图像中的边缘是非水平 (非垂直) 的, 奇异值分解后, 图像信号能量散布在多个奇异值及对应的特征向量上.

### 3 算法描述

利用矩阵的奇异值分解等价于行列向量同步主成分分析的这一特点, 通过改变当前待处理块的区域, 使进行奇异值分解滤波的块中主要方向平行于水平 (垂直), 可以用更少的系数来表示真实信号, 而重构信号所用的系数越少, 噪声带来的影响也就越小, 从而滤波后的图像质量也就越好. 一个比较简单的方法是按每一角度旋转图像, 再对每一次旋转后的图像进行滤波, 并把结果平均值作为最终的去噪结果<sup>[6]</sup>. 但是旋转图像这一过程本身会造成图像精度损失, 影响滤波的结果. 设计一种基于方向检测的算法来提高 SVD 滤波性能. 定义当前要处理的块为  $A_i$ , 要进行奇异值分解滤波的图像块为  $C_i$ . 在进行 SVD 滤波前, 首先用方向检测算法得到待处理块的主要方向, 按这一方向, 扩大采样的区域, 使得待滤波的区域变为一个包含  $A_i$  的区域  $C_i$ , 如图 1 所示.  $C_i$  是一个包含  $A_i$  的平行四边形, 按  $A_i$  中的主方向重采样后, 就可以得到方向为垂直的图像块 (图 1(c)).

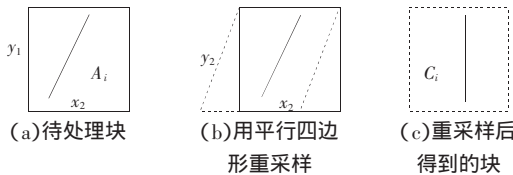


图 1  $A_i$  变形到  $C_i$  并重采样

#### 3.1 图像方向检测

利用 X.Feng 在文献[7]中提出的方向检测算法. 算法如下: 将每块图像  $A_i$  的梯度值 ( $g_x, g_y$ ) 组成  $N \times 2$  的梯度矩阵  $G_i$ , 对  $G_i$  进行截断奇异值分解 (Truncated SVD),  $G_i = USV^T$ ,  $S$  为  $2 \times 2$  矩阵, 代表了方向的能量分布, 定义:

$$\begin{bmatrix} s_{i1} & 0 \\ 0 & s_{i2} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\lambda_i = \frac{s_{i1} - s_{i2}}{s_{i1} + s_{i2}} \quad (5)$$

$$\gamma_i = \frac{\sqrt{s_{i1}s_{i2}}}{N} \quad (6)$$

(1) 若  $s_{i1} \approx s_{i2} \approx 0$ ,  $\gamma_i$  接近于 0,  $A_i$  较平滑也就是说  $C_i = A_i$ , 阈值设为  $T_{smooth}$ .

(2) 若  $s_{i1} \gg s_{i2}$ ,  $\lambda_i$  接近于 1,  $A_i$  中有明显的边,  $V$  的第二列  $V_{i2} = [v_{i1}, v_{i2}]^T$ , 就可以得到图像块中的主要方向:

$$\alpha_i = \arctg\left(\frac{v_{i1}}{v_{i2}}\right) \quad (7)$$

这时, 进行奇异值分解的区域块为  $C_i$ ,  $C_i$  包含  $A_i$ , 且在其重采样后的矩阵中, 主方向为垂直, 这时阈值设为  $T_{smooth}$ .

(3) 若  $s_{i1}$  和  $s_{i2}$  同时较大,  $\gamma_i$  也会较大, 这说明图像块中有高频信号或者存在多个方向的边缘, 这种情况下, 设定  $C_i = A_i$ , 但考虑到 SVD 后的能量分布比较散, 阈值设定将小于  $T_{smooth}$ :

$$T_{ij} = \beta T_{smooth} \quad (8)$$

其中  $\beta < 1$ .

