学校编号： 10384　　　　分类号：________密级：________
学　　号： 200223009　　UDC:________________

硕　士　学　位　论　文

Stein 流形上 $\bar{\partial}$– 方程解的一致估计

Uniform Estimates of Solutions for $\bar{\partial}$–Equations on Stein Manifolds

汤 冬 梅

指导教师姓名： 邱春晖　　教授

钟春平　　博士

厦门大学数学科学学院

申请学位级别： 硕　士　学　位

专 业 名 称： 基　础　数　学

论文提交日期： 2005 年 4 月

论文答辩日期： 2005 年 6 月

学位授予单位： 厦　门　大　学

学位授予日期： 2005 年 6 月

答辩委员会主席：________________

评阅人：________________

2005 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　月　日

目　　录

Contents

摘 要

众所周知 Stein 流形是一个极其重要的流形，在 Stein 流形上有很多非常数的全纯函数． C^n 就是一个 Stein 流形，所以在 Stein 流形上研究多元复分析是很自然的．积分表示方法是多元复分析的主要方法之一，它的主要优点是象单复变数的 Cauchy 积分公式一样便于估计．过去人们已经得到了许多 C^n 以及 Stein 流形上为解 $\bar{\partial}-$ 方程所需的积分公式，由此也得到了一些 $(0,q)$ 型微分形式的 $\bar{\partial}-$ 方程解的 Hölder 估计和一致估计．在前人的基础上作者利用 Demailly 和 Laurent–Thiebaut[8] 的思想，对 Stein 流形上 (p,q) 型微分形式的 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计作了一些研究和探讨.

全文分三章，其中第二章和第三章分别讨论 Stein 流形上不同区域中 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计．本文假定 M 是一复 n 维 Stein 流形，$D \subset\subset M$ 是一开集.

第一章介绍了 Stein 流形上的一些定义，基本定理和记号，包括 Stein 流形，复切丛，复余切丛，纤维以及最重要的基本定理等等.

第二章应用 Demailly 和 Laurent–Thiebaut 的思想给出了 Stein 流形上边界非光滑强拟凸域 D 上的带权因子的 Koppelman–Leray 公式 [11]. 首先这个公式不含有边界积分，从而避免了边界积分的复杂估计，并且积分密也不必定义在边界上而只需定义在区域内，它可来讨论全纯开拓的问题；其次，引进了权因子、带权因子的积分公式在应用上 (比如在函数插值方面的应用) 具有更大的灵活性. 通过 Hörmander 直径，利用局部化技巧得到 (p,q) 形式的 $\bar{\partial}-$ 方程带权因子解的一致估计.

第三章首先介绍 Leray–Norguet 截面 [4], 然后应用 Demailly 和 Laurent–Thiebaut[8] 的思想给出了 Stein 流形上边界逐块 C^1 光滑的开集 D 上的 Koppelman–Leray–Norguet 公式 [9], 利用 Range 和 Siu[15] 的方法得到了 (p,q) 形式的 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计.

关键词： Stein 流形； Hermitian 度量；陈联络； $\bar{\partial}-$ 方程；权因子；一致估计.

ABSTRACT

It is well known that a Stein manifold is a very important manifold on which there are a lot of nonconstant holomorphic functions. C^n is just a Stein manifold, so it is very natural to research into complex analysis in several variables on Stein manifolds. The integral representation method is one of main methods of complex analysis in several variables. In the past, many integral formulas for solving the $\bar{\partial}$–equations on C^n and Stein manifolds were obtained. Based on these integral formulas, the Hölder estimates and uniform estimates of solutions of the $\bar{\partial}$–equations for $(0, q)$ differential form also were given. On the basis of the former methods, by means of the ideas of Demailly and Laurent–Thiebaut[8], the author researches into the uniform estimates of the solutions of $\bar{\partial}$–equations for (p, q) differential form on Stein manifolds.

The whole dissertation includes three chapters. In the second chapter and the third chapter, the author discusses respectively the uniform estimates of solutions of $\bar{\partial}$–equations on the different domains on Stein manifolds. Suppose that M is a Stein manifold with complex dimension n and $D \subset\subset M$ is an open set.

