

金融资产交互相关的噪音干扰

孙坚强¹, 罗英²

(1. 华南理工大学 经济与贸易学院, 广东 广州 510006; 2. 厦门大学 管理学院, 福建 厦门 361005)

摘 要: 本文应用并扩展随机矩阵理论的检验方法, 实证检验资产组合协方差矩阵的噪音干扰。实证发现, 经验估计的协方差矩阵存在较程度的噪音干扰。表现在, 经验协方差矩阵的特征值较好地吻合随机矩阵的理论分布, 77.53% 的特征值落在随机矩阵的理论取值范围内, 并具有随机矩阵的普适性质。在过滤噪音后, 资产组合的风险估计偏误得到显著降低, 最小方差组合在评价期的风险水平显著降低。

关键词: 随机矩阵; 投资组合; 协方差矩阵; 最小方差组合

中图分类号: F832.5 文献标识码: A 文章编号: 1003-5192(2013)03-0019-05

The Noise to the Correlations Between Financial Returns

SUN Jian-qiang¹, LUO Ying²

(1. School of Economics and Commerce, South China University of Technology, Guangzhou 510006, China; 2. School of Management, Xiamen University, Xiamen 361005, China)

Abstract: The noise to the correlations between stocks returns are tested by using the RMT method. 77.53% of the eigenvalues of the sample covariance matrix are found to fall within the RMT bounds and agree with the universal properties predicted by RMT—implying a large degree of noise. The noise content of the covariance matrix is filtered by applying Mean-value, and Zero-value schemes. With the filtered matrix, the ex post risk of the minimum variance portfolio is reduced significantly.

Key words: random matrix; portfolio; covariance matrix; minimum variance portfolio

1 引言

金融资产之间的交互相关, 一直备受金融理论研究和业界实践的关注。对于资产组合, 资产收益的协方差矩阵或相关矩阵是关键的变量, 组合选择、风险管理等都决定于该矩阵。考虑由 N 个资产 $S_i (i=1, 2, \dots, N)$ 构成的资产组合 Π , 各个资产分配资本的权重为 $W = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N)$, 则该组合的风险 $\Omega^2 = W \Sigma W^T$ 。其中 Σ 正是 N 个资产收益的协方差矩阵, 其矩阵元素 $\sigma_{ij}^2 (i, j=1, 2, \dots, N)$ 为资产 S_i 和 S_j 的协方差, W^T 表示 W 的转置。可见, 协方差矩阵 Σ 的估计对资产组合风险的计算是决定性的。

但是, 至少存在两个相悖的原因使得协方差矩阵 Σ 的准确和稳健估计变得十分困难。一是维度灾难问题 (Curse of Dimensions)。协方差矩阵有 $N(N-1)/2$ 个待估计元素。如果可获取数据长度

为 L , 则数据量为 NL 。统计上要求数据长度 L 远远大于资产数量 N , 否则出现“维度灾难”问题。二是时变性问题 (Time Varying)。市场状况是时变的, 资产间的协方差也将因此随时间变化 (非恒定), 协方差矩阵存在时变的特征。一方面, 如果为了克服时变性而选用较短的近期数据, 则导致高程度的维度灾难。另一方面, 如果为了克服维度灾难而选用较长的数据, 却受时变性的影响, 并且多数情况下, 长样本数据难以获取。

正是因此, Laloux 和 Plerou 等学者^[1, 2] 提出质疑, 根据历史数据估计的协方差矩阵可能存在噪音干扰。对于协方差矩阵, 由此存在两个重要问题。一是协方差矩阵是否存在噪音干扰, 如何进行检验; 二是如果存在噪音干扰, 如何进行过滤。我们将采用并扩展随机矩阵理论的检验方法, 针对中国股票市场的资产组合, 试图分析上述问题。

收稿日期: 2012-11-18

基金项目: 国家社会科学基金资助项目 (09CJY013, 11CJY098); 教育部人文社会科学研究资助项目 (08JC790038); 广东省哲学社会科学“十一五”规划青年基金资助项目 (08YE-02); 广东高校优秀青年创新人才培养资助项目 (WYM08084); 中央高校科研业务费资助项目 (x2jmd2117980, x2jmd2118000)

