学校编号：10384　　　　分类号：________密级：________
学　　号：200423012　　UDC：________________

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

Stein 流形局部 q- 凸楔形上的 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计

Uniform Estimates of Solutions of $\bar{\partial}$-Equations on Local q-Convex Wedges in Stein Manifolds

翁　桂　英

指导教师姓名：　邱　春　晖　教授

专 业 名 称：　基　础　数　学

论文提交日期：　2007 年　4　月

论文答辩时间：　2007 年　　月

学位授予日期：　2007 年　　月

答辩委员会主席：________

评　　阅　　人：________

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文, 是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或者指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目　　录

Contents

摘　要

熟知 Stein 流形是一个极其重要的流形，在 Stein 流形上有很多非常数的全纯函数． $\mathbb{C}^n$ 就是一个 Stein 流形，所以在 Stein 流形上研究多元复分析是很自然的．积分表示方法是多元复分析的主要方法之一，它的主要优点是象单复变数的 Cauchy 积分公式一样便于估计．过去人们已经得到了许多 $\mathbb{C}^n$ 以及 Stein 流形逐块光滑强拟凸域上为解 $\bar{\partial}-$ 方程所需的积分公式，由此也得到了一些 $(0,s)$ 型微分形式的 $\bar{\partial}-$ 方程解的 Hölder 估计和一致估计．C.Laurent-Thiebaut &J.Leiterer[10] 引进局部 q- 凸楔形，它是逐块光滑强拟凸域的拓广，从而得到了 $\mathbb{C}^n$ 上局部 q- 凸楔形的 Cauchy-Riemann 方程解的一致估计．钟同德 [14] 利用 Hermitian 度量和陈联络 [13] 得到了 Stein 流形局部 q- 凸楔形上 (r,s) 型微分形式的的同伦公式和 $\bar{\partial}$- 方程的解，在此基础上作者利用 C.Laurent–Thiebaut &J.Leiterer[10] 的思想和 R.M.Range & Y.T.Siu[8] 的方法，得到 Stein 流形上局部 q- 凸楔形上 (r,s) 型微分形式的 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计.

全文分三章，主要是把 $\mathbb{C}^n$ 上的局部 q- 凸楔形上的 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计推广到 Stein 流形上．本文假定 X 是一复 n 维 Stein 流形， $D \subset\subset X$ 是一开集.

第一章介绍了 Stein 流形上的一些定义，基本定理和记号，包括 Stein 流形，复切丛，复余切丛，纤维以及最重要的基本定理等.

第二章介绍了钟同德 [14] 的工作，首先引入 Stein 流形上局部 q- 凸楔形，然后利用 Hermitian 度量和陈联络 [13], 并给出了相应的 Leray 映射，得到了 Stein 流形局部 q- 凸楔形上的同伦公式和 $\bar{\partial}$- 方程的解．得到的公式不含边界积分，从而避免了边界积分的复杂估计．由于局部 q- 凸楔形是逐块光滑强拟凸域的拓广，所以得到的同伦公式是有普遍意义的，它在 q- 凸楔形上 $\bar{\partial}$-方程的解的一致估计和 CR- 流形的全纯开拓上有重要作用.

第三章应用 C.Laurent-Thiebaut & J.Leiterer[10] 的思想，利用 Hermitian 度量和陈联络 [13], 以及局部化技巧，首先给出了 Stein 流形局部 q- 凸楔形

上 $(r,s)(r>0,s>0)$ 型微分形式的积分算子 H 核的一些估计，然后利用 R.M.Range & Y.T.Siu[8] 的方法得到了 Stein 流形局部 q- 凸楔形上 (r,s) 形式的 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计.

关键词： Stein 流形；局部 q- 凸楔形； Hermitian 度量；陈联络；一致估计.