In the first chapter, the author introduces some definitions, the basic lemma and notations on Stein manifolds, including a Stein manifold, the complex tangent bundle, the complex cotangent bundle, fibre. Furthermore there is the most important basic lemma and so on.

In the second chapter, applying the ideas of Demailly and Laurent–Thiebaut[8], using the Hermitian metric and Chern connection the author gives Koppelman–Leray formula[11] with weight factors on a strictly pseudoconvex domain with non-smooth boundaries in a Stein manifold. By means of the Hörmander diameter and localization technique, the author admits the uniform estimate of solution with weight factors of $\bar{\partial}$–equation for (p, q) differential form.

In the third chapter, the author firstly introduces the definition of Leray–Norguet section[4]. Secondly, by means of the ideas of Demailly and Laurent–Thiebaut[8], and by means of the Hermitian metric and Chern connection, the author obtains Koppelman–Leray–Norguet formula[9] for (p, q)-form on an open set with piecewise C^1 smooth boundaries on Stein manifolds. Finally, by means of the method introduced by Range and Siu[15], the uniform estimate of solutions of $\bar{\partial}$–equations for (p, q)–form is given.

Keywords: Stein manifold; Hermitian metric; Chern connection; $\bar{\partial}$–equation; weight factor; the uniform estimate.

Stein 流形上 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计 *

引 言

多元复分析是现代数学中最为活跃的学科之一，著名数学家陈省身教授曾预言：“将来数学研究的对象，必然是流形”．多元复分析研究的主要内容是复流形的分析与复几何，而多复变与复几何是一门交叉性极强的方向，反映了数学的统一性，是现代数学的核心与前沿之一．由于内容十分广泛和深刻，所以几乎用到现代数学的所有方法．

早在 1831 年， Cauchy 发现了以其名字命名的著名的 Cauchy 积分公式，数学家就认识到积分表示在复分析中的重要性．自从上个世纪 70 年代 Henkin[1,2] 和 Grauert & Lieb[3] 分别得到了 C^n 空间中强拟凸域的 $\bar{\partial}-$ 方程的解的积分公式后，多复变数的积分表示方法迅速发展起来，成为多元复分析的主要方法之一，它的主要优点是象单变数的 Cauchy 积分公式一样便于估计．

熟知， C^n 空间中全纯函数和光滑函数的积分表示及其应用已经有许多研究 [1−6]，自从 Koppelman[7] 于 1967 年得到了 C^n 空间中 $(0,q)$ 型微分形式的 Koppelman 公式，有关 C^n 空间中 $(0,q)$ 型微分形式的积分表示理论也已经有许多研究 [4−6]，但复流形上的积分表示的研究则是近几年才开始的．首先， Henkin 和 Leiterer[4] 研究了 Stein 流形上 $(0,q)$ 型微分形式的积分表示理论，得到了 $(0,q)$ 型的 Koppelman 公式， Koppelman–Leray 公式和 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并给出了 $\bar{\partial}-$ 方程的解．接着 Demailly 和 Laurent–Thiebaut[8] 研究了 Stein 上 (p,q) 型微分形式的积分表示理论，得到了 (p,q) 型的 Koppelman 和 Koppelman–Leray 公式以及 $\bar{\partial}-$ 方程的解，它和 $(0,q)$ 型微分形式的情形有本质的区别，这时不能象 C^n 空间一样采用 Euclid 度量，因为在 Stein 流形上 Euclid 度量不是全纯变换下的不变量．为了克服这个困难，

* 国家自然科学基金资助项目 (项目批准号： 10271097).

Demailly 和 Laurent–Thiebaut 利用 Hermitian 度量和 Chern 联络，给出了不变积分核，这是一个十分重要的思想. 在此基础上，邱春晖 [9] 得到了 Stein 流形上边界逐块 C^1 光滑的开集上 (p,q) 型微分形式的 Koppelman–Leray–Norguet 公式，并给出了 $\bar{\partial}-$ 方程的解. 然后根据 B.Berndtsson 和 M.Andersson[10] 构造具有带权因子积分核的方法，邱春晖和林良裕 [11] 又得到了 Stein 流形上具有非光滑边界强拟凸域上的带权因子的 Koppelman–Leray 公式，也给出了 $\bar{\partial}-$ 方程带权因子的解. 王志强 [12] 给出了 Stein 流形上 (p,q) 型微分形式带权因子的 Koppelman–Leray–Norguet 公式和 $\bar{\partial}-$ 方程带权因子的解.

