学校编码：10384　　分类号______ 密级______
学号：19120081152724　　UDC______

硕 士 学 位 论 文

下半连续函数的广义凸性及其次微分算子的广义单调性

Generalized Convexity of Lower Semicontinuous Functions and Generalized Monotonicity of their Subdifferentials

张 晟

指导教师姓名：程 立 新 教授
专 业 名 称：基 础 数 学
论文提交日期：2011 年 5 月
论文答辩日期：2011 年 6 月
学位授予日期：2011 年 月

答辩委员会主席：__________
评 阅 人：__________

2011 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

目 录

Contents

中文摘要

本文主要考虑下半连续函数的广义凸性及其次微分算子的广义单调性之间的关系。我们分别利用下半连续函数的Fréchet ϵ-次微分、KM ϵ-次微分和KM次微分给出相应函数拟凸的一个等价刻画，并证明了下半连续函数的拟凸性与其相应的三种次微分算子的拟单调性之间的等价性。我们还得到一个拟凸和伪凸之间的关系，以及函数伪凸与其Fréchet ϵ-次微分算子伪单调之间的关系。

关键词：下半连续函数；拟凸；伪凸；次微分；拟单调；伪单调。

Abstract

This dissertation mainly considers the relationship between generalized convexity of lower semicontinuous functions and generalized monotonicity of their subdifferentials. In particular, we characterize the quasi-convexity of a lower semicontinuous function respectively by its Fréchet ϵ-subdifferential, KM ϵ-subdifferential and KM subdifferential, and then prove the equivalence between the quasi-convexity of a lower semicontinuous function and the quasi-monotonicity of its subdifferentials. We also derive the relation between quasi-convexity and pseudo-convexity, and the relation between the pseudo-convexity of a function and the pseudo-monotonicity of its Fréchet ϵ-subdifferential.

Key words: lower semicontinuous function; quasi-convex; pseudo-convex; subdifferential; quasi-monotone; pseudo-monotone.

第一章 引言

众所周知，非光滑(不可微)函数、具有非光滑边界的集合以及集值映射等概念在许多数学领域，例如最优化控制理论、非线性规划和变分分析中出现得十分频繁。因此在上个世纪七十年代，以此为研究对象的数学学科“非光滑分析”应运而生。对于研究一般的非光滑(不可微)函数，在函数的不可微点通常采用次微分的概念来取代经典意义下导数的概念，这样的方法源于上个世纪六十年代对于凸函数的研究。由于最优化和非线性规划理论的发展，许多基本理论问题皆涉及到凸性，使凸分析日益受到重视而深入发展。Rockafellar[1]在这方面首先迈出了坚实且意义深远的一步，他建立的凸函数的次微分理论在最优化控制理论和经济等方面都有十分广泛的应用。而对于一般的非凸函数的次微分的概念，则是在1973年由Francis Clarke最先提出，他在一般的Banach空间中针对局部Lipschitz函数定义了著名的Clarke导数(次微分)，以此为基础建立了一套完整的次微分理论，并将其系统地应用到许多具有非光滑对象的问题的解决上，详见[2,3]。Clarke在非光滑分析方面的先驱性的工作为进一步研究非光滑问题开启了一扇大门，使得人们在处理这类问题时的手段开始丰富起来。此后，许多次微分的概念相继被引入用以解决不同的非光滑问题，例如Rockafellar引入的逼近次微分[4]，Kruger和Mordukhovich引入的Kruger-Mordukhovich次微分[5–8]以及Ioffe引入的A次微分和G次微分[9,10]等等。因此，对次微分的研究逐渐在非光滑分析和变分分析中占据核心的地位；在应用领域诸如最优化控制理论和非线性规划中，对于一个具体的非光滑问题，如何选取适当的次微分也是人们十分关心的问题。