#### 3.2 采样区域变形

假设图像块中主要方向与垂直方向的夹角为  $\alpha_i$  ( $0^\circ \leq \alpha_i \leq 45^\circ$ ), 将区域  $A_i$  变形为夹角为  $90^\circ - \alpha_i$ , 包含  $A_i$  的外接平行四边形区域  $C_i$ . 对于方向角度  $\alpha_i$  ( $45^\circ < \alpha_i \leq 90^\circ$ ) 的图像块, 可以求其转置矩阵, 再进行相同处理. 对变形后的图像区域按行 (列) 采样, 得到要进行奇异值分解滤波的矩阵. 在重采样后的矩阵中, 图像边缘呈水平或垂直. 区域变形仅需平移采样点的起始位置: 每行的起点向左移动  $(i-1) \times \text{tg}\alpha_i$  个像素, 在离散空间中, 平移量为  $\lfloor (i-1) \times \text{tg}\alpha_i \rfloor$  ( $\lfloor \cdot \rfloor$  为取整运算符, 因为在离散空间坐标均为整数, 因而必须取整). 图 2 中是主方向为  $45^\circ$  的图像块, 按上述步骤变形后得到局部方向垂直的矩阵.

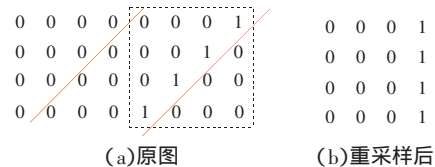


图 2 重采样

#### 3.3 图像过完备表示

图像滤波时用固定大小的窗口按间隔在图像上滑动, 窗口的滑动使得块与块之间形成重叠部分, 滑动的间隔决定了重叠区域的大小. 同时 3.2 节中的区域变形也会造成重叠部分. 这此重叠区域会被估算多次, 它们的滤波结果可以用每次独立滤波结果的加权平均来表示. 设重叠区域为  $B_j$ , 有  $K$  个包含  $B_j$  的块  $C_i$ , 设定的阈值  $Th$ , 则保留下来的奇异值  $\lambda_i > Th$  的个数为  $Count_i$ , 信号估计值为  $\hat{X}_i$ . 则  $B_j$  的滤波结果最终为:

$$\hat{X}_{B_j} = \frac{\sum_{i=1}^K \frac{1}{Count_i} \hat{X}_i}{\sum_{i=1}^K \frac{1}{Count_i}} \quad (9)$$

其中  $B_j \subset C_i$ .

窗口在图像中滑动时, 在接近包含复杂几何形状的周边区域, 一般来说, 总会有一些区域的图像几何结构二维可分, 这部分图像在滤波后结果较好. 利用这些部分的滤波结果的加权组

合来表示图像的重叠部分,就可以提高滤波的性能。在图 3(a)中包含一个三角形。图 3(b)与图 3(d)的滤波窗口中仅包含“线”,利用 3.2 节中的算法,可以较好地恢复图像,而当滤波窗口中包含三角形的顶点(图 3(c))时,SVD 无法得到稀疏系数,也就无法很好地滤波。但图 3(c)中的滤波窗口部分与图 3(b)、图 3(d)重叠,就可以利用式(9),得到重叠部分的加权均值。

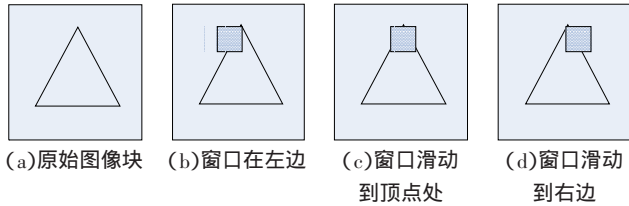


图 3 图像过完备表示

### 3.4 算法流程

步骤 1 定义  $a*a$  大小的窗口,以  $t$  为间隔滑动,将图像分解为相互重叠的块。

步骤 2 对每一块  $A_i$ ,按式和式中方法求出  $\lambda_i$  和  $\gamma_i$ 。

步骤 3 若  $\lambda_i \geq 0.9$ ,则  $A_i$  中有明显方向,转步骤 4,否则转步骤 5。

步骤 4 计算  $A_i$  方向,按 3.2 节中所述变形,并设阈值为  $Th = T_{smooth}$ ,然后转步骤 7。

步骤 5 若  $\gamma_i < 50$ , $A_i$  较平滑,设  $C_i = A_i$ ,阈值设为  $Th = T_{smooth}$ ,转步骤 7,否则转步骤 6。