2 文献综述

关于协方差矩阵噪音检验的问题。Laloux 和 Plerou 等学者^[1-2]提出质疑的同时,率先应用随机矩阵理论(Random Matrix Theory, RMT) 检验协方差矩阵噪音的存在,取得许多有意义的发现。如果经验估计的协方差矩阵存在随机干扰,则必然在一定程度上表现出随机矩阵的性质。因为随机矩阵是纯噪音,不携带真实信息。矩阵的信息表现在特征值谱上,因此,他们分解经验协方差矩阵的特征值谱,与同维随机矩阵的特征值谱进行对比。经验矩阵的特征值被分为两组,一组落在随机矩阵特征值的理论取值范围(也称 RMT 范围, Random Matrix Theoretical Bounds) 内,如果这部分特征值具有 RMT 普适性质(Universal Properties) 则为噪音特征值,不携带真实信息;另一组则在理论取值范围外(也称偏离 RMT 范围, Deviations from the RMT) 则为真实特征值,可能携带反映交互作用的真实信息。

Laloux 等^[1]研究 S&P500 指数 406 只样本股的资产组合。实证发现,经验矩阵只有约 6% 的特征值偏离 RMT 范围,而约 94% 落在 RMT 范围内,并且特征值分布与 RMT 理论分布较为吻合。实证证实了他们的推测,股票组合的经验相关矩阵在很大程度上具有随机矩阵的性质,存在较高级别的噪音干扰。因此,投资组合中使用经验矩阵必须更加谨慎。Plerou 等^[2]研究美国市值最大 1000 只股票的资产组合。实证也发现,经验相关矩阵的大部分特征值落在 RMT 范围内,且与 RMT 特征值分布较为吻合。在进行扩展后,这些特征值具有 RMT 的普适性性质。包括:(1) 特征值最近相邻间距(Nearest-neighbor Spacing) 服从 RMT 高斯正交系(Gaussian Orthogonal Ensemble, GOE) 的分布;(2) 特征值次相邻间距(Next-nearest-neighbor Spacing) 服从 RMT 高斯辛系(Gaussian Symplectic Ensemble, GSE) 的分布等。这些普适性质的验证,是经验矩阵存在噪音干扰的有力证据。

随机矩阵理论的分析思路为后来多数研究采用。包括对美国、日本等成熟金融市场的研究^[3-6],以及对南非、印度和中国等新兴金融市场的研究^[7-9]。这些研究都发现,根据历史数据估计的经验协方差矩阵或相关矩阵,其特征值分布与随机矩阵的理论分布较为吻合,绝大部分的特征值落入 RMT 范围,且具有 RMT 的普适性质。这意味着协方差矩阵在很大程度上具有随机矩阵的特征,存在随机噪音干扰。

关于噪音过滤问题的研究。对噪音特征值进行处理,是过滤噪音的出发点。Laloux 等^[10]提出均值过滤的机制,将全部噪音特征值替换为所有噪音特征值的平均值,以平均熨平的原理移除噪音。实证发现,根据原始矩阵获得的有效边界组合的事后风险比事前预测风险高出 3 倍,而根据过滤后矩阵获得的有效边界组合的事后风险只比预测风险高出 1.5 倍。这意味着,随机干扰噪音导致对组合风险预测的严重偏误。随机噪音的过滤,使得组合风险的估计和预测更为可靠,尽管事后风险总比事前预测风险高。Plerou 等^[3]提出零值过滤的机制,他们认为既然噪音特征值不携带真实信息,可以直接移除,他们因此将所有噪音特征值全部替换为零,直接过滤噪音。实证也发现,噪音的过滤显著降低资产组合有效边界的风险预测偏差,使用原始矩阵,有效边界组合的事后风险比预期风险高出约 170%,而使用过滤后的矩阵,事后风险比预期风险只高出约 25%。

均值过滤和零值过滤两种机制得到多数学者的认可和应用,如 Pafka, Potters 和 Kondor^[4] 以及 Daly^[11] 等。但这两种机制都存在过滤遗漏或者过度过滤的共同问题。Daly^[11] 比较了上述机制的过滤效果,资产组合数量不同,数据长度不同,两种机制的过滤效果各有优劣。