ABSTRACT

It is well known that a Stein manifold is a very important manifold on which there are many nonconstant holomorphic functions. $\mathbb{C}^n$ is just a Stein manifold. So it is very natural to research into complex analysis in several variables on Stein manifolds. The integral representation method is one of main methods of complex analysis in several variables. In the past, many integral formulas for solving the $\bar{\partial}$-equations on $\mathbb{C}^n$ and Stein manifolds were obtained. Based on these integral formulas, the Hölder estimates and uniform estimates of solutions of the $\bar{\partial}$–equations for $(0,s)$ differential forms were also given. C. Laurent-Thiebaut & J. Leiterer[10] introduced local q-convex wedges in $\mathbb{C}^n$, which are extensions of piecewise smooth pseudoconvex domains, obtained the homotopy formula and the uniform estimates for the Cauchy-Riemann equation on q-convex wedges in $\mathbb{C}^n$. By using the Hermitian metric and Chern connection[13], Tongde Zhong[14] obtained the homotopy formlas for (r,s) differential forms and solutions of $\bar{\partial}$-equation on local q-convex wedges in Stein manifolds. On the basis of [10,14], by means of the ideas of C. Laurent-Thiebaut & J. Leiterer[10] and trick of Range & Siu[8] , the author obtains the uniform estimates of the solutions of $\bar{\partial}$-equations for (r,s) differential forms on local q-convex wedges in Stein manifolds.

The whole dissertation includes three chapters. The aim of this paper is to generalize the uniform estimates of solutions of $\bar{\partial}$-equations on local q-convex wedges in $\mathbb{C}^n$ to Stein manifolds. Suppose that X is a Stein manifold of complex dimension n and $D \subset\subset X$ is an open set.

In the first chapter, the author introduces some definitions, the basic lemma and notations on Stein manifolds, including a Stein manifold, the complex tangent bundle, the complex cotangent bundle, fibre, and the most important basic lemma and so on.

In the second chapter, the results of Tongde Zhong[14] are introduced. The local q-convex wedges in stein manifolds are defined. Then, by means of the Hermitian metric and Chern connection[13],Tongde Zhong[14] constructed a Leray map, and obtained the homotopy formulas and solutions of $\bar{\partial}$-equation on local q-convex wedges in stein manifolds.The integral formula does not involve boundary integrals, so one can avoid complex estimates of the boundary integrals. Moreover, a local q-convex wedges in Stein manifolds is an extension of piecewise smooth pseudoconvex domain, so the homotopy formula has its generalization meaning, it has important applications in uniform estimates of $\bar{\partial}$-equation and holomorphic extension of CR-manifolds.

In the third chapter,by means of the ideas of C. Laurent-Thiebaut and J. Leiterer[10], and by introducing the Hermitian metric and Chern connection[13] and using of the localization technique, the author admits some estimate of the integral operator H for $(r, s)(r > 0, s > 0)$ differential forms on local q-convex wedges in Stein manifolds. Then by means of the trick of Range-Siu trick[8] the authors complicatedly calculate the uniform estimates of solutions of $\bar{\partial}$-equation on local q-convex wedges in Stein manifolds.

Key words: Stein manifold; local q-convex wedge; Hermitian metric; Chern connection; uniform estimate.

Stein 流形局部 q- 凸楔形上的 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计 *

引 言

现代数学的特点之一是高维，而多元复分析正是反映这一特点的方向之一. 多元复分析研究的主要内容是复流形的分析与复几何，而多复变与复几何是一门交叉性极强的方向，反映了数学的统一性，是现代数学的核心与前沿之一. 由于内容十分广泛和深刻，所以几乎用到现代数学的所有方法.

早在 1831 年， Cauchy 发现了以其名字命名的著名的 Cauchy 积分公式，数学家就认识到积分表示在复分析中的重要性. 自从上个世纪 70 年代 G.M.Henkin[1,2] 和 H.Grauert & I.Lieb[3] 分别得到了 $\mathbb{C}^n$ 空间中强拟凸域上 $\bar{\partial}$- 方程的解的积分公式后，多复变数的积分表示方法迅速发展起来，成为多元复分析的主要方法之一，它的主要优点是象单变数的 Cauchy 积分公式一样便于估计.

