

# 随机条件下多样化产品系统产量分配与再造决策

计国君, 刘 华

(厦门大学 管理学院, 福建 厦门 361005)

**摘要:**文章从生产商以生产总成本最小化为决策目标,建立了数学模型并求解得到了产品系统中各产品的产量设计率和回收再造率的最优值。通过数例计算并且分别基于12种成本参数进行敏感性分析。结果表明,在产能一定的前提下,生产商对于决策变量具有较强的策略性选择。

**关键词:**多样化产品;制造/再制造;有限产能;回收再造率

**中图分类号:**F273.2 **文献标识码:**A **文章编号:**1002-6487(2013)11-0041-04

## 0 引言

多样化产品策略是生产商充分利用内部短缺资源和挤占外部剧烈竞争市场而采用的重要手段。因为仅仅对当前产品简单的重复,不仅不能带给企业预期的效益,甚至还有可能成为原品牌的累赘,进而影响其发展。更多的家电、电子、钢铁、造纸、机械、仪表等行业中的生产商拥有自己核心技术的优势后,在制造核心部件的基础上,开发多样化产品开拓多样化市场。

生产商的回收再造活动是实现节约原材料成本、缩短供应时间、市场营销策略以及遵守行业规则和法律法规的重要途径。对于短周期的产品,如纸张、电子电器、玻璃、塑料、汽车等产品而言,再造活动带来的好处明显。因此,生产商基于再制造进行分配多样化产品系统产量是一种很全面的应对内外部刺激的策略,但是生产商面对的生产决策就变得复杂化。考虑再造的产品系统是混杂制造/再造系统,最早是由Van等<sup>[1]</sup>提出,但很多国内外学者的研究主要针对单一产品的制造/再造系统决策,内容体现在库存、生产计划、再制造批量和物流网络等。本文考虑随机产品系统的市场需求和回收下,在各类产品的单周期内,生产商将再造决策和多样化产品系统有限产量的分配决策相结合,从生产商以生产总成本最小化为经营目标的角度对各种产品的产量设计率和回收再造率进行优化决策。

## 1 模型建立

如图1所示,生产商根据市场需求预测,在现有产能的基础上,进行产品设计,提供多样化产品(这里的多样化产品是指具有相同或相近功能的属同一类的产品,如空调

因安装方式不同而形成多样化产品系统;如螺纹钢因内径不同而形成多样化产品),并且将产品周期末的废旧产品进行回收再造。模型将考虑最简单的情形:采购、研发设计、生产、销售和回收等决策环节都由一家生产商独立完成。

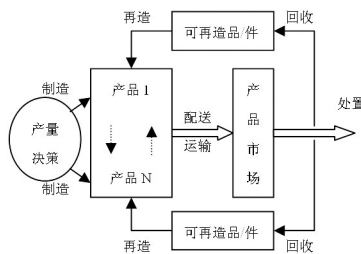


图1 多样化产品系统制造/再造系统架构图

### 1.1 符号、变量和假设

#### 1.1.1 符号、变量

生产商制造规模有限,所有产品初始总生产量为 $Q$ ,为市场提供的产品种类数目为 $N$ ,每种产品的市场需求以及它们的废旧产品回收数量都服从均匀分布<sup>[2]</sup>。第 $i$ ( $i=1,2,3,\dots,N$ )种产品的初始产量在总产量中比例为 $\tau_i$ ,同样地,以下有标注 $i$ 的参数均对应为第 $i$ 种产品(或简称为产品 $i$ )的参数,产品的市场需求 $D_i$ ,  $D_i \sim U[a_i, b_i]$ ,  $b_i > a_i > 0$ ;产品的回收数量 $R_i$ ,  $R_i \sim U[e_i, f_i]$ ,  $f_i > e_i > 0$ ;产品系统生产总成本 $TC$ ;产品 $i$ 的生产总成本记为 $TC_i$ ;产品生产成本 $C_p^i$ ;产品生产固定成本 $K_i$ ;单位产品的变动成本 $v_i$ ;产品再生产成本 $C_r^i$ ;再造产品的固定成本 $Z_i$ ;单位再造产品的变动成本 $z_i$ ;回收中的废旧产品库存成本 $C_i^s$ ;回收中的单位废旧产品库存成本 $l_i$ ;废旧产品处置成本 $C_d^i$ ;废旧产品处置固定成本 $D_i$ ;单位废旧产品处置变动成本 $d_i$ ;流通中产品的库存成本 $C_i^i$ ;流通中单位产品的库存成本 $h_i$ ;产品的缺货成本 $C_s^i$ ;单位产品的缺货成本 $s_i$ ;产品库存积压损失 $C_m^i$ ;单位产品库存积压损失 $m_i$ 。