积分表示理论发展得相对较为成熟，接下来就是对由积分公式给出的 $\bar{\partial}-$ 方程的解进行估计. 首先给出了 C^n 空间中有 C^2 边界的强拟凸开集和强拟凸域上的 $\bar{\partial}-$ 方程解具有 1/2–Hölder 估计. 继续又得到一系列的 C^n 中边界非光滑和边界逐块 C^1 光滑的强拟凸域以及强拟凸多面体上的 $\bar{\partial}-$ 方程的解具有一致估计 [4−6]. 1970 年， Henkin[2] 利用由 Henkin 和 Ramirez 构造的积分公式获得了 C^n 上 C^2 强拟凸开集的 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计，并且 Hölder 估计也由 Henkin 和 Romanov[13] 所证明. 1971 年 Henkin[4] 首先获得了 C^n 中解析多面体上 $(0,1)-$ 形式的估计. Poljakov[14] 又把这个结论推广到 $(0,q)-$ 形式. 1973 年， Range 和 Siu[15] 得到了 C^n 中边界逐块光滑强拟凸域上解的一致估计. 1991 年，范国兴 [16] 又得到了 Stein 流形具有 C^1 逐块光滑边界的强拟凸域上 $(p,q)-$ 形式的 Koppelman–Leray 公式和 $\bar{\partial}-$ 方程的不含边界积分的解，并且给出了该解一致估计.

本文的目的是应用 Demailly 和 Laurent–Thiebaut[8] 的思想，利用 Hermitian 度量和陈联络，分别对 Stein 流形上边界非光滑的强拟凸域上 $\bar{\partial}-$ 方程带权因子的解和边界逐块 C^1 光滑的开集上 $\bar{\partial}-$ 方程的解进行一致估计.

第一章，我们先简单回顾一下 Stein 流形上复切丛，复余切丛，纤维等基本定义以及基本引理，还有一些记号和预备知识. 这些初始工作是为后面的积分公式， $\bar{\partial}-$ 方程和一致估计作准备的.

第二章，设 $D \subset\subset M$ 是 ∂D 非光滑的强拟凸域， ρ 是 ∂D 的邻域 θ 上的强多次调和函数，给出全纯支撑函数 $\Phi(z,\zeta)$ 和 $\widetilde{\Phi}(z,\zeta)$, 利用 Hermitian 度量

和陈联络，通过 Leray 截面 $s^*(z,\zeta)$ 构造不变积分核，从而得到了 Stein 流形上边界非光滑的强拟凸域 D 上不含边界积分的带权因子的 Koppelman–Leray 公式 [11]. 在 Stein 流形上，重新定义 Hörmander 球， $\mathrm{diam}_H(\mathrm{supp}f)$ 以及 $dist(z,H_\xi^\Phi(\delta))$, 利用局部化技巧，给出了 $\bar{\partial}-$ 方程带权因子解的一致估计. 在一致估计中，由 $z\in\bar{D}\cap U_j$, $\bar{D}\cap U_j$ 与 C^n 中的某开集同胚，以及从属于 $\{U_j\}$ 的一个 C^∞ 的单位分解，从而把在 Stein 流形某一开集上的一致估计放 C^n 中同胚的开集上来作. 因为核 $\widehat{\Omega}$ 与 $\bigwedge\limits_{l=1}^{n-k}\bar{\partial}v_{j_l}^*\wedge\bigwedge\limits_{l=1}^{n}du_{j_l}\wedge\bigwedge\limits_{l=1}^{k}d\bar{\zeta}_{j_l}$ 只差一个低阶项，所以我们可采用 $(0,q)-$ 形式的方法来估计 $\bar{\omega}_{z,\zeta,\lambda}(v_j^*)\wedge\bigwedge\limits_{l=1}^{n}du_{j_l}\wedge\bigwedge\limits_{l=1}^{k}d\bar{\zeta}_{j_l}$.