由于次微分的概念的重要性，除此之外，也由于凸函数的概念在许多应用数学领域和经济领域中的举足轻重的地位[2,11–13]，因此如何利用函数次微分算子的性质去刻画函数的凸性便成为非光滑分析和凸分析中一个非常自然并且关键的问题。这个问题最先被Poliquin[14]提出并引起了广泛兴趣。Clarke研究了Banach空间中局部Lipschitz函数的凸性及其Clarke次微分算子的单调性之间的等价关系[2]，Poliquin在[14]中针对有限维空间中的下半连续函数给出了两者之间等价性的证明，随后这个结论被Correa等人推广到一般的无穷维Banach空间中去[15,16]。而利用次微分算子的性质对函数的广义凸性，例如拟凸性和伪凸性进行刻画，也有许多数学工作者在这方面得到了一些有意义的结果：Aussel等人研究了Banach空间中下半连续函数的拟凸性和伪凸性及其Clarke次微分算子的拟单调性和伪单调性之间的等价关系[17,18]，而Aussel也证明了这样的结论实际上对一类满足一定条件的次微

分算子都是成立的。另一方面，Soleimani则采用Kruger-Mordukhovich次微分(以下简称KM次微分)算子的拟单调性来刻画局部Lipschitz函数的拟凸性[19]，并给出了函数拟凸和伪凸之间的关系。KM次微分是一种通过序列极限构造的次微分，这样的概念最初由Mordukhovich在[5,6]中引入用以研究有限维空间中的最优化控制问题，后来被Kruger和Mordukhovich推广到无穷维空间中去[7,8]。与Clarke次微分不同，KM次微分集合通常是非凸的，甚至是非闭的，这就给研究它的一些性质带来了一定的困难。然而在Asplund空间的架构下，KM次微分有一套完整的次微分理论，并且在最优化控制领域已经得到了十分广泛的应用，详见[20,21]。本文主要考虑Banach空间中下半连续函数的广义凸性及其KM次微分算子的广义单调性之间的等价关系，这推广了[19]中的部分结论。

本文的结构安排如下：第二章给出了本文使用的一些基本符号和预备知识，其中主要包括一些次微分诸如Fréchet ϵ-次微分、KM ϵ-次微分和KM次微分的定义及相关的结论，部分给出简单的注释和证明。第三章主要介绍著名的Zagrodny中值定理，并由此得到一个引理，为第四章主要结论的证明做准备。第四章中我们首先分别利用下半连续函数的Fréchet ϵ-次微分、KM ϵ-次微分和KM次微分给出相应函数拟凸的一个等价刻画，随后给出拟单调的定义，并证明了下半连续函数的拟凸性与其相应的三种次微分算子的拟单调性之间的等价性。最后，我们还得到一个拟凸和伪凸之间的关系，以及函数伪凸与其Fréchet ϵ-次微分算子伪单调之间的关系。

第 二 章　基本符号和预备知识

本章主要介绍本文要用到的一些符号、基本定义和相关结论，部分给出简单的注释和证明。

我们采用标准的记法。X总表示实Banach空间，其上赋予的范数记为$\|\cdot\|$，$x_k \to x$表示序列$\{x_k\}$在范数拓扑意义下收敛到 x。X^*是X的对偶空间，其上赋予弱星拓扑w^*，$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$表示序列$\{x_k^*\}$在弱星拓扑意义下收敛到 x^*。$\langle\cdot,\cdot\rangle$表示$(X, X^*)$上的自然对偶。$B(X)$和$B(X^*)$分别表示$X$和$X^*$中的闭单位球。对于$X$中的一个非空子集$\Omega$，$\overline{\Omega}$表示$\Omega$的闭包，$u \xrightarrow{\Omega} x$表示$u \to x$且$u \in \Omega$。对于$x, y \in X$，记$[x, y] \triangleq \{z \in X : z = (1-t)x + ty, t \in [0, 1]\}$，$(x, y] \triangleq [x, y] \setminus \{x\}$，$[x, y) \triangleq [x, y] \setminus \{y\}$和$(x, y) \triangleq [x, y] \setminus \{x, y\}$。

对于定义在X上的广义实值函数$f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$，记$f$的定义域 $\mathrm{dom} f \triangleq \{x \in X : f(x) < +\infty\}$，$f$的上方图 $\mathrm{epi} f \triangleq \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} : f(x) \le r\}$。此时，$\liminf f(x)$和$\limsup f(x)$分别表示经典意义下函数$f$的下极限和上极限。$u \xrightarrow{f} x$表示$u \to x$且$f(u) \to f(x)$。

