

# 基于小波变换的半软阈值参数算法研究

魏文畅 杨俊杰 蔡建立

WEI Wen-chang ,YANG Jun-jie ,CAI Jian-li

厦门大学 信息科学与技术学院 自动化系 福建 厦门 361005

Dept. of Automation Institute of Information Science and Technology ,Xiamen University ,Xiamen ,Fujian 361005 ,China

E-mail :wenchang1984@163.com

WEI Wen-chang ,YANG Jun-jie ,CAI Jian-li. Parameters' algorithm of semisoft shrinkage based on wavelet transforms. *Computer Engineering and Applications* 2009 45(1) :73-76.

**Abstract :** The waveshrink has been widely used in the filtering because of the simplest realization and the smallest amount of computation. According to the different signals the filtering effect will be directly affected by the choice of shrinkage function. The semisoft shrinkage proposed by Gao HongYe has not been effectively applied because of the complexity of the parameters' algorithm. In this paper a new calculation algorithm of semisoft shrinkage function is proposed through combining wavelet theory with fuzzy theory and it can greatly simplify the complexity of the algorithm. And also the experimental simulation shows that it has obtained the good results.

**Key words :** semisoft shrinkage ,fuzzy nearness filtering algorithm

**摘要 :** 小波域阈值滤波因其实现最简单 ,计算量最小而得到广泛的应用 ,但对不同信号而言 ,其阈值函数的选择将直接影响到滤波效果。由 Gao HongYe 提出的半软阈值法 ,因其参数实现算法的复杂度大而没有得到有效的应用。结合小波理论与模糊理论对半软阈值函数的参数提出一种新的计算算法 ,大大减少了算法实现的复杂度 ,并对其进行试验仿真 ,取得了良好的效果。

**关键词 :** 半软阈值 ,模糊 ,贴近度 ,滤波 ,算法

DOI :10.3778/j.issn.1002-8331.2009.01.022 文章编号 :1002-8331(2009)01-0073-04 文献标识码 :A 中图分类号 :TP391

小波变换具有一种“集中”的能力 ,信号经小波变换后 ,可以认为由信号产生的小波系数包含有信号的重要信息 ,其幅值较大 ,而噪声对应的小波系数幅值小。通过在不同的尺度上选取合适的阈值 ,并将小于该阈值的小波系数置零 ,而保留大于阈值的小波系数 ,从而使信号中的噪声得到有效的抑制 ,最后进行小波逆变换 ,得到滤波后的重构信号。

小波域阈值滤波方法是实现最简单 ,计算量最小的一种方法。在小波域阈值滤波算法中 ,阈值函数选取和阈值确定是两个最基本也是最重要的问题。而阈值函数主要分为硬阈值函数、软阈值函数和半软阈值函数 ,它们的基本思想都是去除小的系数 ,对大的系数进行收缩或保留。

由于带有噪声的信号在经小波变换所得到的的小波系数本身具有不确定性 ,而模糊数学正是研究和处理模糊现象的学科。它所研究的事物的概念外延是模糊的 ,即一个对象是否是信号的细节成分 ,很难确切地去确定其属于哪个对象 ,只能从概率论中的概率大小或模糊数学中的属于某种类型的隶属度大小来大致确定。

Bruce 和 Gao 证明了硬阈值法往往有较大的方差 ,而软阈值法往往有较大的偏差。为了克服硬阈值法和软阈值法的缺

点 ,Gao HongYe 提出了另外一种阈值函数 ,它是软阈值法和硬阈值法的一种折衷形式即半软阈值法 ,并在此基础上推导出了基于半软阈值法的 Minimax 阈值 ,然而在该方法中 ,需要确定两个阈值 ,导致增加了算法的复杂度。针对这个问题 ,对这两个阈值的算法进行研究 ,并提出了基于模糊贴近度的阈值算法。

## 1 小波滤波的模型

利用小波变换对加性噪声的信号进行滤波 ,其对噪声性质有三个基本假设 :

(1) 噪声经小波变换后小波系数是随分解层次的增加而逐渐降低的 ,其变换后大多数小波系数为零或近似为零。

(2) 噪声均匀地分布在所有系数中。

(3) 噪声水平不是太高。

假设观测信号  $f_i = g_i + \varepsilon_i (i=1, 2, \dots, n)$  由真实信号  $g_i$  和加性噪声  $\varepsilon_i$  组成 ,其向量形式可表示为

$$f = g + \varepsilon \quad (1)$$

对式(1)所示的观测信号滤波。Donoho 提出了滤波的两个前提条件 :

