具有 n 种投入要素的灰色生产函数

刘震宇

(厦门大学系统科学系, 361005)

摘要 本文主要讨论应用灰色系统的 GM(1,N) 模型，推导灰色生产函数的过程，并对其中的参数的经济意义作若干简要证明.

关键词 灰色生产函数

The Grey Production Function with n Types of Input Factors

Liu Zhenyu

(Dept. of Systems Science,Xiamen Univ,361005)

Abstract In this paper, the grey systems model $GM(1,N)$ has been used to deduce the grey production function, the economic meaning of the parameters of the grey production function has been proved.

Keywords grey production function

0 引言

关于生产函数的研究已有近 60 和年的历史，而现行生产函数的辨识，大多应用数理统计的方法直接进行处理，这就要求模型中的有关变量，具有大样本且数据波动幅度不太大等特点，这在我国现实条件下，一般都难以满足. 为克服这一点，我们使用灰色系统理论的 GM(1,N) 模型[1]，进行推导，形成灰色生产函数，利用其中数据累加生成的办法，使任意非负数列、摆动与非摆动的，转化为非减的、递增数列，从而使数据在累加生成数的基础上，有较好的变化规律，同时克服大样本量的要求及计算工作量大的缺点[1].

1 灰色生产函数的推导

根据灰色系统理论，$GM(1,N)$ 模型的一般形式如下所示：

$$(1+0.5a)x_1^{(0)}(k)+ax_1^{(1)}(k-1)=\sum_{i=2}^{n}b_ix_i^{(1)}(k)$$

它可改写为以下形式

$$x_1^{(0)}(k)=\frac{1}{1+0.5a}[\sum_{i=2}^{n}b_ix_i^{(1)}(k)-ax_1^{(1)}(k-1)]\quad k=1,2,\cdots,T \tag{1}$$

由于 $\triangle x_1^{(0)}(k)=x_1^{(0)}(k)-x_1^{(0)}(k-1)$, 将 (1) 式代入我们有

$$\begin{aligned}\triangle x_1^{(0)}(k)&=\frac{1}{1+0.5a}\left[\sum_{i=2}^{n}b_i(x_i^{(1)}(k)-x_i^{(1)}(k-1)-a(x_1^{(1)}(k-1)-x_1^{(1)}(k-2)\right]\\&=\frac{1}{1+0.5a}\left[\sum_{i=2}^{n}b_ix_i^{(0)}(k)-ax_1^{(0)}(k-1)\right]\end{aligned}$$

⁰本文于 1992 年 11 月 14 日收到.

将上式两边同除以 $x_1^{(0)}(k-1)$, 则

$$\frac{\triangle x_1^{(0)}(k)}{x_1^{(0)}(k-1)}=\frac{1}{1+0.5a}[\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i x_i^{(0)}(k)}{x_1^{(0)}(k-1)}-a\frac{x_1^{(0)}(k-1)}{x_1^{(0)}(k-1)}]$$

$$=\frac{-a}{1+0.5a}+\frac{1}{1+0.5a}\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i x_i^{(0)}(k)}{x_1^{(0)}(k-1)} \tag{2}$$

因 $x_i^{(0)}(k)=x_i^{(0)}(k-1)+\triangle x_i^{(0)}(k)$, 代入 (2) 式中我们有

$$\frac{\triangle x_1^{(0)}(k)}{x_1^{(0)}(k-1)}=\frac{-a}{1+0.5a}+\frac{1}{1+0.5a}\sum_{i=2}^{n}b_i(\frac{x_i^{(0)}(k-1)+\triangle x_i^{(0)}(k)}{x_1^{(0)}(k-1)})$$

$$=\frac{-a}{1+0.5a}+\frac{1}{(1+0.5a)x_1^{(0)}(k-1)}\sum_{i=2}^{n}b_i x_i^{(0)}(k-1)\big(1+\frac{\triangle x_i^{(0)}(k)}{x_i^{(0)}(k-1)}\big)$$

令

$$r(k)=\frac{-a}{1+0.5a}+\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i x_i^{(0)}(k-1)}{(1+0.5a)x_1^{(0)}(k-1)},\qquad x_i(k)=\frac{\triangle x_i^{(0)}(k)}{x_i^{(0)}(k-1)},$$

$$\beta_i(k)=\frac{1}{(1+0.5a)x_1^{(0)}(k-1)}b_i x_i^{(0)}(k-1),\qquad y(k)=\frac{\triangle x_1^{(0)}(k)}{x_1^{(0)}(k-1)}$$

上式可写为

$$y(k)=r(k)+\sum_{i=2}^{n}\beta_i(k)[\frac{\triangle x_i^{(0)}(k)}{x_i^{(0)}(k-1)}]$$

$$=r(k)+\sum_{i=2}^{n}\beta_i(k)x_i(k) \tag{3}$$

式 (3) 就是我们要找的灰色生产函数的基本形式. 式中 $y(k)$ 为产出的增长率, $x_i(k)$ 为第 i 种形式投入要素的增长率, $r(k)$ 为技术进步率.