定义 2.1：X是Banach空间，$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值函数。

(1) 称f在点$x \in \mathrm{dom} f$处是下半连续的，如果$f(x) \le \liminf\limits_{x_k \to x} f(x_k)$对于任一收敛到$x$的序列$\{x_k\}$均成立。

(2) 称f是凸函数，如果$\forall x, y \in \mathrm{dom} f$下式成立：

$$f((1-t)x + ty) \le (1-t)f(x) + tf(y),\ \forall t \in [0, 1]$$

(3) 称f是拟凸函数，如果$\forall x, y \in \mathrm{dom} f$下式成立：

$$f((1-t)x + ty) \le \max\{f(x), f(y)\},\ \forall t \in [0, 1]$$

对于一个集值映射$\Phi : X \longrightarrow X^*$，记$\Phi$的定义域 $\mathrm{dom}\Phi = \{x \in X : \Phi(x) \ne \emptyset\}$。记号$\limsup\limits_{u \to x} \Phi(u)$表示集合$\Phi(u)$的序列Kuratowski-Painlevé上极限：

$$\limsup_{u \to x} \Phi(u) = \{x^* \in X^* : \text{存在序列 } x_k \to x \text{和序列 } x_k^* \xrightarrow{w^*} x^* \text{满足}$$
$$x_k^* \in \Phi(x_k), \forall k = 1, 2, ...\}。$$

定义 2.2：集值映射$\Phi : X \longrightarrow X^*$称为

(1) 单调的，如果$\forall x, y \in X$和$\forall x^* \in \Phi(x)$, $y^* \in \Phi(y)$，下式成立：

$$\langle x^* - y^*, x - y\rangle \geq 0 \text{ 。}$$

(2) 拟单调的，如果$\forall x, y \in X$下述成立：

$$\text{若}\exists\, x^* \in \Phi(x)\text{满足}\langle x^*, y - x\rangle > 0,\ \text{则必有}\langle y^*, y - x\rangle \geq 0,\ \forall y^* \in \Phi(y) \text{ 。}$$

注释 2.1： 显然，凸函数都是拟凸的，单调的集值映射都是拟单调的。

根据[22]，我们先给出Banach空间中任一集合在一个点处的Kruger-Mordukhovich法锥的定义。

定义 2.3： Ω是Banach空间X中的非空集，$\epsilon \geq 0$。

(1) $x \in \overline{\Omega}$，非空集

$$N_\epsilon^F(x; \Omega) \triangleq \{x^* \in X^* : \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x} \frac{\langle x^*, u - x\rangle}{\|u - x\|} \leq \epsilon\}$$

称为Ω在x处的Fréchet ϵ-法向量集。特别地当$\epsilon = 0$时称为Ω在x处的Fréchet法锥，记作$N^F(x; \Omega)$。若$x \notin \overline{\Omega}$，则定义$N_\epsilon^F(x; \Omega) = \emptyset$，$\forall \epsilon \geq 0$。

(2) $x \in \overline{\Omega}$，非空集

$$\begin{aligned} N^{KM}(x; \Omega) &= \limsup_{u \xrightarrow{\Omega} x,\ \epsilon \downarrow 0} N_\epsilon^F(x; \Omega) \\ &\triangleq \{x^* \in X^* : \text{存在序列 } \epsilon_k \downarrow 0,\ x_k \to x \text{和 } x_k^* \xrightarrow{w^*} x^* \text{满足} \\ &\qquad x_k^* \in N_{\epsilon_k}^F(x_k; \Omega), \forall k = 1, 2, ...\} \end{aligned}$$

称为Ω在x处的Kruger-Mordukhovich法锥，简称KM法锥。若$x \notin \overline{\Omega}$，则定义$N^{KM}(x; \Omega) = \emptyset$，$\forall \epsilon \geq 0$。

有了Kruger-Mordukhovich法锥的概念，就可以进一步给出Banach空间上广义实值函数在某一点处的Kruger-Mordukhovich次微分的定义。