步骤 6  $A_i$  含有高频信号, $C_i = A_i$  并设阈值为  $Th = \beta T_{smooth}$ , $\beta = 1/4$ ,转步骤 7。

步骤 7 对  $C_i$  进行 SVD 滤波,记录系数大于  $Th$  的个数  $count_i$ ,并按式得到信号估计值  $S_i$ 。

步骤 8 对于块  $C_i$  之间重叠部分  $B_j$  在不同位置被估算多次,将数次计算结果的加权平均值作为最终滤波后的值  $S_{B_j}$ 。

### 4 实验及分析

采用 ISNR 和 PSNR 方法评估去噪后的图像质量。计算方法如下:

$$ISNR = 20 \lg \frac{\|f_b - f\|_2}{\|f_a - f\|_2} \quad (10)$$

$$PSNR = 10 \lg \frac{255^2}{\|f_a - f\|_2^2} \quad (11)$$

其中  $f, f_a$  分别为原始信号,去噪后的图像信号  $m, n$  分别为图像的长和宽。实验中的图像大小为  $512 \times 512$ 。块设大小为  $16 \times 16$ ,  $T_{smooth} = 160$ 。

表 1 中为该算法与其他基于 SVD 滤波的算法的比较,其中  $\sigma = 20$ ,块与块之间没有重叠。从表 1 中可以看到,在块之间没有重叠区域时,也就是没有采用过完备表示的情况下,比原始 SVD 滤波性能有了一定程度的提高。尤其是对 Barbara 的图像,提高效果最为明显,这是因为,在 Barbara 图中,存在大量的有明显方向的条纹,将这些条纹垂直(水平)化后,再进行 SVD,有效地提高了滤波性能。在对 Boat 的滤波上,效果相对

表 1 与基于 SVD 滤波算法的 ISNR( $\sigma=20$ )对比表

	BSVD <sup>[3]</sup>	Bayes Shrink <sup>[3]</sup>	WASVD <sup>[3]</sup>	该文方法
Barb	2.57	2.97	4.33	5.06
Boat	2.94	4.16	4.59	4.57
Lena	3.66	5.54	5.80	6.39
Pepper	3.21	4.79	4.99	5.01

较差,这是因为在 Boat 图中天空部分的边缘呈衍射状,没有明显的边缘,而在海浪部分,图像几何结构比较复杂,这样,也就无法估计出准确的方向,导致最后滤波结果不好。

表 2 为该算法与 BLS-GSM<sup>[8]</sup>等的比较,重叠的间隔设为 6,对比数据分别来自各参考文献。由对比数据可以看到,该文算法接近这些经典的艺术级的(state-of-art)算法。图 4 是该文方法对 Lena、Boat 和 Barbara 的滤波结果。

表 2 与其他算法的 PSNR( $\sigma=20$ )对比表

	BLS-GSM <sup>[8]</sup>	NL-Means <sup>[9]</sup>	SA-DCT <sup>[10]</sup>	该文方法
Barb	30.32	29.38	30.00	30.22
Boat	30.38	28.60	30.19	30.33
Lena	32.66	32.64	32.62	32.40
Pepper	32.08	29.05	31.04	32.24



