

学校编码: 10384

分类号 \_\_\_\_\_ 密级 \_\_\_\_\_

学号: 18120051301658

UDC \_\_\_\_\_

廈門大學

硕士学位论文

费米气体热力学性质的若干理论研究

Theoretical Investigations on the Thermodynamic  
Properties of Fermi Gases

蔡淑宽

指导教师姓名: 苏国珍 教授

专业名称: 凝聚态物理

论文提交日期: 2008 年 5 月

论文答辩时间: 2008 年 6 月

学位授予日期: 2008 年 月

答辩委员会主席: \_\_\_\_\_

评 阅 人: \_\_\_\_\_

2008 年 5 月

厦门大学博硕士学位论文摘要库

# 厦门大学学位论文原创性声明

兹提交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士学位论文摘要库

# 厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1. 保密（ ），在年解密后适用本授权书。
2. 不保密（）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名：                      日期：              年              月              日

导师签名：                      日期：              年              月              日

厦门大学博硕士学位论文摘要库

## 摘要

实验上超冷简并费米气体的获得及分子 BEC (玻色-爱因斯坦凝聚) 的成功观测, 使得对低温费米气体性质的理论研究成为一个热门话题。本论文对超冷费米气体的热力学性质做了若干理论研究, 研究内容包括: 球对称外势约束下弱相互作用费米气体的坐标和动量分布, 考虑正一反粒子对产生的相对论性理想费米气体的热力学性质以及满足  $q$ -形变统计的理想费米气体的性质特征。本论文得到的结论将有利于进一步深入理解低温下费米气体的简并特性, 为揭示各种宏观量子效应的实质提供理论参考。本论文的主要内容安排如下:

第二章基于平均场近似, 研究了球对称外势约束下弱相互作用费米气体的坐标和动量分布, 探讨了外势、粒子间相互作用和系统温度对粒子在两空间分布的影响。研究表明, 当温度  $T = 0K$  时, 无论在坐标空间还是动量空间, 粒子均分布在一定半径的球形区域内。为此我们引入了坐标空间和动量空间“费米球”的概念, 并讨论了外势形状和粒子间相互作用对“费米球”大小的影响。当  $T \neq 0K$  时, 费米球边界的部分粒子跃迁到球外, 使得两空间的“费米球”边界变得模糊起来。研究还发现, 粒子间的相互作用对坐标分布和动量分布的影响不同: 排斥相互作用力使得坐标分布曲线更为平缓, 却使得动量分布曲线更为陡峭。

第三章分析了满足相对论能量色散关系的费米气体的热力学性质, 并讨论了相对论效应和正一反粒子对产生对系统性质的影响。结果表明, 当粒子的动能接近或超过其静止能量时, 即使当温度  $T \rightarrow 0K$  时, 相对论效应也不可忽略。正一反粒子对产生对系统低温特性的影响可以忽略不计, 但对高温特性产生显著的影响, 其中包括高温下化学势  $\mu \rightarrow 0$  的渐近特征以及热容在高温区随温度的升高而迅速增大等。

第四章研究了满足一般能量色散关系的  $q$ -形变理想费米系统的热力学性质。结果指出, 当  $q \neq 1$  时,  $q$ -形变费米系统的诸多性质与传统费米系统的不同, 而当  $q \rightarrow 1$  时,  $q$ -形变费米系统与传统费米系统的性质趋于一致。由此可以认为,  $q$ -形变费米统计是一种更为广义的统计理论。

**关键词:** 费米气体; 坐标和动量分布; 热力学性质

厦门大学博硕士学位论文摘要库



## ABSTRACT

The achievements of degenerate Fermi gases and the successful observations of molecular BEC (Bose-Einstein condensation) in experimental researches have created a wave of renewed interest in the theoretical study of the low temperature properties of Fermi gases. The dissertation is contributed to the investigations on the thermodynamic characteristics of ultracold Fermi gases, which include the spatial and momentum distributions of a weakly interacting Fermi gas trapped in a spherical-symmetric external potential, the thermodynamic properties of a relativistic ideal Fermi gas with particle-antiparticle pair production and the properties of an ideal Fermi gas with  $q$ -deformed Fermi-Dirac distribution. The results obtained here may be helpful to the further understanding of the degenerate behaviors of Fermi gases at low temperatures and the underlying nature of various macroscopic quantum effects. The main contents are arranged as follows:

In Chapter 2, the spatial and momentum distributions of a weakly interacting Fermi gas trapped in a spherical symmetric power-law potential are investigated, based on the mean field approximation. The effects of the external potential, interatomic interaction and temperature on the spatial and momentum distributions are discussed. It is shown that, when  $T = 0K$ , all the particles distribute inside the spherical region with a certain radius in both the coordinate and momentum spaces, and consequently, the concept of “Fermi spheres” in the two spaces is introduced. The problem of how the sizes of the “Fermi spheres” depend on the external potential and interatomic interaction is discussed. When  $T \neq 0K$ , some particles escape out of the “Fermi spheres” and the distribution curves become smoother. In addition, it is found that the effects of the interatomic interaction on the spatial and momentum distributions are different: the repulsive interaction results in the smoother spatial distribution curve but steeper momentum distribution curve.

In Chapter 3, the thermodynamic properties of relativistic Fermi gas are studied, in which the effects of particle-antiparticle pair production are taken into account. It is shown that when the kinetic energy of a particle is comparable with its static energy, the relativistic effects can not be ignored even when  $T \rightarrow 0K$ . It is also observed that the effects of the pair production are negligible at low temperatures, but may results in

some novel characteristics at high temperatures, which include the asymptotic behavior of  $\mu \rightarrow 0$  and the rapid increase of the heat capacity in the high temperature regions, etc..

In Chapter 4, the thermostatic properties of a  $q$ -deformed Fermi gas with a general energy spectrum are researched. It is revealed that the thermostatic properties of  $q$ -deformed Fermi gases are different from those of ordinary ones. However, if  $q \rightarrow 1$ , all the properties of  $q$ -deformed Fermi gases will reduced to those of the ordinary Fermi systems. This indicates that  $q$ -deformed statistics may be considered as a more generalized statistical theory.

**Keywords:** Fermi gas; the spatial and momentum distribution; thermodynamic property

|  |           |
|--|-----------|
| <b>第一章 引言 .....</b>                          | <b>1</b>  |
| 1.1 简并费米气体及费米凝聚体的实验进展 .....                  | 1         |
| 1.2 超冷费米气体的理论研究及进展 .....                     | 6         |
| 1.3 本论文的研究内容及安排 .....                        | 6         |
| 参考文献 .....                                   | 7         |
| <b>第二章 外势中弱相互作用费米系统的坐标和动量分布 .....</b>        | <b>11</b> |
| 2.1 $T=0K$ 时费米气体的坐标和动量分布 .....               | 12        |
| 2.2 $T\neq 0K$ 时费米气体的坐标和动量分布 .....           | 16        |
| 2.3 小结 .....                                 | 19        |
| 参考文献 .....                                   | 19        |
| <b>第三章 相对论费米气体的热力学性质 .....</b>               | <b>21</b> |
| 3.1 相对论费米气体的热力学量 .....                       | 22        |
| 3.2 弱相对论近似 .....                             | 23        |
| 3.3 强相对论近似 .....                             | 25        |
| 3.4 结果与讨论 .....                              | 26        |
| 3.5 小结 .....                                 | 28        |
| 参考文献 .....                                   | 29        |
| <b>第四章 <math>q</math>-形变费米气体的热力学性质 .....</b> | <b>31</b> |
| 4.1 $q$ -形变代数与 $q$ -形变费米子的统计分布 .....         | 31        |
| 4.2 $q$ -形变费米子的热力学量表达式 .....                 | 33        |
| 4.3 $q$ -形变费米子的高、低温特性 .....                  | 35        |
| 4.4 结果与讨论 .....                              | 37        |
| 4.5 小结 .....                                 | 40        |
| 参考文献 .....                                   | 40        |
| <b>第五章 结束语 .....</b>                         | <b>44</b> |

|                  |    |
|------------------|----|
| 在学期期间完成的论文 ..... | 46 |
| 致谢 .....         | 47 |