定义 2.4： X是Banach空间，$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值函数，$x \in$dom$f$，$\epsilon \geq 0$。

(1) $\partial^{KM} f(x) \triangleq \{x^* \in X^* : (x^*, -1) \in N^{KM}((x, f(x)); \text{epi} f)\}$
称为f在x处的Kruger-Mordukhovich次微分，简称KM次微分。若$x \notin \text{dom} f$，则定义$\partial^{KM} f(x) = \emptyset$。

(2) 若f在x处下半连续，则$\partial_{\epsilon}^{F}f(x) \triangleq \{x^* \in X | \liminf\limits_{v\to 0}\dfrac{f(x+v)-f(x)-\langle x^*,v\rangle}{\|v\|} \geq -\epsilon\}$称为$f$在$x$处的Fréchet ϵ-次微分。特别地当$\epsilon = 0$时称为f在x处的Fréchet次微分，记作$\partial^F f(x)$。若$x \notin \mathrm{dom} f$，则定义$\partial_{\epsilon}^{F}f(x) = \emptyset$，$\forall \epsilon \geq 0$。

注释 2.2： 显然，若$\epsilon_1 \leq \epsilon_2$，则$\partial_{\epsilon_1}^{F}f(x) \subset \partial_{\epsilon_2}^{F}f(x)$。

我们再给出Asplund空间的定义。

定义 2.5： 一个Banach空间X称为Asplund空间，如果X的每个非空开凸子集D上定义的连续凸函数f都在D的一个稠密的G_δ子集上处处Fréchet可微。

关于Asplund空间的性质参见[23]。在Asplund空间中，下半连续函数的KM次微分有较简单的表达式[22]。

定理 2.1： X是Banach空间，$f: X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值函数。

(1) 若f在点$x \in \mathrm{dom} f$处下半连续，则

$$\begin{aligned}\partial^{KM}f(x) &= \limsup_{u\xrightarrow{f}x,\ \epsilon\downarrow 0}\partial_{\epsilon}^{F}f(u)\\ &\triangleq \{x^* \in X^* : \text{存在序列 } \epsilon_k \downarrow 0,\ x_k \xrightarrow{f} x \text{和 } x_k^* \xrightarrow{w^*} x^* \text{满足}\\ &\qquad x_k^* \in \partial_{\epsilon_k}^{F}f(x_k), \forall k = 1,2,...\}\ 。\end{aligned}$$

(2) 若X是Asplund空间，f在点$x \in \mathrm{dom} f$处下半连续，则

$$\partial^{KM}f(x) = \limsup_{u\xrightarrow{f}x}\partial^{F}f(u)\ 。$$

注释 2.3： 若X是Hilbert空间，f在点$x \in \mathrm{dom} f$处下半连续，则$\partial^{KM}f(x) = \partial^{L}f(x)$[20]。其中$\partial^L f(x)$表示$f$在$x$处的极限逼近次微分，相关的定义及性质参见[4,13]。

最后给出Kruger-Mordukhovich ϵ-次微分的定义。

定义 2.6： X是Banach空间，$f : X \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值函数，$x \in \mathrm{dom} f$，$\epsilon \geq 0$。集合

$$\partial_{\epsilon}^{KM}f(x) = \limsup_{u\xrightarrow{f}x}\partial_{\epsilon}^{F}f(u)$$

称为f在x处的Kruger-Mordukhovich ϵ-次微分，简称KM ϵ-次微分。若$x \notin \mathrm{dom} f$，则定义$\partial_{\epsilon}^{KM}f(x) = \emptyset$，$\forall \epsilon \geq 0$。

注释 2.4： 由定理 1的(2)可知，若X是Asplund空间且f在点$x \in \mathrm{dom} f$处下半连续，则$\partial_0^{KM} f(x) = \partial^{KM} f(x)$。

KM ϵ-次微分的定义最早在[24]中被引入用以研究广义实值函数的ϵ-凸性和其次微分算子的ϵ-单调性之间的关系。后来在[25]中Van Ngai等人给出了一些KM ϵ-次微分的运算法则，并将其应用到最优化控制问题上。