第三章, 设 $D\subset\subset M$ 具有逐块 C^1 光滑边界 ∂D 的开集，ρ_j 是 ∂D 的开覆盖 $\{U\}_{j=1}^k$ 上的 C^1 函数，利用 Hermitain 度量和陈联络，通过 Leray–Norguet 截面 $s_1^*(z,\zeta)$, $\cdots$, $s_k^*(z,\zeta)$ 构造不变积分核，从而得到了 Stein 流形上具有逐块 C^1 光滑边界的开集上 (p,q) 型的 Koppelman–Leray–Norguet 公式 [9], 并给出了 $\bar{\partial}-$ 方程解的一致估计. 在一致估计中，利用 Range 和 Siu[15] 的方法，设 $\bar{\Omega}^k(\varphi^v,\hat{s},s_1^*,\cdots,s_k^*,s)$ 关于 z 为 (p,q) 型的分量为 $\Omega_{p,q}^k(z,\zeta,\lambda)$, 然后在 $S_I\times\sigma_{0I}$ 上估计 $f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q}^k(z,\zeta,\lambda)$. 首先令 $A_{p,q-1}^{I,k}$ 为 $\Omega_{p,q-1}^k$ 中所有在 λ 为 $|I|$ 阶的多项式的和，接着令 $\Omega_{p,q-1}^{I,k}=\int_{\sigma_{0I}}A_{p,q-1}^{I,k}$, 因此只需估计 $\int_{S_I}f(\zeta)\wedge\Omega_{p,q-1}^{I,k}$.

第一章 Stein 流形有关定义和基本引理

在这一节里，我们首先介绍 Stein 流形上的有关定义和基本引理，为后面的定理和估计作准备.

§1.1 Stein 流形

定义 1.1[4,5] 设 M 是一复 n 维的复流形， $O = O(M)$ 为 M 上的全纯函数. M 称为 Stein 流形，如果它满足下列三个条件：

(i) M 是全纯凸的，即对 M 中任一紧集 K,

$$\widehat{K}_O = \left\{ z \in M : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in O(M) \right\}$$

也是 M 中的紧集;

(ii) M 中的全纯函数可分离 M 上的点，即对于任意的 $z, w \in M, z \neq w$, 存在 $f \in O(M)$, 使得 $f(z) \neq f(w)$;

(iii) M 上的全纯函数可给出 M 的局部坐标，即对于任意的 $z \in M$, 存在 $f_1, \cdots, f_n \in O(M)$, $(f_1, \cdots, f_n)$ 是 z 的一个邻域的局部坐标.

注： H.Grauert[1958] 有一个深刻的定理，即如果 M 是一复流形，具有强多次调和穷竭函数，那么 M 是 Stein 的，但是只要用条件 (i) 和 (ii) 就可以证明 Stein 流形有一强多次调和穷竭函数. 因此由 Grauert 定理可知在 Stein 流形的定义中条件 (ii) 是多余的.

定义 1.2[4,5] 复切丛和复余切丛及其范数

设 M 是一个复 n 维的复流形，令 $\{(U_j, h_j)\}$ 是 M 的全纯坐标卡. 设 $U_j \subset\subset M$. 令 $G_{ij}(z) := J_{h_i \circ h_j^{-1}}(z), z \in U_i \cap U_j$, 这里 $J_{h_i \circ h_j^{-1}}(z)$ 是 $h_i \circ h_j^{-1}$ 在 z 的 Jacobi 矩阵. 那么在 $U_i \cap U_j \cap U_k$ 有 $G_{ij}G_{jk} = G_{ik}$. 由过渡函数 G_{ij} 定义 M 上的全纯向量丛用 $T(M)$ 表示，称作 M 上的复切丛. 由过渡函数 $(G_{ij}^t)^{-1}$ 定义 M 上的全纯向量丛用 $T^*(M)$ 表示，称作 M 上的复余切丛，这里 $(G_{ij})^t$

是 G_{ij} 的转置. $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 在 $z \in M$ 的纤维用 $T_z(M)$ 和 $T_z^*(M)$ 表示. $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 关于投影 $M \times M \longrightarrow M, (z,\zeta) \longrightarrow z$ 的拉回分别记为 $\widetilde{T}(M \times M)$ 和 $\widetilde{T}^*(M \times M)$.

