学校编码：10384　　　　　　分类号_______密级 ______

学　　号：B200223008　　　　UDC_____________________

厦　门　大　学

博　士　学　位　论　文

连通图的可去边及连通图的构造

Removable Edges in Connected Graphs and the Construction of Connected Graphs

徐　丽　琼

指导教师姓名：郭　晓　峰　教授

专　业　名　称：基　础　数　学

论文提交日期：2005 年 5 月

论文答辩日期：2005 年 6 月

学位授予日期：2005 年　月

答辩委员会主席：________

评　　阅　　人：________

2005 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“√”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘　要

连通图的构造是近二十年来图论的研究热点. 由于它与网络模型和组合优化的密切联系，使得它具有重要的理论价值和应用价值. 可收缩边和可去边是连通图的构造的有力工具，同时在使用归纳法证明连通图的一些性质中也起到重要作用. 本文主要研究连通图的构造，连通图中可去边的存在性以及连通图中可收缩边和可去边在特定子图上的分布情况. 下面是本文的一些主要结果：

1. 利用边点割端片的性质给出 4 连通图的圈上存在至少两条可去边的充分条件；同时给出 4 连通图 4 圈上，边点割原子及分离对上，生成树上和生成树外的可去边的分布.

2. 给出 3 连通图中可去边在完美匹配上的分布以及 4 连通图中可收缩边在完美匹配上的分布.

3. 研究拟连通与可去边之间的关系，并根据它们之间的关系探讨 $k(k \geq 3)$ 连通图中可去边的存在性问题. 主要证明了 5 连通图中不存在可去边的充要条件是 $G \cong K_6$, 利用这个结果给出 5 连通图的一个递归构造方法，即任一 5 连通图可由 K_6 经过若干次 θ^+- 运算而得到；对于 k 连通图 G, 若 G 的任一条边 e 的两个端点在 G 中至多有 $k-3$ 个公共的相邻点，则 G 中存在可去边. 且我们猜想，若 k 是偶数， k 连通图中不存在可去边的充要条件是 $G \cong K_{k+1}$ 或 $G \cong H_{k/2+1}$; 若 k 是奇数，则 $G \cong K_{k+1}$.

4. 讨论 5 连通图中可去边的一些性质和分布；得到 5 连通图中圈上，生成树上，生成树外，边点割原子及分离对上可去边的分布.

5. 定义了 5 连通图中度为 5 的顶点的分裂，并证明了，对于阶至少为 7 的 5 连通图 G, 当 G 的任一端片的阶不等于 2, 且对 G 的任一 5 度顶点 z, $G[N_G(z)]$ 中含子图 $(K_2 \cup 2K_1) + K_1$, 则对 G 的任意顶点 x, 下列断言之一成立： (1) x 关联一条可收缩边； (2) 在 $N_G(x)$ 中存在一个 5 度顶点 y 关联一条可收缩边； (3) 在 $N_G(x)$ 中存在一个 5 度顶点 y 使得对 y 作某一个分裂运算所得的图是 5 连通的.

6. A. Kaneko 和 K. Ota 首次引入了 (n, λ)- 连通图的概念，它是点连通

图和边连通图的综合和推广. 他们研究了极小 (n,λ)- 连通图边数的上界, 证明了对于任一极小 (n,λ)- 连通图 G, 若 $|G|\geq 3n-1$, 则 $e(G)\leq n\lambda(|G|-n)$; 若 $3n-1\geq |G|\geq n+1$, 则 $e(G)\leq \lambda(|G|+n)^2/8$. 对于前者他们给出了边数达到上界的唯一极图 $K^{\lambda}_{n,p-n}$, 其中 $|G|\geq 3n$. 对于后者我们确定了边数达到上界 $\lambda(|G|+n)^2/8$ 的所有极小 (n,λ)- 连通图的无穷图类.