3 随机噪音的实证检验

3.1 经验估计的协方差矩阵与随机矩阵

记 $P_i(t)$ 为资产 $S_i (i=1, 2, \dots, N)$ 在第 t 天的价格,则该资产的日收益率定义为

$$r_i(t) = \ln P_i(t+1) - \ln P_i(t) \quad (1)$$

对于 N 个资产的组合,协方差矩阵 COV 的经验估计是

$$COV_{ij} = \frac{1}{L} \sum_{t=1}^L (r_i(t) - \bar{r}_i)(r_j(t) - \bar{r}_j) \quad i, j = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

其中 \bar{r}_i 为收益率的样本均值, L 为日收益率时间序列的长度。

由于对称性和正定性,协方差矩阵 COV 可以表示为 $COV = (1/L) SS^T$ 。其中 S 为 $N \times L$ 矩阵,对应 N 个资产的历史收益率的时间序列,每个序列的长度为 L 。

考虑 N 维的随机矩阵 $H, H = (1/L) AA^T$ 。其中矩阵 A 亦为 $N \times L$ 矩阵,矩阵 A 的元素为独立同分布的随机变量,具有零均值和有限方差 σ^2 。也即,矩阵 A 对应着 N 个长度为 L 的随机向量。矩阵 H

也称为 Wishart 矩阵^[12],是“纯噪音”矩阵。如果经验的协方差矩阵在一定程度上具有随机矩阵的性质,则可认为存在噪音干扰。

特征值和特征向量对矩阵的信息表示起着重要作用,因此,我们重点分析矩阵特征值谱的性质。定义矩阵特征值的密度函数为 $\rho(\lambda)$

$$\rho(\lambda) = \frac{1}{N} \frac{dn(\lambda)}{d\lambda} \quad (3)$$

其中 λ 为矩阵特征值, $n(\lambda)$ 表示特征值小于 λ 的个数。根据随机矩阵中心极限定理,当 $N, L \rightarrow \infty$ 且 $Q = L/N \geq 1$ 固定时,随机矩阵特征值的密度函数为

$$\rho(\lambda) = \frac{Q}{2\pi\sigma^2} \frac{\sqrt{(\lambda_{\max} - \lambda)(\lambda - \lambda_{\min})}}{\lambda}, \quad \lambda \in [\lambda_{\min}, \lambda_{\max}] \quad (4)$$

$$\lambda_{\min}^{\max} = \sigma^2 (1 + 1/Q \pm 2\sqrt{1/Q}) \quad (5)$$

其中 $[\lambda_{\min}, \lambda_{\max}]$ 为随机矩阵特征值的取值范围,也称为 RMT 范围, λ_{\min} 和 λ_{\max} 分别为 RMT 下界和 RMT 上界。

3.2 数据与预处理

选取上海证券交易所和深圳证券交易所 2011 年市值最大的 1000 只股票,时间范围为 2001 年 1 月 1 日至 2011 年 12 月 31 日,共 2662 个交易日。剔除缺失交易日超过 242 天的股票(2001 ~ 2011 年年平均交易日为 242 天),保留样本股票为 445 只。所选股票 2011 年成交金额占整个市场成交金额的 50.67%,2011 年市值占整个市场的 32.44%。所选股票平均交易日为 2567 天,占整个交易历史的 96.43%。数据来源于国泰安 CSMAR 中国股票市场交易数据库。对缺失交易数据采用 Wilcox 和 Gebbie^[7] 的线性插值方法进行处理。

3.3 基于特征值分布的检验

根据(2)式估计 445 只样本股票的协方差矩阵,进行特征值分解,特征值的分布 $P(\lambda)$ 如图 1 的梯状图所示。图 1 同时给出随机矩阵的特征值理论分布 $P_{RMT}(\lambda)$ 。对比发现,经验协方差矩阵的分布和随机矩阵的理论分布具有一定程度的吻合,大部分特征值落在 RMT 范围内,若干特征值偏离 RMT 范围,特别是上界。