$T(M)$ 和 $T^*(M)$ 的全纯截面分别记为 $s(z,\zeta)$ 和 $s^*(z,\zeta)$, 即有

$$s(z,\zeta) : M \times M \longrightarrow \widetilde{T}(M \times M),$$

和

$$s^*(z,\zeta) : M \times M \longrightarrow \widetilde{T}^*(M \times M).$$

选择 M 的一组局部有限开覆盖 $\left\{U_j\right\}$, 使得对每一 j, 有一组全纯坐标 $h_j : U_j \longrightarrow C^n$ 以及一全纯平凡化 $\psi_j : T(M)|_{U_j} \longrightarrow U_j \times C^n$. 其次, 命 $\{\chi_j\}$ 为一从属于 $\left\{U_j\right\}$ 的 C^∞ 单位分解. 那么每一 $T(M)$ 值形成 $s(z,\zeta)$ 在集合 $D \subseteq M$ 上可以和一向量组 $\left\{s^{(j)}\right\}$ 等同，其中向量组 $\left\{s^{(j)}\right\}$ 由在 $h_j\Big(U_j \cap D\Big) \subseteq C^n$ 上的 $s_r^{(j)}$ 全纯函数的向量 $s^{(j)} = \Big(s_1^{(j)}, \cdots, s_n^{(j)}\Big)$ 所构成的. 定义 $s(z,\zeta)$ 的范数为

$$\Big\|s(z,\zeta)\Big\| := \sum_j \chi_j(z) \sum_{r=1}^n \Big\|s_r^{(j)}(h_j(z))\Big\|, \quad z \in D.$$

其中 $\Big\|s_r^{(j)}(h_j(z))\Big\|$ 是系数为 $s_r^{(j)}(h_j(z))$ 的向量的欧氏长度.

§1.2 基本引理

下面的基本引理可参见文献 [4] 中的引理 4.2.4.

引理 1.1[4] 设 M 是一个复 n 维的 Stein 流形, $T(M)$ 是 M 上的复切丛. 再假设 M 是一个更大 Stein 流形上相对紧开集. 那么存在一个全纯映射 $s : M \times M \longrightarrow T(M)$ 和 $M \times M$ 上的全纯函数 φ 满足以下条件:

(i) 对于任意的 $z, \zeta \in M$, $s(z,\zeta) \in T_z(M)$(即 $s(z,\zeta)$ 是从 $T(M)$ 关于映射 $M \times M \ni (z,\zeta) \longrightarrow z \in M$ 的拉回上的截面).

(ii) 对任意固定的 $z \in M$, $s(z,z) = 0$, 从 M 到 $T_z(M)$ 的映射 $s(z,\zeta)$ 在 $\zeta = z$ 的邻域上是双全纯的.

(iii) 对任意的 $z \in M$, $\varphi(z,z) = 1$.

(iv) 如果 F_s 是由 s 生成的 $M \times M^{\Theta^1}$ 的解析子层，那么 $\varphi \in F_s\Big((M \times M) \setminus \{(z,z) : z \in M\}\Big)$.

(v) 存在一个整数 $\aleph \geq 0$ 使得 $T(M)$ 中对于任意的范数 $\|\cdot\|$, 函数 $\varphi^{\aleph}\|s\|^{-2}$ 在 $(M \times M) \setminus \{(z,z) : z \in M\}$ 是 C^2 的.

注： 引理中假设："M 为一更大的 Stein 流形的相对紧开子集"可以不要，引理照样成立.