基金项目 国家 985 工程中的重点项目(No.0000-X07204)。

作者简介 魏文畅(1984-) ,男 ,硕士 ,主要研究方向 :小波应用等领域 ;杨俊杰(1983-) ,女 ,硕士 ,主要研究方向 :灰色理论、粗糙理论等领域 ;蔡建立(1950-) ,男 ,副教授 ,福建省自动化学会副理事长 ,主要研究方向 :自动控制、滤波、小波等领域。

收稿日期 2008-06-12 修回日期 2008-09-16

光滑性 在大概率情况下  $\hat{g}$  至少跟  $g$  有同样的光滑度。

适应性  $\hat{g}$  是最小均方差估计。

Donoho 证明 : 当  $N \rightarrow \infty$  时, 下式几乎以接近于 1 的概率成立 :

$$\|\hat{g}\|_F \leq C_1 \|\hat{g}\|_F, \text{ 式中 } C_1 \text{ 为一常数}$$

则在小波域中  $|\hat{\theta}_{j,i}| \leq |\theta_{j,i}|$  成立, 式中  $1 \leq i \leq N$  为位置  $j$  为尺度;  $\theta_{j,i}$  表示真实信号  $g$  在尺度上的第  $i$  个小波系数。

$$E\left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\hat{g}_i - g_i|^2\right) \text{ 求最小值} \Leftrightarrow \text{求 } E\|\hat{\theta} - \theta\|_F \text{ 的最小值}$$

此时  $\hat{g}, \hat{\theta}$  必须满足

$$E\|\hat{g} - g\|_F^2 \leq \gamma E\|\hat{\theta} - \theta\|_F^2 \leq \gamma \sigma N \sqrt{2 \ln N}$$

当小波变换为正交小波变换时,  $\gamma=1$ , 可知

$$\frac{1}{N} E\|\hat{\theta} - \theta\|_F^2 \leq \sigma \sqrt{2 \ln N}$$

对于任意  $|\theta_{j,i}| \leq \sigma \sqrt{2 \ln N}$  取  $\hat{\theta}_{j,i} = 0$ 。

$\Rightarrow$  当  $|\theta_{j,i}| \leq \sigma \sqrt{2 \ln N}$  时  $\theta_{j,i}$  由噪声所产生。

因此, 可取阈值为  $t = \sigma \sqrt{2 \ln N}$ 。

在理想情况下,  $\varepsilon_i$  为正态噪声, 是不相关的噪声, 且方差为常量, 但在实际情况中并非如此, 因其假设条件都带有一定的不确定性和模糊性。为了满足实际应用的需要, 引入模糊概念对  $g$  进行估计。

## 2 小波域阈值

小波域阈值滤波算法中的两个基本要素是阈值和阈值函数。而阈值函数主要分为硬阈值函数、软阈值函数和半软阈值函数, 其本质区别在于选取的阈值函数不同, 体现了对小波系数的不同处理策略, 但它们的基本思想都是去除小的系数, 对大的系数进行收缩或保留。

(1) 硬阈值法

$$\hat{\theta}_{j,i} = \begin{cases} 0 & |\theta_{j,i}| \leq t \\ \theta_{j,i} & \text{其他} \end{cases}$$

(2) 软阈值法

$$\hat{\theta}_{j,i} = \text{sgn}(\theta_{j,i}) \cdot (|\theta_{j,i}| - t)$$

(3) 半软阈值法

$$\hat{\theta}_{j,i} = \begin{cases} 0 & |\theta_{j,i}| \leq t_1 \\ \text{sgn}(\theta_{j,i}) \cdot \frac{t_2(|\theta_{j,i}| - t_1)}{t_2 - t_1} & t_1 \leq |\theta_{j,i}| \leq t_2 \\ \theta_{j,i} & |\theta_{j,i}| > t_2 \end{cases}$$