对于 $N = 445$ 只股票, $L = 2661$ 天,则 $Q = 5.9798$ 。简单计算,随机矩阵特征值的理论上下界分别为 $\lambda_{\min} = 0.3494$, $\lambda_{\max} = 1.9851$ 。注意到有 12 个大于 RMT 上界, $\lambda > \lambda_{\max}$, 这些特征值明显偏离 RMT 上界,所携带的信息并非随机噪音。因此,将这些特征值在矩阵总方差的贡献移除,以便分析剩余特征值的谱结构。矩阵调整后的总方差为 $[\sigma_{ad}^2 = \sigma^2 (1 - \sum \lambda_{dev}/N)]$,其中 λ_{dev} 为偏离理论范围的特征值。当然,参数 σ^2 改变,(4)、(5)式对

应的理论分布随之改变,RMT 上下界亦随之改变。事实上,可以调整参数 σ^2 ,确定一个 RMT 分布,使之与经验矩阵的特征值分布吻合最好^[11]。我们移除最大两个特征值的方差贡献。调节后,RMT 下界为 $\lambda_{\min} = 0.1929$,RMT 上界为 $\lambda_{\max} = 1.0961$,整个 RMT 理论分布 $P_{RMT}(\lambda)$ 向左进行平移。相应地,经验矩阵有 38 个特征值偏离 RMT 上界,62 个特征值偏离 RMT 下界,共 100 个特征值偏离 RMT 范围,而 345 个特征值落在 RMT 范围内,比例高达 77.53%。也即,经验协方差矩阵大部分特征值落在随机矩阵对应的理论范围内,可能为噪音特征值,不携带真实信息。

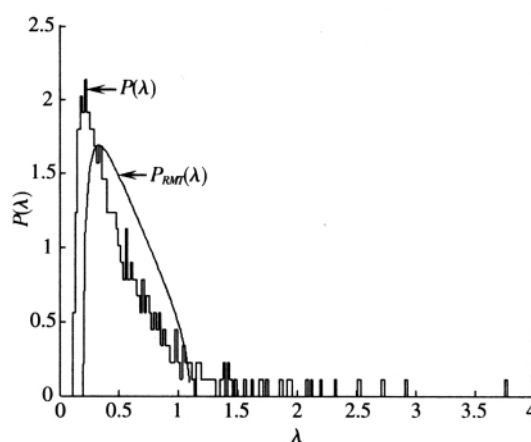


图 1 经验协方差矩阵的特征值分布 $P(\lambda)$ 与随机矩阵的特征值理论分布 $P_{RMT}(\lambda)$

3.4 基于特征值普适性质的检验

特征值分布相同的矩阵,可能有着不相同的谱结构^[13,14]。因此,判断落入 RMT 范围的特征值是否为噪音特征值,还需进一步检验这些特征值是否具有随机矩阵的普适性统计性质,包括特征值最近相邻间距和特征值次相邻间距的统计性质等。

在特征值谱的不同位置, λ_i 的间距单位不同。为了可比较,必须将原特征值 λ_i 映射变换为新的特征值 ζ_i ,使变换后的特征值具有一致的单位。该变换称为特征值的扩展, ζ_i 也称为扩展后的特征值。我们采用高斯变换,将矩阵特征值 λ_i 变换为 ζ_i ,特征值最近相邻间距和次相邻间距则分别定义为

$$s = \zeta_{k+1} - \zeta_k \quad (6)$$

$$l = \zeta_{k+2} - \zeta_k \quad (7)$$

对于实对称随机矩阵,最近相邻间距 s 服从高斯正交系随机矩阵的特征值最近相邻间距的分布^[13,14]

$$P_{GOE_{nn}}(s) = \frac{\pi s}{2} \exp\left(-\frac{\pi}{4}s^2\right) \quad (8)$$

特征值次相邻间距 l 则服从高斯辛系随机矩阵的特征值次相邻间距的分布^[13,14]

$$P_{GSE\ nnn}(l) = \frac{2^{18}}{3^6 \pi^3} l^4 \exp(-\frac{64}{9\pi} l^2) \quad (9)$$