§1.3 记号和预备知识

命 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ 和 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 为 C^1- 流形 M 上的复 C^1- 函数. 定义

$$< v, u >= v_1u_1 + \cdots + v_nu_n,$$

$$\omega(u) = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

$$\omega'(v) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}v_j \bigwedge_{s \neq j} dv_s,$$

$$\Omega(v,u) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{\omega'(v) \wedge \omega(u)}{< v, u >^n}.$$

如果 ζ 表示 M 上的变量而函数 v_j 和 u_j 还依赖于其他变量，则记为 ω_ζ, ω'_ζ 和 Ω_ζ. 如果 v_j 和 u_j 中的独立变量不止一个，则这些独立变量都要标出. 下面是这些形式的简单性质：

1. 形式 $\Omega(v,u)$ 是闭的，即 $d\Omega\Big(v(\zeta), u(\zeta)\Big) = 0$, 当 $\langle v(\zeta), u(\zeta)\rangle \neq 0$.

2. 如果 D 是 M 中的开集而函数 u_j 是全纯的，则对 D 上的每一连续可微函数 f 有 $d\Big(f\Omega(v,u)\Big) = \bar{\partial}f \wedge \Omega(v,u)$.

3. 如果 D 是 M 中的开集, 则对 D 上的每一复 C^1- 函数 ψ, 都有关系式

$$\omega'(\psi v) = \psi^n\omega'(v), \qquad \Omega(\psi v, u) = \Omega(v,u).$$

引理 1.2[5] 设 M 是复流形，对点 $z \in M$, u 是取值于切空间 $T_z(M)$ 的映射， v 是取值于余切空间 $T_z^*(M)$ 的映射. D 是 M 中的开集， $\Gamma = (r_{ij})$

是一不依赖于 $\zeta \in D$ 的 $n \times n$ 方阵，使得 $det\Gamma \neq 0$, 命 $\Gamma_t = (r_{ji})$, 那么

$$\omega'(\Gamma_t^{-1}v) \wedge \omega(\Gamma u) = \omega'(v) \wedge \omega(u), \qquad \Omega(\Gamma_t^{-1}v, \Gamma u) = \Omega(v, u).$$

以下我们假定 $\{(U_j, h_j)\}$ 是 M 的全纯坐标卡集使得对所有的 j, $U_j \subset\subset M$. 如果 D 是 M 中的开集，则记 $T(M)$ 和 $T^*(M)$ 在 D 上的限制为 $T(D)$ 和 $T^*(D)$. 根据定义 1.2, 现在固定全纯平凡化 $\psi_j : T(U_j) \longrightarrow U_j \times C^n$ 和 $\psi_j^* : T^*(U_j) \longrightarrow U_j \times C^n$ 使得

$$\Big(z, (G_{ij}(z))\zeta\Big) = \psi_i \circ \psi_j^{-1}(z, \zeta), \qquad \Big(z, ((G_{ij}^t)^{-1}(z))\zeta\Big) = \psi_i^* \circ (\psi_j^*)^{-1}(z, \zeta),$$

$$z \in U_i \cap U_j, \zeta \in C^n.$$

如果 $z \in U_j$ 和 $a \in T_z(M)(a \in T_z^*(M))$, 那么具有 $\psi_j(a) = (z, a_j)(\psi_j^*(a) = (z, a_j))$ 的向量 $a_j \in C^n$ 称为 a 关于 $\{(U_j, h_j)\}$ 的表示. 如果 $z \in U_i \cap U_j$, $a \in T_z(M)$, $b \in T_z^*(M)$ 且 a_i, a_j, b_i, b_j 分别为 a, b 关于 (U_i, h_i) 和 (U_j, h_j) 的表示，那么有

$$a_i = G_{ij}(z)a_j, \qquad b_i = (G_{ij}^t)^{-1}(z)b_j.$$

因此，下述定义是正确的.

定义 1.3[5] 如果 $z \in M$, $a \in T_z(M)$ 和 $b \in T_z^*(M)$, 则可任意选择一 j 使 $z \in U_j$ 并定义

$$< b, a >:=< b_j, a_j >,$$

其中 b_j 和 a_j 是 b 和 a 关于 (U_j, h_j) 的表示.