**基金项目:**国家自然科学基金资助项目(70971111);教育部人文社会科学项目基金资助(12YJC630264);福建省自然科学基金资助项目(2012J01304)

**作者简介:**计国君(1964-),男,安徽合肥人,教授,博士生导师,研究方向:系统工程、生产运作管理。

刘 华(1980-),男,江西永新人,博士研究生,研究方向:生态创新与生产运作。

决策变量:产品*i*的初始产量比例 $\tau_i$ (以下简称为产品*i*设计率);产品*i*的回收再造率 $r_i$ 。

1.1.2 前提假设

假设一:生产商的多样化产品系统中,各产品的需求市场独立。

假设二:各种产品的再制造活动独立。各类产品的再制品和新品没有质量差异。

假设三:两类产品的生产提前期为零。生产商外包的产量计入总产量中。

1.2 模型建立

生产总成本由各类产品的生产总成本构成。产品*i*的生产总成本由生产成本、再造成本、处置成本、回收中的废旧产品库存成本、流通中的库存成本、缺货成本和积压损失成本构成。即:

产品*i*的生产成本:

$$C_p^i = K_i + v_i \tau_i Q \tag{1}$$

产品*i*的再造成本:

$$C_r^i = Z_i + z_i r_i \int_{e_i}^{f_i} \frac{y}{f-e} dy \tag{2}$$

产品*i*的处置成本:

$$C_d^i = D_i + d_i(1-r_i) \int_{e_i}^{f_i} \frac{y}{b_i-a_i} dy \tag{3}$$

产品*i*回收中的废旧品库存成本:

$$C_l^i = \frac{l_i}{2} \int_{e_i}^{f_i} \frac{y}{f-e} dy \tag{4}$$

产品*i*流通中的库存成本:

$$C_h^i = \frac{h_i}{2} \int_{e_i}^{f_i} \int_{a_i}^{\tau_i Q + r_i y} \frac{x}{(b_i-a_i)(f_i-e_i)} dx dy + \tag{5}$$

$$\int_{e_i}^{f_i} \int_{\tau_i Q + r_i y}^{b_i} \frac{\tau_i Q + r_i y}{(b_i-a_i)(f_i-e_i)} dx dy$$

产品*i*的缺货成本:

$$C_s^i = s_i \int_{e_i}^{f_i} \int_{\tau_i Q + r_i y}^{b_i} \frac{x - \tau_i Q - r_i y}{(b_i-a_i)(f_i-e_i)} dx dy \tag{6}$$

产品*i*的库存积压成本:

$$C_m^i = m_i \int_{e_i}^{f_i} \int_{a_i}^{\tau_i Q + r_i y} \frac{\tau_i Q + r_i y - x}{(b_i-a_i)(f_i-e_i)} dx dy \tag{7}$$

生产商生产总成本:

$$TC = \sum_{i=1}^N TC_i = \sum_{i=1}^N (C_p^i + C_h^i + C_d^i + C_l^i + C_s^i + C_m^i)$$

建立生产总成本目标函数(以下等式右边可从式子(1)-(7)计算得来):

$$\begin{aligned} MinTC = & \sum_{i=1}^N \left[ K_i + v_i \tau_i Q + Z_i + \frac{z_i r_i (e_i + f_i)}{2} + D_i + \right. \\ & \left. \frac{d_i(1-r_i)(e_i + f_i)}{2} + \frac{l_i(e_i + f_i)}{4} + \frac{h_i}{2} \frac{3Q^2 \tau_i^2 - 3a_i^2}{6(b_i - a_i)} + \right. \\ & \left. \frac{h_i}{2} \frac{3Q\tau_i r_i (e_i + f_i) + r_i^2 (e_i^2 + e_i f_i + f_i^2)}{6(b_i - a_i)} + \frac{s_i (Q\tau_i - b_i)^2}{2(b_i - a_i)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \left. s_i \frac{3r_i(Q\tau_i - b_i)(e_i + f_i) + r_i^2 (e_i^2 + e_i f_i + f_i^2)}{6(b_i - a_i)} + \right. \\ & \left. s_i \frac{3r_i(Q\tau_i - b_i)(e_i + f_i) + r_i^2 (e_i^2 + e_i f_i + f_i^2)}{6(b_i - a_i)} + \right. \\ & \left. \frac{h_i}{2} \frac{6b_i Q\tau_i - 6Q^2 \tau_i^2 + 3r_i(e_i + f_i)(b_i - 2Q\tau_i)}{6(b_i - a_i)} - \right. \\ & \left. \frac{h_i}{2} \frac{r_i^2 (e_i^2 + e_i f_i + f_i^2)}{3(b_i - a_i)} + \frac{m_i (Q\tau_i - a_i)^2}{2(b_i - a_i)} + \right. \\ & \left. m_i \frac{3r_i(Q\tau_i - a_i)(e_i + f_i) + r_i^2 (e_i^2 + e_i f_i + f_i^2)}{6(b_i - a_i)} \right] \tag{8} \end{aligned}$$