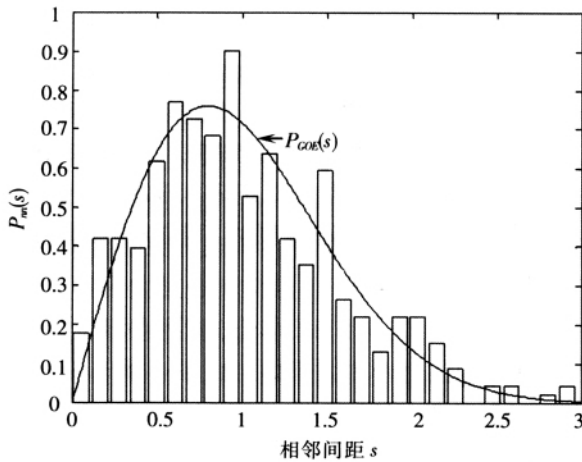


图2 经验协方差矩阵特征值最近相邻间距的密度分布 $P_{nn}(s)$ 和随机矩阵特征值最近相邻间距的密度分布 $P_{GOE}(s)$

图2 对比经验矩阵特征值最近相邻间距 s 的密度分布 $P_{nn}(s)$ (直方图) 和随机矩阵特征值最近相邻间距的理论密度分布 $P_{GOE}(s)$ (实线)。结果显示,二者分布具有较好的吻合。更为稳健地,我们采用 Kolmogorov-Smirnov (K-S) 统计量检验两者的吻合,结果如表1所示。结果表明,在 49.77% 的置信水平,不能拒绝经验矩阵特征值最近相邻间距服从 $P_{GOE}(s)$ 的原假设。

表1 RMT 范围内的特征值是否具有随机矩阵普适性质的 K-S 检验

零假设	经验矩阵特征值最近相邻间距服从 $P_{GOE}(s)$	经验矩阵特征值次相邻间距服从 $P_{GSE}(l)$
K-S 统计量	0.0404	0.0393
p 值	0.4977	0.5346

图3 对比经验矩阵特征值次相邻间距 l 的密度分布 $P_{nnn}(l)$ (直方图) 和随机矩阵特征值次相邻间距的理论密度分布 $P_{GSE}(l)$ (实线)。结果显示,二者的分布也具有较好的吻合。更为稳健地,表1的 K-S 检验显示,在 53.46% 的置信水平,不能拒绝经验矩阵特征值次相邻间距服从 $P_{GSE}(l)$ 的原假设。

综合上述实证,经验协方差矩阵 COV 的大部分特征值落入 RMT 范围,并且落入 RMT 范围内的特征值服从随机矩阵的普适性统计性质。这意味着这部分特征值为噪音特征值,证实经验协方差矩阵存在较高级别的噪音干扰。

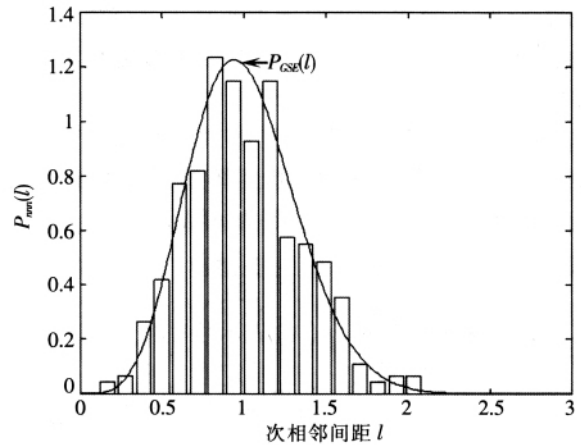


图3 经验协方差矩阵特征值次相邻间距的密度分布 $P_{nnn}(l)$ 和随机矩阵特征值次相邻间距的密度分布 $P_{GSE}(l)$

4 随机噪音的过滤

协方差矩阵存在随机噪音可能影响组合选择、风险管理等,不过滤噪音而直接使用,可能产生严重的风险度量偏误。接下来我们讨论随机噪音的过滤。

首先考虑 Laloux 等^[10]的均值过滤方法(也称 LCPB 机制),其基本思路是将矩阵的噪音特征值替换为所有噪音特征值的平均值,以平均原理熨平噪音,达到过滤的目的。LCPB 机制放宽噪音特征值的范围,所有小于 RMT 上界的特征值 $\{\lambda : \lambda < \lambda_{max}\}$ 界定为噪音特征值,记 $\bar{\lambda}$ 为所有噪音特征值的平均值,则过滤后的特征值集为 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{max}, \bar{\lambda}, \dots, \bar{\lambda}\}$ 。记 D_{LCPB} 为过滤后的特征值矩阵(对角线元素为特征值,其他元素为零)根据矩阵的分解定理,过滤噪音后的协方差矩阵为