熟知， $\mathbb{C}^n$ 空间中全纯函数和光滑函数的积分表示及其应用已经有许多研究 [1−6], 自从 W.Koppelman[7] 于 1967 年得到了 $\mathbb{C}^n$ 空间中 $(0,s)$ 型微分形式的 Koppelman 公式. 有关 $\mathbb{C}^n$ 空间中 $(0,s)$ 型微分形式的积分表示理论也已经有许多研究 [4−6]. 1970 年 G.M.Henkin[1] 和 H.Grauert & I.Lieb[3] 开始了对 $\mathbb{C}^n$ 空间中具有光滑边界的强拟凸域上的 $\bar{\partial}$- 方程解进行研究. 1973 年 R.M.Range & Y.T.Siu[8] 首先给出了 $\mathbb{C}^n$ 空间中具有逐块光滑边界的强拟凸域上 $(0,s)$ 型 Koppelman-Leray-Norguet 公式及其 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计. 对于一般的具有逐块光滑边界的强拟凸多面体， G.M.Henkin & E.M.Chirka[9] 给出了 Koppelman-Leray-Norguet 公式及其 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计.

1993 年 C.Laurent-Thiebaut & J.Leiterer[10] 构造了一个关于 λ 是非线性的 Leray 映射，从而得到了 $\mathbb{C}^n$ 中局部 q- 凸楔形上的同伦公式和 $\bar{\partial}$- 方

* 国家自然科学基金资助项目 (项目批准号： 10571144) 和厦门大学新世纪优秀人才计划.

程解的一致估计. 对于 $q = n - 1$, 由定义，局部 q- 凸楔形是逐块光滑强拟凸邻域. 因此局部 q- 凸楔形代表了一类很广泛的域，它被 G.M.Henkin & R.A.Airapetjan[11], A.Andreotti & H.Grauert[12] 等广泛应用于讨论 CR 流形，切线 Cauchy-Riemann 方程， CR- 函数的全纯开拓和 $\bar{\partial}$- 上同调理论.

J.P.Demaily & C.Laurant-Thiebaut [13] 研究 Stein 流形上的 (r, s) 型微分形式的积分公式，它和 $\mathbb{C}^n$ 的 (r, s) 型微分形式及 Stein 流形上的 $(0, s)$ 型微分形式不同，这时不能像 $\mathbb{C}^n$ 空间一样采用 Euclid 度量，因为此时 Euclid 度量不是全纯变换下的不变度量，为了解决不变度量的问题， J.P.Demaily & C.Laurant-Thiebaut [13] 利用 Hermitian 度量和陈联络，构造了 Stein 流形关于 (r, s) 型微分形式在不变度量下的积分核，得到了 Stein 流形上 Koppelman 公式和 Koppelman-Leray-Norguet 公式和 $\bar{\partial}$- 方程的解，这个思想非常重要. 在此基础上钟同德 [14] 利用 Hermitian 度量和陈联络，构造了 Stein 流形局部 q- 凸楔形上 (r, s) 微分形式在不变度量下的各种积分核，得到了 Stein 流形局部 q- 凸楔形上的同伦公式和 $\bar{\partial}$- 方程的解. 如此得到的公式不含有边界积分，从而避免了边界积分的复杂估计，并且积分核也不必定义在边界上而只需定义在区域内，它可来讨论全纯开拓的问题.

接着自然是对由积分公式给出的 $\bar{\partial}$- 方程进行估计. 首先给出了 $\mathbb{C}^n$ 空间中有 C^2 边界的强拟凸开集和强拟凸域上的 $\bar{\partial}$- 方程解具有 1/2-Hölder 估计. 接着又得到一系列的 $\mathbb{C}^n$ 中边界非光滑和边界逐块 C^1 光滑的强拟凸域以及强拟凸多面体上的 $\bar{\partial}-$ 方程的解具有一致估计 [4−6]. 1970 年， G.M.Henkin[2] 利用由 Henkin 和 Ramirez 构造的积分公式获得了 $\mathbb{C}^n$ 上 C^2 强拟凸开集的 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计，并且 Hölder 估计也由 G.M.Henkin & A.V.Romanov[15] 所证明.