关键词　连通图，可去边，可收缩边，拟 k 连通，分裂， (n,λ)- 连通

Abstract

The construction of connected graphs is a hot topic in the research of graph theory in recent twenty years. Because of its close connection to network modelling and comibinatorial optimization, construction of connected graphs plays a significantly important role not only in theoretical respect, but also for practical applications. Contractible edges and removable edges in connected graphs are a powerful tool to study the structures of graphs and to prove some properties of graphs by induction. The main focus of this paper is on construciton of connected graphs, existence of removable edges in connected graphs, and distributions of contractible and removable edges in certain substructures of connceted graphs.

Key contributions of this paper are as follows:

1. By analyzing the properties of edge-vertex cut ends in a 4-connected graph, we derive sufficient conditions under which any cycle C in a 4-connected graph contains at least two removable edges. Moreover, for 4-connected graphs, the distribution of removable edges in the edge-vertex cut atoms and its separating pairs is obtained.

2. The distributions of removable edges in perfect matchings of 3-connected graphs and contractible edges in perfect matchings of 4-connected graphs are obtained.

3. We investigate the relation between quasi connectivity and removable edges, based on which the existence of removable edges in a k-connected graph($k \geq 5$) is studied. It is showed that a 5-connected graph has no removable edge if and only if it is isomorphic to K_6, consequently, a recursive construction method of 5-connected graphs is established, i.e., any 5-connected graph can be obtained from K_6 via a number of θ^+-operations; if end vertices of any edge in a k-connected graph G have at most $k-3$ adjacent vertices in common, the graph G is verified to have a removable edge. We conjecture that, if k is even, a k-connected graph G without a removable edge is isomorphic to either K_{k+1} or $H_{k/2+1}$, and that, if k is odd, G is isomorphic to K_{k+1}.

4. The properties of removable edges in some 5-connected graphs are

investigated, while the distributions of removable edges in cycles, spanning trees, outside spanning trees, the edge-vertex cut atom and its separating pair of 5-connected graphs are obtained.

5. Splitting at a vertex of degree five in a 5-connected graph G is defined. It is proved that, for a 5-connected graph G with order at least seven, if the order of any end in G is not equal to 2, and for any vertex z of degree five, $G[N_G(z)]$ contains a subgraph $(K_2 \cup 2K_1) + K_1$, then, for any x in $V(G)$, one of the following holds:

(1) A contractible edge is incident with x.

(2) There exists a vertex y of degree five in $N_G(x)$ such that a contractible edge is incident with y.

(3) There exists a vertex y of degree five in $N_G(x)$ such that after some splitting at y in G, the resultant graph is 5-connected .

6. A. Kaneko and K. Ota first introduced the concept of minimally (n, λ)-connected graph, which is common extension of the vertex connectivity and the edge connectivity. They proved that if $|G| = p \geq 3n - 1$, then $e(G) \leq n\lambda(|G| - n)$; if $3n - 1 \geq |G| \geq n + 1$, then $e(G) \leq \lambda(|G| + n)^2/8$. For the former, they proved that the unique minimally (n, λ)-connected graph with the maximum size $n\lambda(|G| - n)$ is isomorphic to the graph $K^{\lambda}_{n,p-n}$, where $|G| \geq 3n$. For the latter, we determine the infinite class of all the minimally (n, λ)-connected graphs with the maximum size $\lambda(|G| + n)^2/8$.

Key Words Connected graph, Removable edges, Contractible edges, Quasi k-connectivity, Splitting, (n, λ)-connected

目　　录

Contents

第一章　序　　言

§1.1　基本定义与符号

我们先列出一些贯穿后面章节的符号和定义，未定义的一些符号和术语见 [BM1].