$$COV_{LCPB} = E D_{LCPB} E^{-1} \quad (10)$$

其中 E 为原矩阵 COV 的特征向量矩阵。均值过滤法,保证过滤前的矩阵 COV 和过滤后的矩阵 COV_{LCPB} 具有相同的迹(矩阵对角线元素之和),两者的总方差信息相同,也即过滤机制并不破坏原始矩阵的总方差信息量。

我们采用最小方差组合 (Minimum Variance Portfolio) 来评价过滤效果。简单计算,最小方差组合对各资产分配权重如下

$$\omega_i^* = (\sum_{j=1}^n \Sigma_{ij}^{-1}) / (\sum_{j,k=1}^n \Sigma_{jk}^{-1}) \quad (11)$$

其中 Σ^{-1} 为 Σ 的逆。不同的协方差矩阵 Σ 将得到不同的最小方差组合。

将样本期 (2661 天) 分为两个阶段,估计期 (1661 天) 和评价期 (1000 天)。采用估计期的收

益率数据根据(2)式估计协方差矩阵 COV_H , 根据(11)式计算权重得到最小方差组合 $\Pi_{unfiltered}$, 根据评价期的收益率数据计算最小方差组合 $\Pi_{unfiltered}$ 在评价期的风险水平(组合收益率的标准差) $\Omega_{\min unfiltered}$ 。进一步, 采用均值过滤的方法过滤 COV_H 的噪音, 得到过滤后的协方差矩阵 COV_{LCPB} , 并相应得到新的最小方差组合 $\Pi_{filtered}$, 该组合在评价期的风险水平为 $\Omega_{\min LCPB}$ 。

计算得到, 原始协方差矩阵的最小方差组合 $\Pi_{unfiltered}$ 在评价期的风险水平为 $\Omega_{\min unfiltered} = 1.63\%$, 而过滤噪音后协方差矩阵的最小方差组合 $\Pi_{filtered}$ 在评价期的风险水平下降为 $\Omega_{\min LCPB} = 1.4\%$ 。简单计算

$$(\Omega_{\min LCPB} - \Omega_{\min unfiltered}) / \Omega_{\min unfiltered} = -14.04\% \quad (12)$$

也即, 采用均值过滤法对经验协方差矩阵过滤噪音, 显著降低最小方差组合在评价期的风险, 降低幅度约为 14.04%, 显著改进投资组合效率。

我们接着采用 Plerou 等^[3]提出的零值过滤法(也称 PGRAGE 机制), 其基本思路是, 将全部噪音特征值替换为零, 直接从矩阵中移除。过滤后的特征值集为 $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{\max}, 0, \dots, 0\}$ 。当然, 这将导致过滤后矩阵的迹不等于原始矩阵的迹。因此, 进一步令新矩阵的迹为原始矩阵的迹, 以保证总方差信息不受影响。

过滤后的特征值矩阵记为 D_{PGRAG} , 根据分解定理

$$COV_{PGRAG} = ED_{PGRAG}E^{-1} \quad (13)$$

将矩阵 COV_{PGRAG} 的迹替换为原矩阵 COV 的迹, 得到噪音过滤后的矩阵 COV_{PGRAG} 。

计算得到, 采用零值过滤机制, 过滤噪音后协方差矩阵的最小方差组合 $\Pi_{filtered}$ 在评价期的风险水平下降为 $\Omega_{\min PGRAG} = 1.38\%$, 下降的幅度为 15.70%, 略高于均值过滤机制

$$(\Omega_{\min PGRAG} - \Omega_{\min unfiltered}) / \Omega_{\min unfiltered} = -15.70\% \quad (14)$$