其中  $t_1$  和  $t_2$  分别称为下阈值和上阈值,  $\text{sgn}(\theta_{j,i})$  为符号函数。

由以上 Donoho 证明可知, 在硬阈值函数和软阈值函数中参数  $t$  可取  $\sigma \sqrt{2 \ln N}$ , 但因硬阈值有较大的方差, 而软阈值有较大的偏差, 所以在处理某些信号时, 效果不佳。而在半软阈值函数中, 在文献[4]中对参数  $t_1$  和  $t_2$  的选取已给出了算法——Minimax 阈值, 但因其算法的复杂度较大, 故实用性不好。由以上分析可知, 在一般情况下,  $t_2 = \sigma \sqrt{2 \ln N}$ , 而  $t_1$  的确定与信号的具体形式有关, 鉴于此, 对参数  $t_1$  的选取算法进行改进, 结合模糊理论与小波分析理论, 对  $t_1$  的选取提出了一种新的算法。

## 3 参数算法建立过程

### 3.1 模糊性度量

设给定小波系数论域  $U$ ,  $U$  到  $[0, 1]$  闭区间的任一映射  $\mu_A$

$$\mu_A: U \rightarrow [0, 1]$$

$$u \rightarrow \mu_A(u)$$

都确定  $U$  一个模糊子集  $A$ ,  $\mu_A$  称为模糊子集的隶属函数,  $\mu_A(u)$  称为  $u$  对于  $A$  的隶属度。设  $A$  和  $B$  分别为小波近似系数和细节系数的模糊集 ( $A, B \subseteq U$ ), 并假设  $\mu_A$  和  $\mu_B$  为  $A$  和  $B$  所取的隶属函数, 而  $\mu_A(u), \mu_B(u)$  分别为其对应的隶属度。

两个模糊集之间的相似性, 可以采用它们之间的“距离”来度量。两个模糊集隶属函数之间的距离越小, 相似程度就越大, 反之亦然。由于用距离来刻画一个模糊集的模糊度, 需要作较繁的计算, 其结果往往也不是十分理想, 为弥补不足, 汪培庄教授提出用“贴进度”来度量模糊性。

关于贴进度的计算方法有很多, 比如海明贴进度、欧几里德贴进度等等。文中采用欧几里德贴进度来度量近似系数模糊集和细节系数模糊集之间的相似性。

欧几里德贴进度  $N_E(A, B)$  定义为

$$N_E(A, B) = 1 - \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n [\mu_A(x_i) - \mu_B(x_i)]^2}$$

其中  $\mu_A(x_i)$  和  $\mu_B(x_i)$  分别为近似系数模糊集和细节系数模糊集的隶属度。

### 3.2 隶属函数选取及其参数的确定

根据小波域阈值滤波原理, 当小波系数的值越大, 它是由信号所产生的细节的概率越大, 而由噪声产生的概率越小, 即它属于信号细节的隶属度越大, 故其隶属函数可取戒下型

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x < c \\ \frac{1}{1 + [a(x-c)]^b} & x \geq c \end{cases}$$

其中  $a > 0, b < 0$ , 参数  $a, b, c$  根据具体模糊集确定, 其分布曲线如图 1 所示。

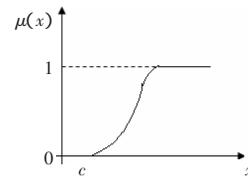


图 1 分布曲线图

在文中, 参数  $c$  可取为系数的绝对值最小值。设某一层系数的细节部分中系数的绝对值最大的数的隶属度为 1, 而把系数的绝对值最小的数的隶属度设为 0, 这样就可确定参数  $a, b, c$ 。因此, 每一层系数的隶属函数  $\mu(x)$  中的参数  $a, b, c$  是不同的, 它是根据各自层系数的分布而定的, 这样更符合实际。

### 3.3 算法的确立

$t_1$  的选取与信号的形式有关, 对细节较多的信号 (即贴进度越大), 可将其取较小, 这样有利于保留信号的细节; 对于细节较少的信号 (即贴进度越小), 一般将其取较大, 这样更有利于去噪。基于以上分析,  $t_1$  的算法模型可取为

$$t_1 = Ct_2, 0 \leq C < 1$$

而  $C=1-N_k(A, B)$

其中  $N_k(A, B)$  为近似系数模糊集  $A$  和细节系数模糊集  $B$  的贴近度。

因此半软阈值函数可改进为

$$\hat{\theta}_{j,i} = \begin{cases} 0 & |\theta_{j,i}| \leq t_1 \\ \text{sgn}(\theta_{j,i}) \cdot \frac{(|\theta_{j,i}| - Ct_2)}{1-C} & t_1 \leq |\theta_{j,i}| \leq t_2 \\ \theta_{j,i} & |\theta_{j,i}| > t_2 \end{cases}$$