$$s.t. \sum_{i=1}^N \tau_i = 1 \tag{9}$$

2 模型求解

可采用拉格朗日乘数法求目标函数最优解,结合约束条件式子(9),在式子(8)引入拉格朗日乘数 $\lambda$ 后求偏导数,并令其为零得到:

$$\frac{\partial TC}{\partial \tau_i} = \frac{Q(2s_i + 2m_i - h_i)(e_i + f_i)}{4(b_i - a_i)} r_i + \frac{Q^2(2s_i + 2m_i - h_i)}{2(b_i - a_i)} \tag{10}$$

$$\tau_i + \frac{Q(b_i h_i - 2b_i s_i - 2a_i m_i)}{2(b_i - a_i)} + v_i Q - \lambda = 0$$

$$\frac{\partial TC}{\partial r_i} = \frac{(2s_i + 2m_i - h_i)(e_i^2 + e_i f_i + f_i^2)}{6(b_i - a_i)} r_i + \frac{Q(2s_i + 2m_i - h_i)(e_i + f_i)}{4(b_i - a_i)} \tag{11}$$

$$\tau_i + \frac{(z_i - d_i)(e_i + f_i)}{2} + \frac{(b_i h_i - 2b_i s_i - 2a_i m_i)(e_i + f_i)}{4(b_i - a_i)} = 0$$

由(10)、(11)两式构成方程组,求解出:

$$\tau_i = \frac{X_i \left( 1 - \sum_{i=1}^N Y_i \right)}{\sum_{i=1}^N X_i} + Y_i, r_i = \frac{-G_i - M_i \tau_i}{W_i}, \text{其中:}$$

$$X_i = 2(b_i - a_i) / Q^2 (2s_i + 2m_i - h_i) (e_i - f_i)^2$$

$$Y_i = \frac{6(b_i h_i - 2b_i s_i - 2a_i m_i) (e - f)^2}{Q(2s_i + 2m_i - h_i) (e_i - f_i)^2} +$$

$$\frac{6(b_i - a_i) (z_i - d_i) (e + f)^2 - 2v_i (b_i - a_i)}{Q(2s_i + 2m_i - h_i) (e_i - f_i)^2};$$

$$G_i = \frac{(z_i - d_i)(e_i + f_i)}{2} + \frac{(b_i h_i - 2b_i s_i - 2a_i m_i)(e_i + f_i)}{4(b_i - a_i)};$$

$$M_i = Q(2s_i + 2m_i - h_i)(e_i + f_i) / 4(b_i - a_i);$$

$$W_i = (2s_i + 2m_i - h_i)(e_i^2 + e_i f_i + f_i^2) / 6(b_i - a_i)。$$

3 数值计算与敏感性分析

3.1 数值计算

为了便于计算,考察生产商的产品系统为两种产品:产品1与产品2,即N=2,分别做以下赋值:[a<sub>1</sub>,b<sub>1</sub>]=[a<sub>2</sub>,b<sub>2</sub>]=

[500,800],  $[e_1, f_1]=[100,500]$ ,  $[e_2, f_2]=[200,600]$ 。初始产品总生产量  $Q=1000$ ,从生产总成本的目标函数当中可知固定成本不影响最优的决策,因此,仅考虑与产品生产成本的变动成本参数的影响(后一节做敏感性分析也是一样),取所有的固定成本参数等于0,具体为: $K_1=0, K_2=0, v_1=0.5, v_2=1, Z_1=0, Z_2=0, z_1=0.8, z_2=1.5, h_1=0.2, h_2=0.3, l_1=0.1, l_2=0.2, D_1=0, D_2=0, d_1=0.3, d_2=0.4, s_1=1.5, s_2=2.5, m_1=0.4, m_2=0.5$ 。

根据第3部分的结论计算数例的最优结果: $\tau_1=0.447, \tau_2=0.553, r_1=0.590, r_2=0.181, TC=1688.412$ 。