对于局部 q 凸楔形, 当 $f \in B^{\beta}_{n,r}(D)$ 时，1973 年，R.M.Range & Y.T.Siu[8] 证明了当 $q = n - 1$ 且 $\beta = 0$ 时 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计. 对于任意 q, 但边界 ∂D 光滑和 $\beta = 0$, 1974 年 W.Fischer 和 I.Lieb[16] 给出了证明. 对于 $\beta \neq 0$, 但光滑边界 ∂D 和 $q = n - 1$ 时的 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计于 1986 年由 I.Lieb & R.M.Range[17] 获得 (也可参考 B.Fischer[18]). 但是这些都是考虑 Leray 映射

关于 λ 是线性的情况，因此可以对 λ 直接积分. 当拓广强拟凸域后，即考虑 $1 \leq q \leq n-2$ 且边界 ∂D 的光滑数 N 增加时，人们就遇到了困难： Leray 映射关于 λ 不再是线性的. 当这个问题首次被 R.A.Airapetjan & G.M.Henkin[11] 提出时，他们发现当 Leray 映射关于 λ 是非线性的时候，对 λ 直接积分变的很难，因此他们提出一个很重要的思想：如果 Leray 映射关于 λ 是以某一特殊有序的形式存在时，利用推广的 Fantappie-Feynman 公式 [11], 消除积分还是有可能的. 接着 Henkin[19] 提出：

1) 构造一个关于 λ 是特殊有序的形式的 Leray 映射,

2) 利用推广的 Fantappie-Feynman 公式对 λ 积分.

3) 对获得的积分模进行估计.

但是 C.Laurent-Thiebaut & J.Leiterer[10] 发现要完成这个结果也很难，所以他们就修改了 Henkin 的方法：不找特殊形式的 Leray 映射，而是利用由 R.M.Range & Y.T.Siu[8] 和 W.Fischer & I. Lieb[16] 推广构造的映射. 且证明了在某一狭义意义下，这个 Leray 映射是所讨论的特殊形式. 虽然这时对 λ 进行消除积分还是不可能，但是通过 R.A.Airapetjan & G.M.Henkin[11] 推广的 Fantappie-Feynman 公式类似的辅助估计，可以得到这个积分的适当的估计. 从而得到了 $\mathbb{C}^n$ 上局部 q- 凸楔形上 (n,r) 形式的 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计.

本文的目的是应用 C.Laurent-Thiebaut 和 J.Leiterer[10] 的思想,利用 Hermitian 度量和陈联络 [13] 以及局部化技巧，对 Stein 流形局部 q- 凸楔形上 $\bar{\partial}$-方程的解进行一致估计.

第一章，简单介绍了 Stein 流形上复切丛，复余切丛，纤维等基本定义以及基本引理，还有一些记号和预备知识. 这些初始工作是为后面的积分公式，$\bar{\partial}$- 方程和一致估计作准备的.

第二章，设 $D \subset\subset M$ 是 Stein 流形上局部 q- 凸楔形，$(U_{\bar{D}}, \rho_1, \cdots, \rho_N)$ 是 C^2 标架，给出关于 λ 非线性的 Leray 截面，利用 Hermitian 度量和陈联络 [13], 构造 Stein 流形关于 (r,s) 型微分形式在不变度量下的各种积分核从而得到了 Stein 流形上局部 q- 凸楔形 D 上的同伦公式和 $\bar{\partial}$- 方程的解 [14].

第三章，在 Stein 流形上，利用 Hermitian 度量和陈联络 [13] 以及局部化

技巧，引进 O_s 型形式和 m 型算子给出了积分算子 H 的一些估计．然后再利用 R.M.Range & Y.T.Siu[8] 的方法给出 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计.

第一章　Stein 流形的有关定义和基本引理

在这一章里，我们介绍了 Stein 流形的有关定义和基本引理，为后面的定理和估计作准备.