综合上述实证, 随机噪音的存在, 明显导致组合风险的估计偏误, 噪音的过滤显著提高组合选择效率。

5 结论

金融资产之间的交互相关是金融理论研究和实践的重要问题, 资产组合的协方差矩阵在许多重要的金融领域起着关键的作用。本文采用并拓展随机矩阵理论的检验方法, 研究我国股票市场资产组合的协方差矩阵的噪音干扰, 包括噪音的检验、过滤。主要的实证结论包括:

第一, 中国股票市场资产组合的协方差矩阵存在较高级别的噪音干扰。协方差矩阵的特征值分布与随机矩阵的理论分布较为一致, 77.53% 的特征值

落入随机矩阵的理论范围, 并且, 这部分特征值具有随机矩阵的普适性质, 为噪音特征值, 证实噪音干扰的存在。第二, 采用均值机制和零值机制对协方差矩阵的噪音进行过滤, 显著降低最小方差组合在评价期的风险水平, 明显改进投资组合的效率。

协方差矩阵存在噪音干扰得到众多学者的认可。但现有噪音过滤机制却存在共同不足, 可能导致过滤不足和误过滤。随机矩阵存在一个能级排斥的普适现象, 特征值因对数势而相互排斥。如果真实特征值被“排斥”进入噪音特征值的范围, 则存在误过滤; 如果噪音特征值被“排斥”进入真实特征值的范围, 则存在过滤不足。目前的均值和零值过滤方法尚未考虑到这种排斥现象。因此, 能有效识别噪音特征值的过滤方法是有待研究的问题之一。

参 考 文 献:

- [1] Laloux L, Cizeau P, Bouchaud J, et al. Noise dressing of financial correlation matrices [J]. Physical Review Letters, 1999, 83(7): 1467-1470.
- [2] Plerou V, Gopikrishnan P, Rosenow B, et al. Universal and nonuniversal properties of cross correlations in financial time series [J]. Physical Review Letters, 1999, 83(7): 1471-1474.
- [3] Plerou V, Gopikrishnan P, Rosenow B, et al. Random matrix approach to cross correlations in financial data [J]. Physical Review E, 2002, 65(6): 066126-1-066126-18.
- [4] Pafka S, Potters M, Kondor I. Exponential weighting and random-matrix-theory-based filtering of financial covariance matrices for portfolio optimization [EB/OL]. <http://arxiv.org/abs/cond-mat/0402573>, 2004-02-24.
- [5] Utsugi A, Ino K, Oshikawa M. Random matrix theory analysis of cross correlations in financial markets [J]. Physical Review E, 2004, 70(2): 026110-1-026110-17.
- [6] Daly J, Crane M, Ruskin H J. Random matrix theory filters in portfolio optimization: a stability and risk assessment [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2008, 387(16): 4248-4260.
- [7] Wilcox D, Gebbie T. An analysis of cross-correlations in an emerging market [J]. Physica A: Statistical Mechanics and Its Applications, 2007, 375(2): 584-598.
- [8] Pan R K, Sinha S. Collective behavior of stock price movements in an emerging market [J]. Physical Review E, 2007, 76(4): 046116-1-046116-10.
- [9] 罗英. 股票市场资产交叉相关的随机信息与真实信息研究[D]. 厦门: 厦门大学, 2010.
- [10] Laloux L, Cizeau P, Potters M, et al. Random matrix theory and financial correlations [J]. International Journal of Theoretical and Applied Finance, 2000, 3(3): 391-397.
- [11] Daly J. Stability-based, random matrix theory filtering of financial portfolios [D]. Ublin City University, 2009.
- [12] Baker T H, Forrester P J, Pearce P A. Random matrix ensembles with an effective extensive external charge [J]. Journal of Physics A: Mathematical and General, 1998, 31(29): 6087-6101.
- [13] Brody T A, Flores J, French J B, et al. Random-matrix physics: spectrum and strength fluctuations [J]. Reviews of Modern Physics, 1981, 53(3): 385-480.
- [14] Metha M L. Random matrices [M]. New York: Academic Press, 1991.