设 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 是图，其中 $V(G)$ 是非空的顶点集， $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集， ψ_G 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对 (不必相异). $V(G)$ 中的元素个数称为 G 的阶，记作 $v(G)$ 或 $|G|$; $E(G)$ 中的元素个数称为 G 的边，记作 $e(G)$. 如果 e 是一条边， u 和 v 是使得 $\psi_G(e)=uv$ 的顶点，则称 e 连接 u 和 v; 顶点 u 和顶点 v 是边 e 的端点；顶点 u 和 v 与边 e 相关联；顶点 u 和顶点 v 相邻，其中一个顶点为另一个顶点的邻点. 顶点 u 在图 G 中的所有邻点组成 u 的邻域，记作 $N_G(u)$ 或者 $N(u)$. 设 $Y\subseteq V(G)$, 记 $N_G(Y)=\cup_{y\in Y}N_G(y)\setminus Y$. $d(Y)$ 表示 G 中恰与 Y 中的一个顶点相关联的边数. 端点重合为一点的边称为环，端点不相同的边称为连杆. 如果 G 的顶点集和边集都有限，称 G 为有限图. 如果 G 既没有环也没有两条连杆连接同一对顶点，则称 G 为简单图. 如果没有特别说明，本文仅考虑有限的简单图.

称图 H 是 G 的子图，如果 $V(H)\subseteq V(G)$, $E(H)\subseteq E(G)$, 并且 ψ_H 是 ψ_G 在 $E(H)$ 上的限制. 当 $H\subseteq G$, 但 $H\neq G$ 时，则记为 $H\subset G$, 并且 H 称为 G 的真子图. 若 H 是 G 的子图，则 G 称为 H 的母图. G 的生成子图 (或生成母图) 是指满足 $V(H)=V(G)$ 的子图 (或母图)H.

设 V' 是 $V(G)$ 的一个非空子集. 以 V' 为顶点集，以端点均在 V' 中的边的全体为边集所组成的子图，称为 G 的由 V' 导出的子图，记为 $G[V']$; $G[V']$ 称为 G 的导出子图. 导出子图 $G[V\backslash V']$ 记为 $G-V'$; 它是从 G 中删除 V' 中的顶点以及与这些顶点相关联的边所得到的子图. 如果 $V'=\{v\}$, 则把 $G-\{v\}$ 简记为 $G-v$.

设 E' 是 $E(G)$ 的非空子集. 以 E' 为边集，以 E' 中边的端点全体为顶点集所组成的子图称为 G 的由 E' 导出的子图，记为 $G[E']$; $G[E']$ 称为 G 的边导出子图. 边集为 $E\backslash E'$ 的 G 的生成子图简记为 $G-E'$; 它是从 G 中删除 E' 中的边所得到的子图. 如果 $E'=\{e\}$, 则 $G-\{e\}$ 简记为 $G-e$.

设 G_1 和 G_2 是 G 的子图. 若 G_1 和 G_2 没有公共顶点, 则称它们不相交; G_1 和 G_2 的并图 $G_1 \cup G_2$ 是指 G 的一个子图，其顶点集为 $V(G_1) \cup V(G_2)$, 其边集为 $E(G_1) \cup E(G_2)$; 如果 G_1 和 G_2 是不相交的，且 G_1 的每个顶点与 G_2 的每个顶点相邻，所得的图记为 $G_1 + G_2$.

设 $M = \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ 是 G 的一个边子集，如果 M 中任意两条边互不相邻，则称 M 为图 G 的一个匹配或对集. 如果图 G 的一个匹配 M 饱和 G 中的每一个顶点，则称 M 为 G 的完美匹配或完美对集.

称图 G 为偶图 (二部图), 如果存在 $V(G)$ 的一个 2- 划分 (X, Y), 即 $V(G) = X \cup Y$, 且 $X \cap Y = \varnothing$, 使得 X 与 Y 中任意两个顶点都不相邻，记偶图为 $G = (X, Y)$. 如果偶图 $G = (X, Y)$ 中， X 和 Y 之间的每对顶点都相邻，则称 G 为完全偶图. 记 $|X| = m$, $|Y| = n$ 的完全偶图为 $K_{m,n}$. 完全图 K_n 中去掉一条边后所得的图记为 K_n^-.