§1.1　Stein 流形

定义 1.1.1[4,5]　设 X 是一复 n 维的复流形， $\vartheta = \vartheta(X)$ 为 X 上的全纯函数.　X 称为 Stein 流形，如果它满足下列三个条件：

(i)　X 是全纯凸的，即对 X 中任一紧集 K,

$$\widehat{K}_\vartheta = \left\{ z \in X : |f(z)| \le \sup_K |f|, \forall f \in \vartheta(X) \right\}$$

也是 X 中的紧集；

(ii)　X 中的全纯函数可分离 X 上的点，即对于任意的 $z, w \in X, z \neq w$, 存在 $f \in \vartheta(X)$, 使得 $f(z) \neq f(w)$;

(iii)　X 上的全纯函数可给出 X 的局部坐标，即对于任意的 $z \in X$, 存在 $f_1, \cdots, f_n \in O(X)$, $(f_1, \cdots, f_n)$ 是 z 的一个邻域的局部坐标.

注：　H.Grauert[1958] 有一个深刻的定理，即如果 X 是一复流形，具有强多次调和穷竭函数，那么 X 是 Stein 的，但是只要用条件 (i) 和 (ii) 就可以证明 Stein 流形有一强多次调和穷竭函数. 因此由 Grauert 定理可知在 Stein 流形的定义中条件 (ii) 是多余的.

定义 1.1.2[4,5]　复切丛和复余切丛及其范数

设 X 是一个复 n 维的复流形，令 $\left\{ (U_j, h_j) \right\}$ 是 X 的全纯坐标卡. 设 $U_j \subset\subset X$. 令 $G_{ij}(z) := J_{h_i \circ h_j^{-1}}(z), z \in U_i \cap U_j$, 这里 $J_{h_i \circ h_j^{-1}}(z)$ 是 $h_i \circ h_j^{-1}$ 在 z 的 Jacobi 矩阵. 那么在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 有 $G_{ij} G_{jk} = G_{ik}$. 由过渡函数 G_{ij} 定义 X 上的全纯向量丛用 $T(X)$ 表示，称作 X 上的复切丛. 由过渡函数 $(G_{ij}^t)^{-1}$ 定义 X 上的全纯向量丛用 $T^*(X)$ 表示，称作 X 上的复余切丛，这里 $(G_{ij})^t$ 是 G_{ij} 的转置.　$T(X)$ 和 $T^*(X)$ 在 $z \in X$ 的纤维用 $T_z(X)$ 和 $T_z^*(X)$ 表示.　$T(X)$

和 $T^*(X)$ 关于投影 $X\times X\longrightarrow X,(z,\zeta)\longrightarrow z$ 的拉回分别记为 $\widetilde{T}(X\times X)$ 和 $\widetilde{T}^*(X\times X)$.

$T(X)$ 的全纯截面分别记为 $S(z,\zeta)$, 即有

$$S(z,\zeta):X\times X\longrightarrow \widetilde{T}(X\times X),$$

选择 X 的一组局部有限开覆盖 $\left\{U_j\right\}$, 使得对每一 j, 有一组全纯坐标 $h_j:U_j\longrightarrow \mathbb{C}^n$ 以及一全纯平凡化 $\psi_j:T(X)|_{U_j}\longrightarrow U_j\times\mathbb{C}^n$. 其次, 命 $\{\chi_j\}$ 为一从属于 $\left\{U_j\right\}$ 的 C^∞ 单位分解. 那么每一 $T(X)$ 值形成 $S(z,\zeta)$ 在集合 $D\subseteq X$ 上可以和一向量组 $\left\{S^{(j)}\right\}$ 等同，其中向量组 $\left\{S^{(j)}\right\}$ 由在 $h_j\Big(U_j\cap D\Big)\subseteq C^n$ 上的 $S_r^{(j)}$ 全纯函数的向量 $S^{(j)}=\left(S_1^{(j)},\cdots,S_n^{(j)}\right)$ 所构成的. 定义 $S(z,\zeta)$ 的范数为

$$\Big\|S(z,\zeta)\Big\|:=\sum_j\chi_j(z)\sum_{r=1}^n\Big\|S_r^{(j)}(h_j(z))\Big\|,\quad z\in D.$$

其中 $\Big\|S_r^{(j)}(h_j(z))\Big\|$ 是系数为 $S_r^{(j)}(h_j(z))$ 的向量的欧氏长度.

§1.2 基本引理

下面的基本引理可参见文献 [8] 中的引理 4.2.4.