对于上述提到的次微分，容易证明有如下包含关系：

命题 2.1： X是Banach空间，$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值函数，$x \in$dom$f$。则$\forall \epsilon > 0$有

$$\partial_\epsilon^F f(x) \subset \partial_\epsilon^{KM} f(x),\ \partial^{KM} f(x) \subset \partial_\epsilon^{KM} f(x)$$

证明： $\forall x^* \in \partial_\epsilon^F f(x)$，取$x_k \equiv x$，$x_k^* \equiv x^* \in \partial_\epsilon^F f(x_k)$，$\forall k$。则由定义显然有$x^* \in \partial_\epsilon^{KM} f(x)$，因此$\partial_\epsilon^F f(x) \subset \partial_\epsilon^{KM} f(x)$；

$\forall x^* \in \partial^{KM} f(x)$，根据定义存在序列 $\epsilon_k \downarrow 0$，$x_k \to x$和 $x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$满足$x_k^* \in \partial_{\epsilon_k}^F f(x_k)$，$\forall k$。则$\forall \epsilon > 0$，当$k$充分大时总有$\epsilon_k < \epsilon$，此时有$x_k^* \in \partial_{\epsilon_k}^F f(x_k) \subset \partial_\epsilon^F f(x_k)$。再由$\partial_\epsilon^{KM} f(x)$定义即知$x^* \in \partial_\epsilon^{KM} f(x)$，因此$\partial^{KM} f(x) \subset \partial_\epsilon^{KM} f(x)$。

□

进一步，若X是Asplund空间，[22]中证明了KM ϵ-次微分和KM次微分有如下关系：

定理 2.2： X是Asplund空间，$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值函数。若$f$在点$x \in \mathrm{dom} f$处下半连续，则

$$\partial_\epsilon^{KM} f(x) = \partial^{KM} f(x) + \epsilon B(X^*),\ \forall \epsilon \geq 0 \text{ 。}$$

第 三 章 准备工作

本章主要为下一章的主要结论的证明做准备，给出了一些重要的引理和相关证明。

首先介绍著名的Zagrodny中值定理。最早D.Zagrodny在[26]中利用Clarke次微分给出了Banach空间中下半连续函数的Zagrodny中值定理的证明，而随后在[27]中L.Thibault证明了Zagrodny中值定理实际上对更广泛的一类次微分－预次微分都是成立的。因此，以下先给出预次微分的定义。

定义 3.1： X是Banach空间，$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值下半连续函数，称$\partial f$是$f$的预次微分算子，若其满足下列五条：

(1) $\partial f(x) \subset X^*$，并且若$x \notin \mathrm{dom} f$，则$\partial f(x) = \emptyset$；

(2) 若f与g在x的某个邻域内相等，则$\partial f(x) = \partial g(x)$；

(3) 若f是凸函数，则$\partial f(x) = \{x^* \in X^* | \langle x^*, y - x\rangle \le f(y) - f(x), \forall y \in X\}$；

(4) 若x是f的局部最小值（即在x的某个邻域内，f在x达最小值），则$0 \in \partial f(x)$；

(5) 对于任意定义在X上的实值连续凸函数g，下式成立：

$$\partial(f + g)(x) \subset \limsup_{u \xrightarrow{f} x} \partial f(u) + \partial g(x) 。$$

对于预次微分，根据L.Thibault[27]有如下的Zagrodny中值定理：

定理 3.1： X是Banach空间，$f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值下半连续函数，$\partial f$是$f$的预次微分算子。则$\forall a, b \in \mathrm{dom} f$且$a \neq b$，存在$c \in [a, b)$以及序列$\{x_k\} \subset \mathrm{dom}\partial f$和$\{x_k^*\} \subset X^*$满足$x_k \xrightarrow{f} c$和$x_k^* \in \partial f(x_k)$，使得下述三条成立：

(1) $f(b) - f(a) \le \liminf\limits_{k\to+\infty} \langle x_k^*, b - a\rangle$；

(2) $\dfrac{\|b - c\|}{\|b - a\|}(f(b) - f(a)) \le \liminf\limits_{k\to+\infty} \langle x_k^*, b - x_k\rangle$；