### 3.4 算法复杂度比较

同一问题可用不同算法解决, 而一个算法的质量优劣将影响到算法乃至程序的效率。一个算法的评价主要从时间复杂度和空间复杂度来考虑。主要从时间复杂度来比较本文的算法与文献中 Minimax 算法的优劣。

Minimax 算法的时间复杂度为  $O(n^2)$ , 而本文算法的时间复杂度为  $O(n)$ 。

## 4 实验结果与分析

分别用硬阈值、软阈值、半软阈值对四种信号滤波来说明改进后滤波算法对滤波效果的改善程度。首先, 用正交小波

sym4 对加入噪声( $\sigma=0.2$ )的四种信号进行小波变换, 然后对小波系数细节部分进行硬阈值、软阈值处理, 最后用半软阈值改进算法对其进行仿真。并分别从信号噪声比(SNR)和均方误差(MSE)等指标对滤波前后的信号进行评估。

表 1 对 Blocks 信号滤波后的数据(加噪信号 SNR=28.179 dB)

Blocks	硬阈值	软阈值	半软阈值
SNR/dB	27.719	22.502	28.673
MSE	3.908	7.1275	3.5016

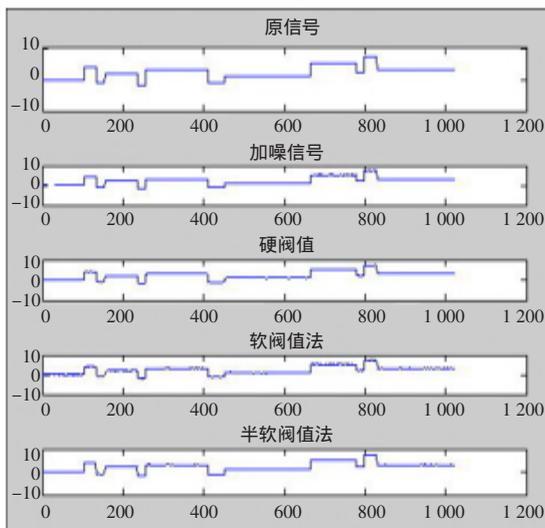
表 2 对 Bumps 信号滤波后的数据(加噪信号 SNR=23.827 dB)

Bumps	硬阈值	软阈值	半软阈值
SNR/dB	23.574	18.558	24.127
MSE	3.816	6.799	3.5807

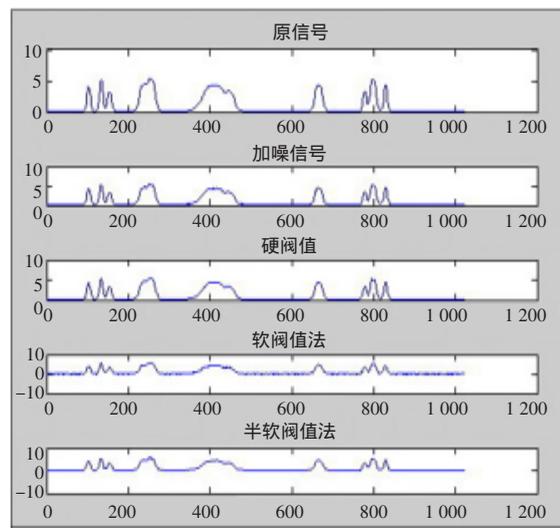
表 3 对 HeavySine 信号滤波后的数据(加噪信号 SNR=28.511 dB)