厦门大学博硕士论文摘要库

## CONTENTS

|  |           |
|--|-----------|
| <b>Chapter 1 Introduction.....</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1 Realization of Fermi degeneracy and fermionic condensate in experimental researches .....                                    | 1         |
| 1.2 Present status of the theoretical investigations on the ultracold Fermi gases.....   | 6         |
| 1.3 Outline of the dissertation .....  | 6         |
| References .....   | 7         |
| <b>Chapter 2 The spatial and momentum distributions of a weakly interacting Fermi gas trapped in an external potential .....</b> | <b>11</b> |
| 2.1 The spatial and momentum distributions of the Fermi gases when $T=0K$ .....  | 12        |
| 2.2 The spatial and momentum distributions of the Fermi gases when $T\neq 0K$ ....   | 16        |
| 2.3 Summary.....   | 19        |
| References .....   | 19        |
| <b>Chapter 3 Thermodynamic properties of a relativistic Fermi gas .....</b>  | <b>21</b> |
| 3.1 Thermodynamic quantities of a relativistic Fermi gas .....   | 22        |
| 3.2 Weak-relativistic limit.....   | 23        |
| 3.3 Strong-relativistic limit .....  | 25        |
| 3.4 Conclusions and discussion .....   | 26        |
| 3.5 Summary.....   | 28        |
| References .....   | 29        |
| <b>Chapter 4 Thermodynamic properties of a q-deformed Fermi gas.....</b>   | <b>31</b> |
| 4.1 q-deformed fermion algebra and the distribution of the q-deformed fermions .....   | 31        |
| 4.2 Thermostatistic properties of q-fermions .....   | 33        |
| 4.3 Low and high-temperature behaviors of q-fermions.....  | 35        |
| 4.4 Conclusions and discussion .....   | 37        |
| 4.5 Summary.....   | 40        |
| References .....   | 40        |
| <b>Chapter 5 Summary .....</b>   | <b>44</b> |

**Publication list**..... 46

**Acknowledgements** ..... 47

厦门大学博硕士论文摘要库

## 第一章 引言

### 1.1 简并费米气体及费米凝聚体的实验进展

当气体的温度足够低或密度足够大时,即平均热波长达到粒子间的平均距离的数量级时,气体的量子简并特性变得十分显著[1-3]。微观粒子按照自旋角动量的不同可分为玻色子和费米子两大类:自旋角动量量子数为 $1/2$ 的偶数倍的为玻色子,自旋角动量量子数为 $1/2$ 的奇数倍的为费米子。由玻色子组成的系统,其波函数是对称的,满足玻色-爱因斯坦统计规律;由费米子组成的系统,其波函数是反对称的,满足费米-狄拉克统计规律。由于它们遵循不同的统计规律,因此,玻色气体和费米气体的性质有很大的差异。

玻色气体存在一临界温度 $T_c$ ,当系统温度降低到 $T < T_c$ 时,将出现大量粒子同时处在最低的能态(基态),这就是1925年爱因斯坦预言的著名的玻色-爱因斯坦凝聚(BEC)现象[1]。1995年,美国有3个小组应用外势阱约束、激光冷却和蒸发冷却等技术分别在铷( $^{87}\text{Rb}$ )、锂( $^7\text{Li}$ )、钠( $^{23}\text{Na}$ )原子蒸气中观测到玻色-爱因斯坦凝聚[4-6]。BEC的实现具有重要的意义,BEC凝聚态被称为“物理学家在创记录的低温下产生的新物态”。2001年,JILA (Joint Institute Laboratory Astrophysics) 实验小组的Carl Wieman和Eric Cornell以及MIT (Massachusetts Institute of Technology)的Wolfgang Ketterle由于实现气态碱金属原子的BEC及其基本性质的研究,荣获当年的诺贝尔物理学奖。BEC在实验上的实现也使得对BEC相关理论的研究成为物理学研究的一大热点,许多学者都从理论上对玻色系统的各种性质进行探讨并获得大量重要的结论[7-10]。

