学校编码：10384　　　　　　　　　　　　分类号________密级______
学号：20051301594　　　　　　　　　　　　　　　　UDC______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

量子环面上的斜导子李代数的一类无穷维表示

A Class of Representations of the Skew Derivation Lie Algebra over Quantum Torus

余 铌 娜

指导教师姓名：　谭绍滨 教授
专 业 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2008 年 5 月
论文答辩时间：　2008 年 5 月
学位授予日期：　2008 年 6 月

答辩委员会主席：____________
评　　阅　　人：____________

2008 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1.保密（），在年解密后适用本授权书。

2.不保密（）

（请在以上相应括号内打”√”）

作者签名：　　　　　　　　日期：　　　年　　　月　　　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　　年　　　月　　　日

目录

Contents

摘 要

量子环面上的导子李代数在李代数的表示的研究中起着很重要的应用。量子环面包含了多变量的罗朗多项式环为其特例，且其导子李代数还包含了一些特殊的Jordan代数的导子李代数为其子代数。此外，toroidal李代数和以量子环面为坐标代数的扩张仿射李代数上的可积模的分类问题可转化为其坐标代数上的导子李代数的模的分类。量子环面的导子李代数的结构和表示已经被广泛的研究。本论文集中研究秩2的量子环面上的斜导子李代数的结构和表示。全文分三章：在第一章，我们先引入斜导子李代数的概念。第二章中我们引入一类无穷维sl_2-模和函子F_g^α。最后，在第三章中，我们研究这类sl_2-模在这个函子F_g^α下得到的像模的结构，从而得到了一类具有无限维权空间的斜导子李代数的表示。

关键词：表示；李代数；斜导子。

Abstract

The derivation Lie algebras of quantum torus have many important application in the study of the representation theory of Lie algebras. The quantum torus contains the Laurent polynomial ring as its special case, and the derivation Lie algebra of the quantum torus contains the derivation Lie algebra of certain Jordan algebras as its subalgebras. Moreover, it is proved that the classifications of the integrable modules over the toroidal Lie algebras and some extended affine Lie algebras can be reduced to the classification of the modules over the derivation Lie algebras of the coordinate algebras. The structure and the representations of derivation Lie algebra of quantum torus have been studied extensively. In this paper, we focus on studying the representations of the skew derivation Lie algebra over the rank two quantum torus. We describe the results as follows: In chapter one, we recall the notion of skew derivation Lie algebra. In chapter two, we introduce a class of infinite-dimensional sl_2-modules and the functor F_g^α. Finally in chapter three, we study the structure of the image modules, under the functor F_g^α, of the infinite-dimensional sl_2-modules. Then we get a class of representations of the skew derivation Lie algebras with infinite-dimensional weight spaces.

Key words: Representation；Lie algebra；skew derivation.

引 言

李代数最先是由Sophus Lie 在研究李群时作为代数结构引入的。一个李群在单位元处的切空间有一个自然的李代数结构，Lie称之为无穷小群。但李代数本身也是令人感兴趣的，人们发现了有限维单李代数在数学和数学物理上都具有很多应用，李代数现在已经发展成为数学的一个经典分支。

1890-1900 年间，Wilhelm Killing 最先给出了复数域上的单李代数的分类[Ki]，Elie Cartan 进一步研究了复半单李代数的结构[Ca1]，并给出了它们的有限维不可约表示的分类[Ca2]。H.Weyl 发展了Killing-Cartan 的理论，得到了这些表示的特征标公式与完全可约性定理，同时，他提出了研究紧半单李群的某种包含Cartan 分类中所有表示的无穷维表示。

1967年，V. G. Kac 和R. V. Moody 在前人工作的基础上，开始研究有限维单李代数的无穷维推广([Ka1],[Mo])。他们分别独立地引入了现在被称为Kac-Moody 代数的李代数。后来，Macdonald 发现了一些类似于仿射根系的Weyl 等式。这些等式指出了单李代数的结构与模形式理论之间的深刻关系[Ma]。事实上，Macdonald 的等式中最简单的一个早就包含在Jacobi 的经典著作[J]中。Dayson 也独立地发现了一些Macdonald 等式，但由于数学家与物理学家缺少交流而使他错失了发现模形式与李代数间更深刻的联系的机会[D]。Kac 在1974年得到Kac-Moody 代数的最高权可积模的类似于Weyl 特征标公式的公式[Ka2]，他的结果澄清了Macdonald 等式的本质特征。这些公式应该到仿射Kac-Moody 代数及它们的扭代数得到的式子可以用模函数来表示。后来人们还发现这些公式在某些特殊情形下可以化为非常简单的形式。