设 A 和 B 是 $V(G)$ 的两个不交的子集，或者是图 G 的没有公共顶点的子图，用 (A, B) 表示图 G 中连接 A 和 B 的点的所有边组成的边集.

图 G 中与 v 关联的边的数目，称为顶点 v 的度，记作 $d_G(v)$. $\delta(G)$ 表示 G 的顶点的最小度. 如果图 G 中的各个顶点的度都等于 k, 则称 G 是 k 正则图.

G 的一条途径 (或通道) 是指一个有限非空序列 $W = v_0e_1v_1e_2v_2...e_kv_k$, 它的项交替为顶点和边，使得对 $1 \leq i \leq k$, e_i 的端点是 v_{i-1} 和 v_i. 称 W 是从 v_0 到 v_k 的一条途径， v_0 和 v_k 分别称为 W 的起点和终点， v_1, v_2,..., v_{k-1} 称为它的内部顶点. k 称为 W 的长. 如果途径 W 的边 e_1, e_2,..., e_k 互不相同，则 W 称为迹；如果 v_0, v_1, ..., v_k 互不相同，则 W 称为路. 端点相同但内部顶点不相同的迹称为圈，长为 n 的圈称为 n 圈，记作 C_n; 3 圈也称为三角形. 长度为奇数的圈是奇圈，否则是偶圈. G 的围长是指 G 中最短圈的长；若 G 没有圈，则定义 G 的围长为无穷大. $g(G)$ 表示 G 的围长. 如果 G 的任意两个顶点之间都有连接它们的路，则称图 G 连通. 不连通图的极大连通子图称为此图的连通分支，图的连通分支个数用 $\omega(G)$ 表示. 不含圈的图称为森林，连通的无圈图称为树.

若 V 的子集 V' 使得 $G - V'$ 不连通，则 V' 称为 G 的顶点割. k 顶点割是指有 k 个元素的顶点割. 若 G 至少有一对相异的不相邻顶点，则 G 所具有的 k 顶点割中最小的 k, 称为 G 的连通度，记为 $\kappa(G)$; 否则定义 $\kappa(G)$ 为 $|G| - 1$. 若 $\kappa(G) \geq k$, 则称 G 为 k 连通的.

G 的边割是指形如 $[S,\bar{S}]$ 的 E 的子集，其中 S 是 V 的非空真子集，且 $\bar{S}=V\backslash S$. 一个 k 边割是指有 k 个元素的边割．若 G 是非平凡且 E' 是 G 的一个边割，则 $G-E'$ 不连通． G 的边连通度 κ' 定义为 G 的所有 k 边割中最小的 k. 若 $\kappa'(G)\geq k$, 则称 G 是 k 边连通的．若 G 是非平凡， E' 是 G 的一个边割，且 $G-E'$ 恰有两个非平凡的连通分支． G 的边 $\sharp$ 连通度 $\lambda^{\sharp}$ 定义为 G 的所有这种边割中所含的最小边数．设 G 是顶点数至少为 l 的连通图， E 为 G 的边割，且 $G-E$ 至少有 l 个连通分支． G 中所有满足上述性质的边集中所含的最小边数称为 G 的 l 边连通度，记为 $\lambda_l(G)$. 称图 G 是 (k,l)- 边连通的，若 $\lambda_l(G)\geq k$.