2　灰色生产函数中有关参数的意义

首先，由 (1) 式，考虑 $x_i^{(0)}(k)=x_i^{(0)}(k)+x_i^{(1)}(k-1)$, 对式 (1) 求偏导，有

$$\frac{\partial x_1^{(0)}(k)}{\partial x_i^{(0)}(k)}=\frac{b_i}{1+0.5a},\quad k=1,2,\cdots,T \tag{4}$$

由 $\beta_i(k)=\frac{b_i}{1+0.5a}\cdot\frac{x_i^{(0)}(k-1)}{x_i^{(0)}(k-1)}$, 将 (4) 式的结果代入其中，则有

$$\beta_i(k)=\frac{\partial x_1^{(0)}(k-1)}{\partial x_i^{(0)}(k-1)}\cdot\frac{x_i^{(0)}(k-1)}{x_1^{(0)}(k-1)}$$

$$=[\frac{\partial x_1^{(0)}(k-1)}{\partial x_1^{(0)}(k-1)}]\cdot[\frac{\partial x_i^{(0)}(k-1)}{\partial x_i^{(0)}(k-1)}]^{-1}$$

因此，$\beta_i(k)$ 为第 i 种投入要素在第 k 年时的产出弹性，它与系统本身的特性及上年的投入产出情况有关.

其次，由 (3) 式及 $r(k)=\frac{-a}{1+0.5a}+\sum_{i=2}^{n}\beta_i(k)$ 可知，$r(k)$ 是一个在第 k 年时可事先计算出来的系数，它是扣除因投入增加而使产出增长后，剩下的所有因素对产出增长的综合作用，因此它是广义的技术进步率，而且 $r(k)$ 与各种投入要素的产出弹性及系统本身的自我发展系数 a 有关.

再者，由投入要素的替代弹性系数 σ 的定义[2] 可知，第 i 种投入与第 j 种投入 $(i\neq j)$ 之间的替代弹性 σ_{ij} 可定义为

$$\sigma_{ij}=d\ln[\frac{x_i^{(0)}(k)}{x_j^{(0)}(k)}]/d\ln RTS_{ij} \tag{5}$$

式中，RTS_{ij} 为边际技术替代率，

$$RTS_{ij}=\frac{MPP_j}{MPP_i}=[\frac{\partial x_1^{(0)}(k)}{\partial x_j^{(0)}(k)}]\cdot[\frac{\partial x_1^{(0)}(k)}{\partial x_i^{(0)}(k)}]^{-1}=\frac{b_j}{b_i}$$

由于 b_j 和 b_i 为常数，故 $d\ln RTS_{ij}=0$, 于是 $\sigma_{ij}\to\infty$. 因此，灰色生产函数表明的是生产要素替代弹性为无穷大的一种生产函数.

最后，在灰色生产函数中，生产力的弹性系数 E 为

$$E=\sum_{i=2}^{n}\beta_i(k)=\sum_{i=2}^{n}\frac{b_i}{1+0.5a}\cdot\frac{x_i^{(0)}(k-1)}{x_1^{(0)}(k-1)}$$

由于我们并未规定 $\beta_i(k)$ 的取值范围，故规模报酬不变的假设不存在.

3 有关评价与说明

从以上分析可知，灰色生产函数具有如下特点：

1 易于进行参数的估计，特别是在小样本且样本数据有较大波动时，更具有优越性.

2 具有反映系统动态状况的能力. 因为式 (3) 是一个动态系统方程，可比较好地反映每个时间点上，技术进步率及投入的产出弹性的具体状况，避免了一般生产函数中技术进步率及投入的产出弹性在计算期 T 内恒定不变的情况，有助于对经济系统的跟踪分析.

3 应用式 (3), 可进行一定投入约束下，对今后产出情况的预测和分析，有助于计划的制定.

值得注意的是，在应用灰色生产函数时，要注意对系统数参数 a 和 b_i 的辨识，使之能准确地刻化系统的特性；若系统发展有明显的阶段性，为提高模型精度，可分段建模，以获得相应时区内的灰色生产函数.

参考文献

1 邓聚龙. 多维灰色规划. 武汉：华中理工大学出版社， 1987.

2 厉以宁，秦宛顺. 现代西方经济学概论. 北京：北京大学出版社， 1983.