### 3.2 敏感性分析

取12个成本参数: $v_1, v_2, z_1, z_2, h_1, h_2, d_1, d_2, s_1, s_2, m_1, m_2$ 作为自变量,分析 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC的敏感性变化,分别绘制相对应敏感分析图2-13,由于篇幅所限,作者保留与图相对应的数据。

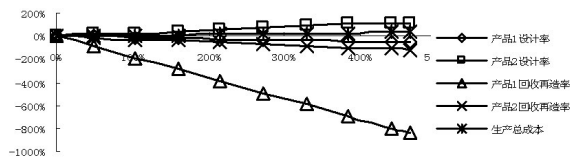


图2 基于 $v_1$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

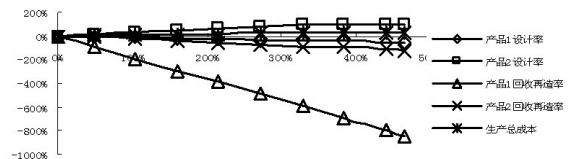


图3 基于 $v_2$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

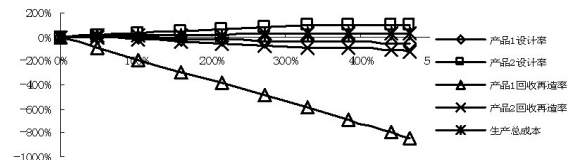


图4 基于 $z_1$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

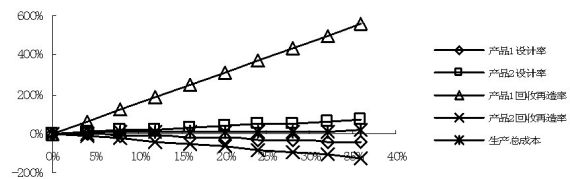


图5 基于 $z_2$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

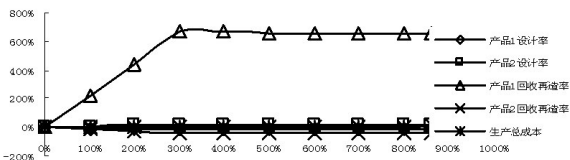


图6 基于 $d_1$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

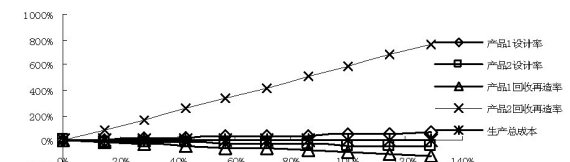


图7 基于 $d_2$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

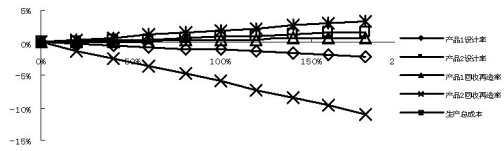


图8 基于 $h_1$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

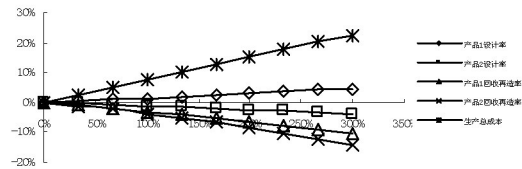


图9 基于 $h_2$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

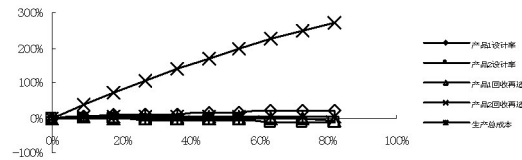


图10 基于 $s_1$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

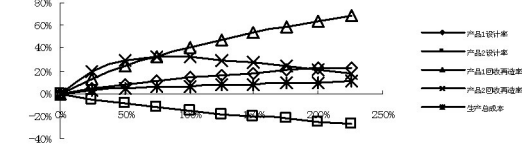


图11 基于 $s_2$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

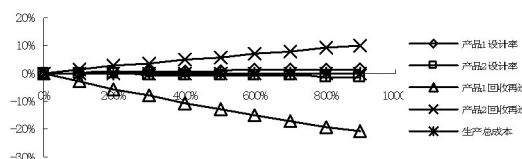


图12 基于 $m_1$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

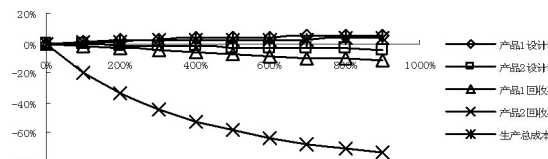


图13 基于 $m_2$ 的 $\tau_1, \tau_2, r_1, r_2$ 和TC敏感性分析图

从图2可看出,随着单位产品1的变动成本增加,生产商会小幅度降低产品1设计率而提高产品2设计率以弥补变动成本增加带来的损失,同时降低两种产品的回收再造率,但生产总成本在总体上会小幅度增加。