对于 k(边，边 $\sharp$, (k,l)- 边) 连通图的任意一条边 e, $G-e$ 不是 k(边，边 $\sharp$, (k,l)- 边) 连通的，则称 G 为极小 k(边，边 $\sharp$, (k,l)- 边) 连通图．对于 k(边) 连通图的任意一个顶点 v, $G-v$ 不是 k(边) 连通的，则称 G 为临界 k(边) 连通图．对于 n 连通图 G 的任意阶不大于 k 的顶点子集 S, 有 $\kappa(G-S)=n-|S|$, 则称 G 为 k 临界 n 连通图．设 $e=uv$ 为 G 的边，收缩边 uv 是指将 uv 去掉，并将顶点 u 和 v 合并成一个新的顶点，记所得的图为 $G\cdot e$. k 连通图 G 中的一条边称为可收缩边，若收缩这条边后所得到的图仍为 k 连通图．不存在可收缩边的非完全 k 连通图称为收缩临界 k 连通图．显然若 $e=xy$ 是非完全图 G 的不可收缩边当且仅当 G 中存在包含顶点 x 和 y 的 k 点割． G 的所有可收缩边的集合记为 $E_C(G)$.

设 v 是 k 连通图中度至少为 $2k-2$ 的顶点，将 v 以两个相邻的顶点 v' 和 v'' 代替，使得以前与 v 相邻的顶点恰与 v' 和 v'' 之一相邻，并且使得 $d(v')\geq k$, $d(v'')\geq k$. 称此运算为 k 顶点分裂．分裂运算是收缩运算的逆运算.

称图 G 是 $(k+\frac{1}{2})$ 边连通的若 G 是 k 边连通的，且对于 G 的任意 k 边分离集 E', $G-E'$ 中至少有一个只含单个顶点的连通分支.

图 C_n^2 是由 n 圈 $C_n=v_1v_2\cdots v_nv_1$ 加边 v_iv_j 其中 $j\equiv(i+2)\ mod\ n$, $1\leq i\leq n$, $n\geq 4$ 而得到的.

由一个圈 C_{n-1} 添加一个新顶点，并且把这个顶点与圈的所有顶点相连，这样得到的图称为轮，记为 W_n, 其中 $n\geq 4$.

如果一个图能画在平面上使得它的边仅在端点相交，则称这个图为可嵌入平面的，或称为平面图.

设 G 为平面图，使在同一个 t- 面上的顶点均染为互不相同的颜色的方

法称为 G 的圈着色；使平面图 G 得到圈着色的最少颜色数称为圈着色数，记为 $\chi_C(G)$.

§1.2 连通图的构造和图的运算

本文研究的主要方向是连通图的构造以及连通图的保持连通性的运算的性质和可约化子结构的分布. 连通图的构造是近二十年来图论的研究热点. 由于它与网络模型和组合优化的密切联系，使得它具有重要的理论价值和应用价值. 1961 年 Tutte[T4] 首先给出了 3 连通图的一个递归构造方法，证明了 G 是 3 连通图当且仅当 G 是一个轮或者 G 是由一个轮通过一系列下列两种运算而得到： (1) 加边； (2) 分裂. 这是关于这方面研究的具有开创性的结果. 例：立方体图 Q_3 可由 W_5 经过加边和分裂运算而得到 (见图 1).