现在命 $D \subseteq M$ 为一开集， N 为一实的 C^1- 流形，并命 $a : D \times N \longrightarrow T(M)$ 和 $b : D \times N \longrightarrow T^*(M)$ 为 C^1- 映射，使得对所有的 $(z, y) \in D \times N$ 有 $a(z, y) \in T_z(M)$ 和 $b(z, y) \in T_z^*(M)$. 命 $a_j : (D \cap U_j) \times N \longrightarrow C^n$ 和 $b_j : (D \cap U_j) \times N \longrightarrow C^n$ 为 a 和 b 关于 (U_j, h_j) 的表示. 则

$$\omega_y'(b_i(z, y)) \wedge \omega_y(a_i(z, y)) = \omega_y'(b_j(z, y)) \wedge \omega_y(a_j(z, y)), \quad z \in D \cap U_i \cap U_j, y \in N.$$

因此有下述定义

定义 1.4[5] 如果 $D \subseteq M$ 为一开集, N 为一实的 C^1- 流形, $a : D\times N \longrightarrow T(M)$ 和 $b : D \times N \longrightarrow T^*(M)$ 为 C^1- 映射，使得对所有的 $(z, y) \in D \times N$ 有 $a(z, y) \in T_z(M)$ 和 $b(z, y) \in T_z^*(M)$. 命 $a_j : (D \cap U_j) \times N \longrightarrow C^n$ 和 $b_j : (D \cap U_j) \times N \longrightarrow C^n$ 为 a 和 b 关于 (U_j, h_j) 的表示. 则可任意选择一 j 使 $z \in D \cap U_j$ 并定义在 $D \times N$ 上的连续微分形式 $\omega'_y(b(z, y)) \wedge \omega_y(a(z, y))$

$$\omega'_y(b(z, y)) \wedge \omega_y(a(z, y)) = \omega'_y(b_j(z, y)) \wedge \omega_y(a_j(z, y)), \quad z \in D \cap U_j, y \in N.$$

下面我们引进下述有关 $\bar{s}(z, \zeta)$ 的定义.

定义 1.5[5] 引进一保持纤维的 $C^\infty-$ 映射

$$\sigma : T(M) \longrightarrow T^*(M)$$

它相应于 C^n 中的映射 $z \longmapsto \bar{z}$, 使得满足下列条件：对所有 $a \in T(M)$, $<\sigma a, a> \geq 0$ 并且映射

$$\|a\|_\sigma := (<\sigma a, a>)^{\frac{1}{2}}, \qquad a \in T(M)$$

在 $T(M)$ 的每一纤维上定义一范数. 这样的映射 σ 可以按下述方式定义：如果 $z \in U_j$, $a \in T_z(M)$ 且 a_j 是 a 关于 (U_j, h_j) 的表示，则记 $\sigma_j a$ 为 $T_z^*(M)$ 中的向量，它关于 (U_j, h_j) 的表示为 $\bar{a}_j$. 选择一从属于 U_j 的 $C^\infty-$ 单位分解 χ_j 并定义

$$\sigma a := \sum_j \chi_j(z)\sigma_j a, \quad a \in T_z(M), z \in M.$$

并记 $\bar{s}(z, \zeta) := \sigma s(z, \zeta)$.(这样 $\bar{s}(z, \zeta)$ 就可以替代 C^n 中的映射 $\bar{\zeta} - \bar{z}$.)

最后我们给出 Leray 截面的定义.

定义 1.6[6] 关于 (D, s, φ) 的 Leray 截面定义为一数对 $(s^*, \aleph^*)$, 其中 $\aleph^* \geq 0$ 是一整数， $s^*(z, \zeta)$ 是对 ∂D 的某一个邻域中的 ζ 和 $z \in D$ 定义的取值于 $T^*(M)$ 的 C^1 映射，使得满足下列条件：

(i) 对所有 $z \in D$ 和 ∂D 的某一个邻域中的 ζ, $s^*(z, \zeta) \in T_z^*(M)$;

(ii) 对 $z \in D$ 和 $\zeta \in \partial D$, 有 $\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta)\rangle \neq 0$ 和 $\varphi(z, \zeta) \neq 0$, 又函数

$$\frac{\varphi^{\aleph^*}(z, \zeta)}{\langle s^*(z, \zeta), s(z, \zeta)\rangle}$$