J. Lepowsky 与 R. L. Wilson 通过一些具有无穷多个变量的微分算子构造了最简单的仿射代数$s\hat{l}_2$ 的基本表示[LW]，并且后来推广到所有Simply-lace 仿射代数及它们的Dynkin 图诱导出的扭代数的基本表示[KKLW]。Garland 注意到这些微分算子与物理学在“Dual Resonance Theory”中用到的“顶点算子”有相似之处。后来，在Kac与Frenkel[FK] 构造出simply-laced 仿射李代数的基本表示的齐次顶点算子实现。Segal [Se] 也独立地给出了上述顶点算子的实现。从而证实了“顶点算子”与“微分算子”是完全一致的。事实上，$s\hat{l}_n$的非扭顶点算子构造正是物理学家一直希望找到的一种模型。后来人们证实了$\hat{E}_8$在String理论中具有重要的应用。同时，非扭顶点算子表示使人们可以以一种新的角度看有限维单李代数，即将之视为保持某种自然分次的仿

射李代数的子代数。这种构造的可积结构对Chevalley的关于李型的有限群理论，以及Steinberg对Chevalley工作的推广都起了关键的作用[St]。

Kac-Moody代数被引入后便迅速的发展。有限维单李代数是Kac-Moody 代数的例子，但Kac-Moody 代数的理论范围更广，它包含了许多无穷维的例子。Kac-Moody代数在数学的许多领域，包括群论组合，模形式，微分方程和不变理论等具有重要的应用。此外，它在数学物理中的统计物理，保型场论等也具有重要的应用。

Virasoro代数是无穷维李代数中一类非常重要的代数，它实际上是一维环面上的导子李代数的泛中心扩张。Virasoro代数可以通过Sagawara算子作用在仿射李代数的任何（除了水平等于对偶Coxeter数的相反数）高权模上。由于Fock空间可以作为仿射李代数的表示空间，从而可以作为Virasoro代数的表示空间。因此，仿射李代数与具有常中心的Virasoro李代数的半直积在数学和物理上都是一种很重要的李代数，且这类表示在构造仿射李代数的表示和分析其结构起着重要的作用。Virasoro代数在物理学的许多分支中都扮演着极其重要的角色[RS]。Virasoro代数的表示在顶点算子代数理论以及对monster group的研究中也扮演着极其重要的角色([DL], [FLM], [LL])，它在理论物理中的dual resonance model共形声理论中也有许多重要应用。由于Virasoro代数在数学和物理上的广泛应用，人们自然试图对它进行推广。单变量的罗朗多项式的导子李代数被称为Witt代数。d维环面A上的导子全体所成的李代数$DerA$是Witt代数的最为自然的推广。对$DerA$的结构及其不可约模的构造和分类问题的研究具有重要的意义。例如，Rao和Moody在研究toroidal 李代数的表示时，推广了Sugawara构造法从而得到$DerA$的算子，进而构造也了toroidal李代数的一大类顶点表示[RM]. 在量子群研究工作的带动下，人们也对量子环面$\mathbb{C}_q$及其导子李代数$Der(\mathbb{C}_q)$进行了研究。人们发现$Der(\mathbb{C}_q)$与扩张仿射李代数的结构和表示也产生了深刻的联系。Berman，郜云等人构造出以$\mathbb{C}_q$为坐标代数的扩张仿射李代数的主表示和齐次表示([BJ], [G1], [G2]). 在他们的构造方法中也可看出$Der(\mathbb{C}_q)$-模的重要性。此外，Rao 和姜翠波等人对toroidal李代数的可积模进行分类时发现这些模的分类可以归结为toroidal李代数的坐标代数上的导子李代数的模的分类[RJ]. 由此可见，研究$Der(\mathbb{C}_q)$的结构和表示具有重要的理论价值，因而人们对$Der(\mathbb{C}_q)$的结构和表示进行了广泛的研究。

设A为具有交换变量的罗朗多项式环，$Der(A)$为A的导子李代数。Larsson [L] 构造了一个从gl_d-模到$Der(A)$-模的函子F^α，这些$Der(A)$-模实际上是沈光宇构造的模的特

例[Sh]．Rao [Ra2] 研究了有限维gl_d-模在这个函子F^α下的像模的结构。林卫强和谭绍滨[LT1] 推广了Rao的结果，他们构造了一类从gl_d-模到$Der(\mathbb{C}_q)$-模的函子F_g^α，并完全的刻划了当量子环面矩阵q的元素是单位根的情形下$Der(\mathbb{C}_q)$-模的结构。注意到秩2的量子环面上的斜导子李代数包含了Virasoro-like及其q类似的特殊情形。在[LT2]中，作者给出了秩2的量子环面上的斜导子李代数具有有限维权空间的不可约表示。受到他们的工作的启发，这篇论文中我们集中研究量子环面上的斜导子李代数的一类具有无限维权空间的表示。