从图3可看出,随着单位产品2的变动成本增加,生产商会降低产品2设计率而提高产品1设计率以弥补变动成本增加带来的损失,同时提高了产品2的回收再造率,降低产品1的回收再造率,但生产总成本仅有微小波动。

从图4可看出,随着单位产品1再造的变动成本增加,生产商小幅度提高产品2设计率和产品2回收再造率,保持产品1设计率,大幅降低产品1的回收再造率就可以保证生产成本不受影响。

从图5可看出,随着单位产品2再造的变动成本增加,生产商较大幅度降低产品2的回收再造率,大幅度提高产品1的回收再造率,产品1设计率有微小的降低,产品2设计

计率有微小的提高,但生产总成本在总体上只有微小的增加。

从图6可看出,随着单位产品1的处置成本增加,生产商一开始会大幅度提高产品1的废旧品回收再造率,但达到一定增幅后会保持不变,同时保持产品1和产品2的设计率,保持产品2回收再造率水平,生产总成本在总体上受影响很微小。

从图7可看出,随着单位产品2的处置成本增加,生产商会大幅度提高产品2的回收再造率,并小幅度降低产品2设计率,小幅度增加产品1设计率,产品1的回收再造率有所降低,以保证生产总成本不受影响。

从图8可看出,随着流通中单位产品1的库存成本增加,生产商小幅度提高了产品2设计率和产品1的回收再造率,大幅度降低了产品2的回收再造率,但生产总成本有所增加。

从图9可看出,随着流通中单位产品2的库存成本增加,生产商小幅度降低产品2设计率,较大幅度提高产品1设计率,并且明显降低了两种产品的回收再造率,但生产总成本大幅度增加。

从图10可看出,随着产品1的缺货成本增加,生产商小幅度降低了产品2设计率,大幅度提高了产品2的回收再造率,而产品1回收再造率维持不变,但生产总成本不受影响。

从图11可看出,随着产品2的缺货成本增加,生产商会逐渐提高产品1设计率,大幅度提高产品1的回收再造率,产品2的回收再造率先提高后逐渐降低,但生产总成本会较大幅度增加。

从图12可看出,随着产品1的库存积压成本增加,生产商会大幅度降低产品1的回收再造率和大幅度提高产品2的回收再造率,而产品2设计率维持不变,但生产总成本不受影响。

从图13可看出,随着产品2的库存积压成本增加,生产商会小幅度降低产品2设计率和产品1回收再造率,大

幅度降低产品2回收再造率,但生产总成本小幅度增加。

综上所述,依据本例给出的数据做敏感性分析结果中,总产量一定的情况下,产品1与产品2的产量设计率呈反方向变化;生产总成本变化明显的情形是在流通中的两种产品的单位产品库存成本增加时(图8、图9所示),究其原因是因为两种产品的单位缺货成本均分别高于流通中的单位产品库存成本,调整两种产品的设计率和回收再造率参数均不能对冲流通中增加的库存成本。而在其它的情形下,生产总成本受影响很小。

#### 4 结论

本文研究了随机市场需求和回收数量情况下,生产商面对多样化产品系统总产量约束下,通过各种产品的产量最优分配和制定各产品的最优回收再造率,实现企业生产总成本最小化的经营目标。利用数学模型的最优解,在数例计算结果的基础上,基于12个成本参数,对各种产品的产量设计率和再造率进行敏感性分析。研究结果为生产商在实际情况下应对各成本参数的变化提供了可取的策略性选择,为生产商进行产品多样化设计和再造决策过程提供依据。此外,本文假定产品系统的再造产品和新产品没有差异,以及不考虑生产提前期的影响,如果扩展到所有生产商的实际经营过程中,那么在这两方面的研究还是有待深入。

#### 参考文献:

- [1]Van D L E, Salomon M, Dekker R, et al. Inventory Control in Hybrid Systems with Remanufacturing[J]. Management Science, 1999, 145(5).
- [2]Jing W, Jun Z, Xun W. Optimum Policy in Hybrid Manufacturing-remanufacturing System[J]. Computers & Industrial Engineering, 2011, 60(3).

(责任编辑/亦 民)