图 4  $\sigma=20$  时的结果图

### 5 结论

提出了一种提高 SVD 滤波性能的新方法,并应用于图像去噪。去噪实验结果表明,提高了传统 SVD 算法的性能,在与经典去噪算法的比较中,也有很好的表现。这种方法不仅适用于 SVD,而且可以与其他分解算法相结合,比如 DCT。这里的方向检测算法是开放的,也可以选用其他更具鲁棒性,更为精确的算法。近些年,脊波变换、Curvelet 变换和 Contourlet 等非自适应的图像多尺度几何表示方法发展非常迅速,这类算法并不需要先验地知道图像本身的几何特征,而是直接可以表示图像中的奇异几何特征。但这些算法是以增加计算复杂度或冗余度为代价的,实现也比较困难。给出提高的奇异值分解滤波性能的方法,通过快速地改变图像的采样区域,使得待分解的矩阵适应于 SVD 滤波,计算复杂度相对较低。

在自然图像中,图像的边缘方向往往非常复杂,衍射效应使得图像中物体的边缘可能并不明显地表现出灰度的突变,而灰度的变化有时是由于纹理造成,方向检测算法有时无法准确地检测图像的方向,在这种情况下,滤波的性能依然可以通过对图像的过完备表示来提升。

### 参考文献:

[1] Rafael C. G. Digital image processing[M]. Qiuqi R. 2nd ed. Beijing: Publishing House of Electronics Industry, 2003: 175-204.



分割后的图片,从图中可以看出在分割目标的模糊边缘处均出现了不完全分割问题。右侧为使用该文提出的分割方法进行分割后的图片,由于结合了形态学操作,可以明显看出在分割目标的模糊边界处出现的不完全分割问题得到了很好的处理。

图4为对所有分割后的脑肿瘤切片进行三维重构与定位后的效果图。一共对147幅分辨率为 $128 \times 128$ 的脑肿瘤切片进行了三维重构。左侧为脑肿瘤三维重构图,通过设置不同的亮度函数值,借助VTK中的面绘制方法可以实现脑肿瘤重构,从图4中可以直观地了解肿瘤的三维状态和大小。中间为脑肿瘤三维定位图,通过设置非透明函数和颜色函数,可以通过面绘制方法实现,从图4中可以清楚观察脑肿瘤在大脑中的三维定位。右侧为三维重构剖面图,也可以通过体绘制实现,从图4中可以分析脑肿瘤与周围组织的连接情况。

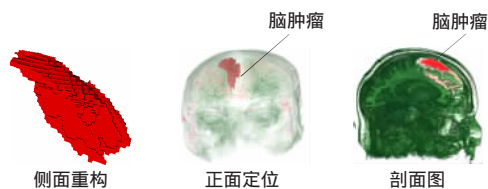


图4 脑肿瘤三维重构及定位图

综上所述,提出的基于Chan-Vese模型的脑肿瘤图像分割方法能很好地解决不完全分割问题。另外,该方法无论对MR成像图片或CT成像图片都能进行准确分割,从而获得了更广泛的临床应用。最后借助VTK实现了脑肿瘤的三维重构与定位,获得了脑肿瘤的大小、立体定位及与周围脑组织的连接状况等临床应用所需的重要三维信息。

## 5 结论

提出了一种基于Chan-Vese模型的脑肿瘤图像分割与三维重构方法。先对图像进行迭代腐蚀操作提取脑肿瘤轮廓,然后利用Chan-Vese模型对脑肿瘤进行分割,之后对图像进行迭代膨胀操作恢复图像,这样在分割目标的模糊边缘处能取得比Chan-Vese模型更好的分割效果,从而很好地解决了不完全分割问题。最后利用VTK对所有分割后的脑肿瘤切片进行了三维重构与定位。实验结果表明方法不仅能准确地对脑肿瘤进行分割,在此基础上还能对脑肿瘤进行三维重构与定位,为医生