HeavySine	硬阈值	软阈值	半软阈值
SNR/dB	29.1740	24.2700	29.2550
MSE	3.4342	6.0399	3.4024

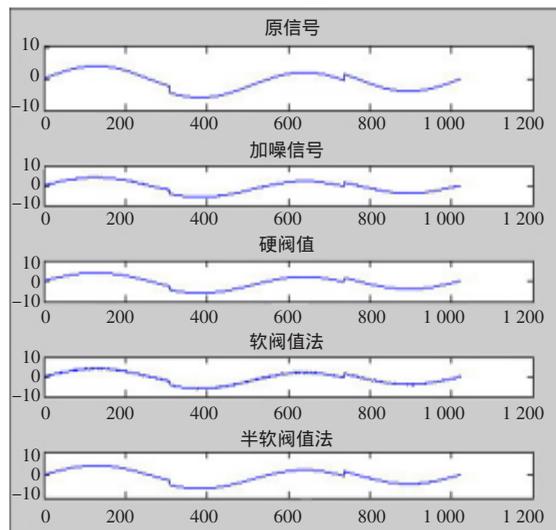
从表 1、2 可以看出, 半软阈值对信号 Blocks、Bumps 滤波后的信噪比增益分别为 0.494 dB、0.3 dB, 而硬阈值和软阈值滤



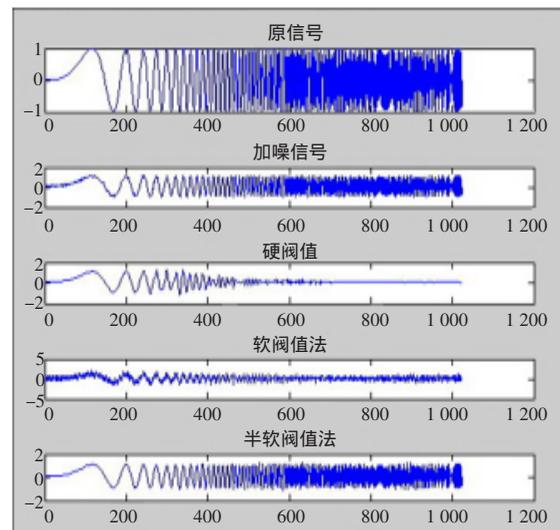
(a) Blocks



(b) Bumps



(c) HeavySine



(d) QuadChirp

图 2 对四种信号滤波结果

表4 对 QuadChirp 信号滤波后的数据(加噪信号 SNR=15.494 dB)

QuadChirp	硬阈值	软阈值	半软阈值
SNR/dB	2.150 6	3.172 8	15.027 0
MSE	17.224 0	15.312 0	3.911 3

波后的信噪比出现负增益,即滤波后的信号的信噪比比原信号的还低。从表3可以看出,半软阈值对信号 HeavySine 滤波后信噪比比硬阈值高,但软阈值仍然出现负增益。从表4可以看出,三种阈值函数对信号 QuadChirp 滤波后的信噪比都出现负增益,但半软阈值基本上能保持原信号的特征,而硬阈值与软阈值几乎完全地滤掉原信号的细节成分,同时还可以从图2(d)中看出滤波后信号几乎完全失真。图2为三种阈值函数对四种信号滤波后的效果对比图。

事实上,在小波域滤波方法中,对不同特性的信号,没有一种方法是通用的,只能是针对不同特性的信号采用比较适当的方法,这点也可以在实验中得到验证。因此,半软阈值并不是对所有的信号滤波都是最优的,它只是对一部分信号滤波效果较好,至于特殊领域的信号,应视实际情况来确定使用哪种阈值滤波。

## 5 结束语

由 Gao Hong-Ye 等人所提出的半软阈值法,由于其半软阈值函数参数的确定比较复杂而没有得到有效地应用,结合小波理论与模糊理论,针对其参数的确定提出一种新的算法。通过实验仿真表明,对于不同特性的信号,该算法用于滤波有较好的效果。但是,正如其他的小波域滤波方法一样,半软阈值法也并不是一种通用的、最优的方法。同时,所提出的算法还有几个可以作进一步的改进:

(1)如何更好地定义度量小波系数的近似部分和细节部分之间的关联程度。

(2)可以根据不同的情况,选择适当的隶属函数。

(3)寻找另一种函数作为阈值函数能够使滤波效果与半软

阈值函数是最大的渐进相等。至于这点改进,已有些学者做了研究,如 Gao Hong-Ye 提出用 Garrote 函数作为阈值函数,还有双曲线形式的阈值函数等等。

## 参考文献:

- [1] Donoho D L, Johnstone I M. Ideal spatial adaption by wavelet shrinkage[J]. *Biometrika*, 1994, 81(3): 425-455.
- [2] Donoho D L. De-noising by soft-thresholding[J]. *IEEE Trans Inform theory*, 1995, 41(3): 613-627.
- [3] Donoho D L, Johnstone I M. Adapting to unknown smoothness via wavelet shrinkage[J]. *Journal of the American Statistical Association*, 1995, 90: 1200-1224.
- [4] Gao Hong-Ye, Bruce A G. Waveshrink and semisoft shrinkage[J]. *StaSci Research Report*, 1995(39).
- [5] Bruce A G, Gao Hong-Ye. Waveshrink with firm shrinkage[J]. *Statistica Sinica*, 1997, 7(4): 855-874.
- [6] Zhang Lei, Bao Paul. Denoising by spatial correlation thresholding[J]. *IEEE Trans Circuits and Systems for Video Technology*, 2003, 13(6): 535-538.
- [7] Nason G P. Wavelet shrinkage using cross-validation[J]. *Journal of the Royal Statistical Society Series B*, 1996, 58: 463-479.
- [8] Kosko B. *Fuzzy engineering*[M]. New York: Prentice Hall, 1996.
- [9] Gao Hong-Ye. Wavelet shrinkage denoising using the non-negative garrote[J]. *Journal of Computational and Graphical Statistics*, 1998, 7(4): 469-488.
- [10] 潘泉, 张磊, 孟晋丽, 等. 小波滤波方法及应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005: 6-62.
- [11] 李士勇. 工程模糊数学及应用[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2004: 70-81.
- [12] 曹炳元. 应用模糊数学与系统[M]. 北京: 科学出版社, 2005: 1-28.
- [13] 刘涛, 曾祥利, 曾军, 等. 实用小波分析入门[M]. 北京: 国防工业出版社, 2006: 124-138.
- [14] 周伟, 桂林, 张家祥, 等. MATLAB 小波分析高级技术[M]. 西安: 西安电子科技大学出版社, 2006: 87-128.

(上接 50 页)

权重生成策略。较优种群中的粒子已经比较接近最优解,所以采用较小的惯性权重,取 0.2;根据  $X$  条件云发生器生成普通种群的惯性权重,云模型的稳定趋向性和随机性保证了惯性权重会逐渐减小而又不失随机性,在收敛速度和保持粒子多样性之间做了一个很好的权衡;次优种群的惯性权重取 0.9。实验结果表明,与传统 PSO 算法相比较, CAPSO 的性能是高速有效的。

## 参考文献:

- [1] Kennedy J, Eberhart R C. Particle swarm optimization[J]. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 1995, 11: 1942-1948.
- [2] Eberhart R C, Kennedy J A. A new optimizer using particle swarm theory[J]. *Institute of Electrical and Electronics Engineers*, 1995, 10: 39-43.
- [3] Shi Y, Eberhart R C. A Modified Particle Swarm Optimizer[C]// *Proceedings of the IEEE Conference on Evolutionary Computation*. Piscataway, NJ: IEEE Press, 1998: 69-73.

- [4] 刘建华, 樊晓平, 瞿志华. 一种惯性权重动态调整的新型粒子群算法[J]. *计算机工程与应用*, 2007, 43(7): 68-70.
- [5] 李德毅, 孟海军, 史雪梅. 隶属云和隶属云发生器[J]. *计算机研究与发展*, 1995, 32(6): 15-20.
- [6] 张飞舟, 范跃祖, 沈程智, 等. 基于隶属云发生器的智能控制[J]. *航空学报*, 1999, 20(1): 89-92.
- [7] 岳训, 孙忠林, 张艳琦, 等. 基于云模型的 Web 日志数据挖掘技术[J]. *计算机应用研究*, 2001(11): 113-116.
- [8] 段海滨, 王道波, 于秀芬, 等. 基于云模型理论的蚁群算法改进研究[J]. *哈尔滨工业大学学报*, 2005, 37(1): 115-119.
- [9] 张光卫, 康建初, 李鹤松, 等. 基于云模型的全局最优优化算法[J]. *北京航空航天大学学报*, 2007, 33(4): 486-490.
- [10] Zhu Yunfang, Dai Chaohua, Chen Weirong, et al. Adaptive probabilities of crossover and mutation in genetic algorithm based on cloud generators[J]. *Journal of Computational Information Systems*, 2005, 1(4): 671-678.
- [11] 刘常昱, 李德毅, 潘莉莉. 基于云模型的不确定性知识表示[J]. *计算机工程与应用*, 2004, 40(2): 32-35.