对于费米气体,由于受泡利不相容原理限制,即使在低温下,费米子也不能凝聚到单一的量子态。当温度趋于绝对零度时,费米子将以“每人一级”的方式尽可能地占满能量较低的量子态,产生费米简并现象。在孤立原子系统中,核外电子具有壳层结构;在金属或半导体中,电子由低到高逐级填充那些分立的量子态,形成动量空间的费米面。这些都是费米简并的结果。通常费米简并现象可在常温下实现,例如,固体中的电子,其费米能级约为几个 eV,对应的费米温度

$T_F \sim 10^4 K$ ，此时室温所产生的热骚动对电子的能态分布影响极小，所以大部分室温下的金属或半导体，其电子都处于高度简并的状态。又如，白矮星中心的温度虽然达到 $10^7 K$ ，但由于白矮星具有极高的密度，其中电子的费米温度更是高达 $T_F \sim 10^{10} K$  [11]，因此白矮星中的电子也是高度简并的。

然而，对于稀薄的费米气体，情况则有所不同。稀薄费米气体由于其密度比固体中的电子密度小得多，其费米能级要比固体中电子系统的低十几个数量级，因而要实现费米简并，也需要极低的温度。对于费米气体，蒸发冷却要比对玻色气体困难很多。在蒸发冷却过程中，原子间需要频繁的碰撞，以便原子间不断交换能量。然而，由于受泡利不相容原理的约束，同一内部态的费米原子间不可能产生s波散射，故而对于具有相同内部态的费米原子气体，不能进行有效的蒸发冷却。目前这一问题可以通过几种方法得以有效解决[12]。第一种方法是同时捕获玻色子和费米子（如 $^7\text{Li}$ 和 $^6\text{Li}$ ）两种原子，在低温下玻色子和费米子产生相互碰撞，使得系统出现新的热力学分布，从而实现蒸发冷却。另一种方法是在低温下通过施加一个静态电场增加p波碰撞截面来实现相同费米原子间的碰撞。第三种方法是用磁势阱去成倍地增加原子的自旋态。在低温时，不同塞曼能级的s波散射是允许的，因为两个原子的自旋波函数可以通过变换变为反对称的。这一方法最先被JILA小组的科学家用到 $^{40}\text{K}$ 费米原子的蒸发冷却中。

1999年，JILA小组的D. S. Jin和她的研究生成功地将100万个 $^{40}\text{K}$ 费米原子冷却到300nk（约为费米温度的一半），从而第一次获得了服从费米-狄拉克统计的宏观客体[13]。Jin等采取的对策是：同时捕获两种处于不同塞曼（Zeeman）子能级（ $|F=9/2, m_F=9/2\rangle$ 和 $|F=9/2, m_F=7/2\rangle$ ，其中 $F$ 和 $m_F$ 分别表示超精细自旋及其分量）的 $^{40}\text{K}$ 原子，依靠这两类原子彼此的碰撞（ $m_F=9/2$ 与 $m_F=7/2$ 的碰撞不受泡利原理限制）达到有效的蒸发冷却。在300nk的低温下，费米能级以内的量子态约有60%被占据。虽然在300nk温度下系统还未达到完全的费米简并，但因简并而产生的排斥作用已经清晰地显现出来——超冷 $^{40}\text{K}$ 原子云的尺寸不再进一步地缩小。这一现象与中子星平衡重力坍缩具有相同的机制。Jin等人实验上第一次将稀薄的费米气体冷却到费米温度以下，并从能量和动量分布等方面给出了量子简并行为的明确证据（图1.1），开拓出关于费米气体研究的新领域。



Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to [etd@xmu.edu.cn](mailto:etd@xmu.edu.cn) for delivery details.

厦门大学博硕士论文摘要库