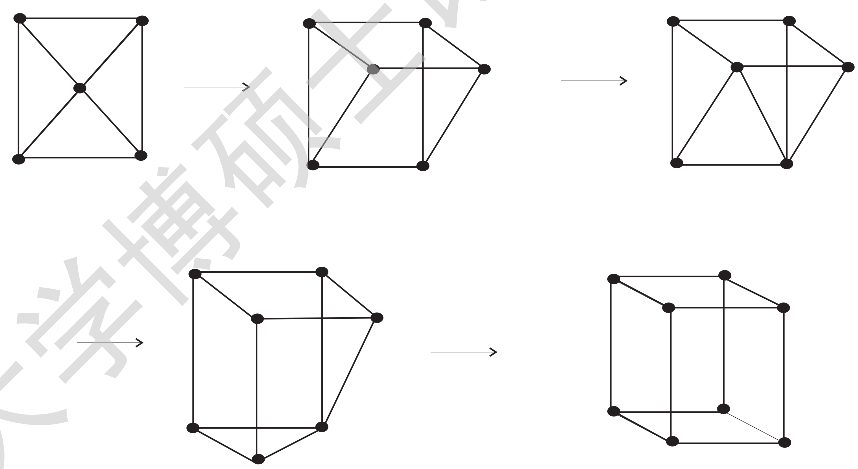

图 1

自从 Tutte 给出 3 连通图的出色的递归构造定理以来，人们开始致力于各类连通图的构造的研究，并得到许多有趣和深刻的结果. 关于 k 边连通图的构造的研究已取得很大的进展. 1978 年 Mader[M2] 首先给出了 k 边连通图的递归构造方法，证明了边连通度大于或等于 $2k$ 的图可由 K_2^{2k} 经过一系列加边和 O_k 运算而得到；边连通度大于或等于 $2k+1$ 的图可由 K_2^{2k+1} 或 K_3^{2k+1} 经过一系列加边， O_k^+ 和 O_k^2 运算而得到. 1979 年 Chaty 和

Chein[CC1] 给出极小 2 边连通图的构造方法. 1981 年朱必文 [Z1] 根据图的基圈数给出极小 2 边连通图的另一种递归构造方法. 1980 年 Habib 和 Peroche[HP1] 给出了极小 k 边连通图的统一的构造方法. 1989 年朱必文 [Z3] 给出极小 k 边连通简单图的构造方法. 1989 年张福基，郭晓峰和陈荣斯 [ZGC1] 给出了临界 k 边连通图的构造方法. 至此 k 边连通图，极小 k 边连通图，临界 k 边连通图都有一个统一的递归构造方法. 后来人们把边连通度推广至边 $\sharp$ 连通度和 (k,l) 边连通度， 1994 年 Peroche 等 [PV1] 在 Habib 和 Peroche[HP1] 关于极小 k 边连通图的构造的基础上得到极小 k 边 $\sharp$ 连通图的构造方法，其中 $k=2, 3, 4$. 最近 K. Hennayake, Lai Hong-Jian, Li DeYing 和 Mao JingZhong[HLLM1] 给出极小 (k,k)- 边连通图的构造，$k \geq 2$.

关于 k 连通图的构造的研究相对 k 边连通图更为复杂困难. 关于 3 连通图的构造有一系列的结果. 除了 Tutte 给出的 3 连通图的递归构造外， Barnette[BG1, B2, B3] 利用可去边，三角形收缩和圈收缩分别给出了 3 连通图的三种不同的递归构造方法，结果如下： (1) 任意 3 连通图可由图 K_4 上重复使用“加边”运算而得到. (2) 任意 3 连通图可由 K_4 或 $K_{3,3}$ 上重复使用下面两种运算而得到： (i) 加点； (ii) 加边，使得所加的边在新图的某一三角形上，且与这条边相对的顶点的度为 3. (3) 任意 3 连通图可由 K_4 或 K_5 上重复使用下面运算而得到： (i) 扩点为圈； (ii) 扩点为 M- 构形； (iii) 分裂三角形的顶点使其产生 t- 三角形. 作为 Tutte 定理的补充， 1982 年 Negami[N1] 得到下面定理：设 K 是不为轮的 3 连通图，则 G 是 3 连通图且可收缩为子图 K 当且仅当 G 可由 K 上重复使用加边和分裂运算而得到. 2 连通图的递归构造是由 Dirac[D4] 在 1967 年得到的. 1992 年张福基和郭晓峰 [ZG1] 探讨了 2 连通图的可约链，得到极小，临界和临界极小 2 连通图的构造. 1974 年 Slater[S3] 给出了 4 连通图的递归构造方法，证明任意 4 连通图 G 可由 K_5 通过重复使用以下运算而得到： (1) 加边； (2) 4 接合 (4-soldering); (3) 4 点分裂 (4-point-splitting); (4) 4 边分裂 (4-line-splitting); (5) 3 折 4 点分裂 (3-fold-4-point-splitting). 其中讨论的过程比较复杂繁琐. 后来 1999 年尹建华 [Y2] 给出 4 连通图的一个新的较为简单的递归构造方法，证明了 G 是 4 连通图当且仅当 G 是一个 2 循环图或者 G 是从一个 2 循环图重复使用以下四种运算推得的图： (1) 加边； (2) 拆点； (3) 加点去边； (4) 扩点. 1986 年 Dawes[D1] 给出极小 3 连通图的构造定理. 最