(3) $\|b - a\|(f(c) - f(a)) \le \|c - a\|(f(b) - f(a))$。

由Zagrodny中值定理，我们可以得到如下引理，这个引理将在第四章主要定理的证明中反复用到。

引理 3.1： X是Banach空间，$f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$是定义在$X$上的广义实值下半连续函数，$\partial f$是$f$的预次微分算子。则$\forall a \in \mathrm{dom} f$与$b \in X$满足$f(a) < f(b)$，存在$c \in [a, b)$以及序列$\{x_k\} \subset \mathrm{dom}\partial f$和$\{x_k^*\} \subset X^*$满足$x_k \xrightarrow{f} c$和$x_k^* \in \partial f(x_k)$，使得：

$$\langle x_k^*, x - x_k \rangle > 0, \ \forall k$$

对所有的$x = b + t(b - a), \ t \geq 0$成立。

证明： 选取$s \in \mathbb{R}$满足$f(a) < s < f(b)$，定义X上的广义实值函数$g: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$如下：

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq b \\ s, & x = b \end{cases}$$

则g的水平集$\{x \in X : g(x) \leq r\} = \{x \in X : f(x) \leq r\} \cup \{b\}$，$\forall r \in \mathbb{R}$。因此由$f$的下半连续性马上得到$g$也是下半连续的，并且有$a, b \in \mathrm{dom} g$满足$g(a) < g(b)$。再由定义3.1的(2)知$\partial f(x) = \partial g(x)$，$\forall x \neq b$。对$g$使用定理3.1，则存在$c \in [a, b)$以及序列$\{x_k\} \subset \mathrm{dom}\partial g$和$\{x_k^*\} \subset X^*$满足$x_k \xrightarrow{g} c$和$x_k^* \in \partial g(x_k)$，使得

$$\liminf_{k \to +\infty} \langle x_k^*, b - x_k \rangle > 0 \ \text{并且} \ \liminf_{k \to +\infty} \langle x_k^*, b - a \rangle > 0$$

因此当k充分大时，$\forall x = b + t(b - a), \ t \geq 0$有

$$\langle x_k^*, x - x_k \rangle = \langle x_k^*, b - x_k \rangle + t \langle x_k^*, b - a \rangle > 0$$

同时注意到$c \neq b$，故可以使$x_k \neq b$，$\forall k$。此时就有$x_k \xrightarrow{f} c$和$x_k^* \in \partial f(x_k)$，$\forall k$。这就完成了证明。

□

可以证明，Asplund空间中下半连续函数的KM次微分是预次微分[20,22]，因此相应的Zagrodny中值定理以及上述引理成立。

命题 3.1： Asplund空间中下半连续函数的KM次微分是预次微分。

本章的最后我们给出一个泛函分析中经典的结论，在第四章主要定理的证明中会用到。

命题 3.2： X是Banach空间，$x \in X$且$x^* \in X^*$。X中的序列$\{x_k\}$和X^*中的序列$\{x_k^*\}$分别满足$x_k \to x$以及$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$，则$\lim\limits_{k \to \infty} \langle x_k^*, x_k \rangle = \langle x^*, x \rangle$。

证明： 因为序列$\{x_k^*\}$是弱星收敛的，因此是弱星有界的。则由Banach-Steinhaus定理知$\{x_k^*\}$是X^*中的范数有界的序列。记$\sup\limits_{k\geq 1}\|x_k^*\|$=M，于是有

$$\begin{aligned}|\langle x_k^*, x_k\rangle - \langle x^*, x\rangle| &\leq |\langle x_k^*, x_k\rangle - \langle x_k^*, x\rangle| + |\langle x_k^*, x\rangle - \langle x^*, x\rangle| \\ &\leq M\|x_k - x\| + |\langle x_k^*, x\rangle - \langle x^*, x\rangle|\end{aligned}$$

由$x_k \to x$以及$x_k^* \xrightarrow{w^*} x^*$知当$k \to \infty$时上述不等式右端趋于0，这就证明了$\lim\limits_{k\to\infty}\langle x_k^*, x_k\rangle = \langle x^*, x\rangle$。

□