引理 1.2.1[4] 设 X 是一个复 n 维的 Stein 流形， $T(X)$ 是 X 上的复切丛. 再假设 X 是一个更大 Stein 流形上相对紧开集. 那么存在一个全纯映射 $S:X\times X\longrightarrow T(X)$ 和 $X\times X$ 上的全纯函数 φ 满足以下条件:

(i) 对于任意的 $z,\zeta\in X$, $S(z,\zeta)\in T_z(X)$(即 $S(z,\zeta)$ 是从 $T(X)$ 关于映射 $X\times X\ni(z,\zeta)\longrightarrow z\in X$ 的拉回上的截面).

(ii) 对任意固定的 $z\in X$, $S(z,z)=0$, 从 X 到 $T_z(X)$ 的映射 $S(z,\zeta)$ 在 $\zeta=z$ 的邻域上是双全纯的.

(iii) 对任意的 $z\in X$, $\varphi(z,z)=1$.

(iv) 如果 F_S 是由 S 生成的 ${}_{X\times X}{}^{\vartheta 1}$ 的解析子层，那么 $\varphi\in F_S\Big((X\times X)\setminus\{(z,z):z\in X\}\Big)$.

(v) 存在一个整数 $\aleph \geq 0$ 使得 $T(X)$ 中对于任意的范数 $\|\cdot\|$, 函数 $\varphi^{\aleph}\|S\|^{-2}$ 在 $(X\times X)\setminus\{(z,z):z\in X\}$ 是 C^2 的.

注: 引理中假设: " X 为一更大的 Stein 流形的相对紧开子集" 可以不要, 引理照样成立.

§1.3 记号和预备知识

命 $v=(v_1,\cdots,v_n)$ 和 $u=(u_1,\cdots,u_n)$ 为复 - 流形 X 上的复 $C^{(1)}$- 函数. 定义

$$<v,u>=v_1u_1+\cdots+v_nu_n,$$

$$\omega(u)=du_1\wedge\cdots\wedge du_n,$$

$$\omega'(v)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j\bigwedge_{s\neq j}dv_s,$$

$$\Omega(v,u)=\frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'(v)\wedge\omega(u)}{<v,u>^n}.$$

如果 ζ 表示 X 上的变量而函数 v_j 和 u_j 还依赖于其他变量, 则记为 ω_ζ, ω'_ζ 和 Ω_ζ. 如果 v_j 和 u_j 中的独立变量不止一个, 则这些独立变量都要标出.

以下我们假定 $\{(U_j,h_j)\}$ 是 X 的全纯坐标卡集使得对所有的 j, $U_j\subset\subset X$. 如果 D 是 X 中的开集, 则记 $T(X)$ 和 $T^*(X)$ 在 D 上的限制为 $T(D)$ 和 $T^*(D)$. 根据定义 1.1.2, 现在固定全纯平凡化 $\psi_j:T(U_j)\longrightarrow U_j\times\mathbb{C}^n$ 和 $\psi_j^*:T^*(U_j)\longrightarrow U_j\times\mathbb{C}^n$ 使得

$$\Big(z,\big(G_{ij}(z)\big)\zeta\Big)=\psi_i\circ\psi_j^{-1}(z,\zeta),\qquad \Big(z,\big((G_{ij}^t)^{-1}(z)\big)\zeta\Big)=\psi_i^*\circ(\psi_j^*)^{-1}(z,\zeta),$$

$$z\in U_i\cap U_j,\zeta\in\mathbb{C}^n.$$

如果 $z\in U_j$ 和 $a\in T_z(X)(a\in T_z^*(X))$, 那么具有 $\psi_j(a)=(z,a_j)(\psi_j^*(a)=(z,a_j))$ 的向量 $a_j\in\mathbb{C}^n$ 称为 a 关于 $\{(U_j,h_j)\}$ 的表示. 如果 $z\in U_i\cap U_j$, $a\in T_z(X)$, $b\in T_z^*(X)$ 且 a_i, a_j, b_i, b_j 分别为 a, b 关于 (U_i,h_i) 和 (U_j,h_j) 的表示, 那么有

$$a_i=G_{ij}(z)a_j,\qquad b_i=(G_{ij}^t)^{-1}(z)b_j.$$