近 K. Kawarabayashi 和 Luo Rong[KLNZ1] 等探讨了不含 K_k 子式的 k 连通图的结构. Maurer, Mader, Kriesell 和苏健基等 [M5, M8, MS1, MS2, S5, S6, S8, S9, S13, SYZ1] 还研究了 k 临界 n 连通图的结构性质. 但是对于 $k(k \geq 5)$ 连通图的递归构造还有赖于进一步的研究. 1996 年 T. Politof 和 A. Satyanarayana[PS2] 得到了拟 4 连通图的构造 (定义见本文的第四章), 即任意拟 4 连通图可由 W_n, $4 \leq n \leq 6$, 棱柱或 Mobius 梯重复使用以下运算而得到: (1) 加边; (2) 分裂; (3) 用 K_4^- 取代三角形, 其中三角形的三个顶点的度均大于 3. 2000 年 A. Kaneko 和 K. Ota[KO1] 首先引入 (n, λ)- 连通的定义. 设 $G = (V, E)$ 是可以有重边但不含环的图, 满足以下条件: (1) $|G| \geq n + 1$; (2) 对任意 $S \subseteq V(G)$ 和 $L \subseteq E(G)$, 如果 $\lambda|S| + |L| < n\lambda$, 则 $G - S - L$ 是连通的. 则称 G 是 (n, λ)- 连通的. 它是边连通度和点连通度的定义的综合和推广. 因为由定义知, $(n, 1)$- 连通图是 n 连通的, $(1, \lambda)$- 连通图是 λ 边连通的. 最近 T. Jordan [J1] 利用度为 4 的可分裂顶点给出 $(2, 2)$- 连通图的一个递归构造方法.

在各种类型连通图递归构造的研究中, 常用的方法是引入保持图的连通性的运算, 使得任意连通图都可以由一些简单的连通图通过重复使用这些运算而得到. 下面介绍本文涉及到的两种比较常见的运算: 收缩边运算和“去边”运算.

收缩边运算是常用的运算之一, 连通图经过收缩边运算后得到比原来更小的图, 由于所考虑的图是有限图, 经过有限次收缩运算后, 最后得到不存在可收缩边的 k 连通图. 因此按这种方法要得到 k 连通图的构造, 根本问题是要得到不存在可收缩边的 k 连通图的结构, 即收缩临界 k 连通图的结构. 对于 $k = 3$, Tutte[T4] 证明了阶大于 4 的 3 连通图存在可收缩边, 所以不存在阶大于 4 的收缩临界 3 连通图. 对于 $k = 4$, 1982 年 Martinov[M11] 证明了收缩临界 4 连通图 G 是 4 连通, 4 正则, 且每条边恰在一个三角形上, 即 G 或者是 C_n^2 或者是 $\frac{7}{2}$ 边连通立方体的线图. 而 $\frac{7}{2}$ 边连通立方体可由 K_4 或 $K_{4,4}$ 中去掉 1 因子的图通过构造的方法而得到. 当 $k = 5$ 时, 与收缩临界 4 连通图的情况不同, K. Ando 等 [AKK1] 证明了收缩临界 5 连通图不是 5 正则的且它的所有的边并不都包含在一个平凡割中, 并得出如下定理:

定理 1.2.1[AKK1]. 对任意图 H, 存在收缩临界 5 连通图 G 使得 H 是 G 的导出子图.