对脑肿瘤或血管瘤等颅内占位性病变术前分析提供了较为准确的数据,具有较大的临床实用价值。

## 参考文献:

- [1] Prastawa M, Bullitt E, Moon N, et al. Automatic brain tumor segmentation by subject specific modification of atlas priors[J]. Academic Radiology, 2003, 10(12): 1341-1348.
- [2] Gu Li-xu, Peters T. 3D segmentation of medical images using a fast multistage hybrid algorithm[J]. International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery, 2006, 1(1): 23-31.
- [3] Kass M, Witkin A, Terzopoulos D. Snakes: Active contour models[J]. International Journal of Computer Vision, 1988, 1(4): 321-331.
- [4] Osher S, Sethian J A. Fronts propagating with curvature dependent speed: Algorithms based on Hamilton-jacobi formulations[J]. Journal of Computational Physics, 1988, 79: 12-49.
- [5] Chan T F, Vese L A. Active contours without edges[J]. IEEE Transactions on Image Processing, 2001, 10(2): 266-277.
- [6] 职占江, 宋锦萍. 基于Chan-Vese模型的医学图像分割算法[J]. 计算机工程与应用, 2008, 44(14): 190-194.
- [7] 马建林, 崔志明, 吴健, 等. 一种新的基于区域增长的ROI分割算法[J]. 计算机应用研究, 2008, 25(5): 1581-1585.
- [8] Bouchet A, Pastore J, Ballarin V. Segmentation of medical images using fuzzy mathematical morphology[J]. Journal of Computer Science and Technology, 2007, 7(3): 256-262.
- [9] McInerney T, Terzopoulos D. Deformable models in medical image analysis: A survey[J]. Medical Image Analysis, 1996, 1(2): 91-108.
- [10] Lamade W, Glombitza G, Fischer L, et al. The impact of 3-dimension reconstructions on operations planning in liver surgery[J]. Arch Surg, 2000, 135(11): 1256-1261.
- [11] Schroeder W J, Avila L S, Hoffman W. Visualizing with VTK: A tutorial[J]. IEEE Transactions on Computer Graphics and Applications, 2000, 20(5): 20-27.
- [12] Chan T F, Vese L A. A level set algorithm for minimizing the Mumford-Shah functional in image processing[C]//IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision, 2001, 15(3): 161-168.
- [13] Kang Y, Engelke K, Kalender W A. Interactive 3d editing tools for image segmentation[J]. Medical Image Analysis, 2004, 8(1): 35-46.

(上接148页)

- [2] Konstantinides K, Natarajan B, Yovanof G S. Noise estimation and filtering using block-based singular value decomposition[J]. IEEE Trans on Image Process, 1997, 6(3): 479-483.
- [3] Hou Z. Adaptive singular value decomposition in wavelet domain for image denoising[J]. Pattern Recognition, 2003, 36: 1747-1763.
- [4] Wongsawat Y, Rao K R, Oraintara S. Multichannel SVD-based image denoising[C]//ISCAS 2005, 2005, 6: 5990-5993.
- [5] Coifman R R, Donoho D L. Wavelets and statistics[M]. Antoniadis A, Oppenheim G. New York: Springer-Verlag, 1995.
- [6] Damien M, Salah B, Mireille G. SVD-based image filtering improvement by means of image rotation[C]//2004 ICASSP Montreal, Que-

bec, Canada, 2004: 289-292.

- [7] Feng X, Milanfar P. Multiscale principal components analysis for image local orientation estimation[C]//The 36th Asilomar Conf Signals, System and Computers, Pacific Grove, CA, 2002: 478-482.
- [8] Portilla J, Strela V, Wainwright M, et al. Image denoising using scale mixtures of Gaussians in the wavelet domain[J]. IEEE Trans on Image Processing, 2003, 12: 1338-1351.
- [9] Buades A, Coll B, Morel J M. A non-local algorithm for image denoising[C]//IEEE CVPR, San Diego, IEEE Computer Society, 2005: 60-65.
- [10] Foi A, Dabov K, Katkovnik V, et al. Shape-adaptive DCT for denoising and image reconstruction[C]//Electronic Imaging '06, San Jose, California, USA, 2006.