在第一章中，我们先回顾关于量子环面上的斜导子李代数L的一些事实。第二章中，我们引入一类无穷维sl_2-模以及函子F_g^α. 最后，在第三章中，我们研究$F_g^\alpha(V)$的结构，从而给出一类具有无限维权空间的L-模。

1 第一章 量子环面上的斜导子李代数

1.1 量子环面

首先我们记一些符号，取定复数域上一个有e_1, e_2为基元的向量空间 $\mathcal{U}$. 令$(\cdot,\cdot)$为$\mathcal{U}$上的一个标准双线性型，即$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = \delta_{i,j}$, $1 \le i, j \le 2$. 记 $\Gamma = \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 + \mathbb{Z}\mathbf{e_2}$, 我们用$\mathbf{m}, \mathbf{n}, \mathbf{r}$，$\mathbf{s}$来表示$\Gamma$中的元素。设$\mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \cdots, \mathbf{u_k}$为向量空间中的元素，我们用$\langle \mathbf{u_1}, \mathbf{u_2}, \cdots, \mathbf{u_k} \rangle$来表示它们在$\mathbb{C}$上的线性张成。

固定$q \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$. 秩为2的量子环面$\mathbb{C}_q$是指$\mathbb{C}$上具有生成元$x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}$的一个非交换结合代数，且生成元满足下列关系式：

$$x_2 x_1 = q x_1 x_2, x_k x_k^{-1} = x_k^{-1} x_k = 1, 1 \le k \le 2$$

对任意$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{e_1} + n_2 \mathbf{e_2} \in \Gamma$，我们记$x^{\mathbf{n}} = x_1^{n_1} x_2^{n_2}$. 定义$\sigma, f : \Gamma \times \Gamma \to \mathbb{C}^*$如下：

$$\sigma(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = q^{m_2 n_1}, f(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = q^{m_2 n_1 - m_1 n_2}$$

其中$\mathbf{m} = m_1 \mathbf{e_1} + m_2 \mathbf{e_2}, \mathbf{n} = n_1 \mathbf{e_1} + n_2 \mathbf{e_2} \in \Gamma$. 则我们有

$$x^{\mathbf{m}} x^{\mathbf{n}} = \sigma(\mathbf{m}, \mathbf{n}) x^{\mathbf{m}+\mathbf{n}}, x^{\mathbf{m}} x^{\mathbf{n}} = f(\mathbf{m}, \mathbf{n}) x^{\mathbf{n}} x^{\mathbf{m}}$$

定义

$$rad(f) = \{\mathbf{m} \in \Gamma | f(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = 1, \forall \mathbf{n} \in \Gamma\}$$

则$rad(f)$显然是Γ的一个子群。若q不是单位根，则$rad(f) = \{\mathbf{0}\}$; 若q是一个p次本原单位根，则

$$rad(f) = \{k_1 p \mathbf{e_1} + k_2 p \mathbf{e_2} | k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\} = p\Gamma$$

由于$\mathbb{C}_q$是Γ-分次的，我们有度导子d_1, d_2满足：

$$d_k(x^{\mathbf{n}}) = n_k x^{\mathbf{n}} (1 \le k \le 2), \forall \mathbf{n} = n_1 \mathbf{e_1} + n_2 \mathbf{e_2} \in \Gamma$$

$\mathbb{C}_q$的内导子满足：

$$ad x^{\mathbf{n}}(x^{\mathbf{m}}) = (\sigma(\mathbf{n}, \mathbf{m}) - \sigma(\mathbf{m}, \mathbf{n})) x^{\mathbf{n}+\mathbf{m}}$$

如果$\mathbf{n} \in rad(f)$，则$ad x^{\mathbf{n}} = 0$.

记$Der(\mathbb{C}_q)$为$\mathbb{C}_q$上的导子集合。对$\mathbf{n}\in\Gamma$, 我们记$Der(\mathbb{C}_q)_{\mathbf{n}}$为$\mathbb{C}_q$的$n$次齐次导子集合，则我们有以下结果[BG]:

引理1.1.1:

$$Der(\mathbb{C}_q)=\oplus_{\mathbf{n}\in\Gamma}Der(\mathbb{C}_q)_{\mathbf{n}}$$

其中

$$Der(\mathbb{C}_q)_{\mathbf{n}}=\begin{cases}\mathbb{C}adx^{n}, & \mathbf{n}\notin rad(f),\\ \oplus_{k=1}^{2}\mathbb{C}x^{\mathbf{n}}d_k, & \mathbf{n}\in rad(f).\end{cases}$$

$Der(\mathbb{C}_q)$是一个李代数且具有如下李结构：

(1) $\forall\mathbf{s},\mathbf{s}'\notin rad(f),[adx^{\mathbf{s}},adx^{\mathbf{s}'}]=\sigma(\mathbf{s},\mathbf{s}')(1-f(\mathbf{s},\mathbf{s}'))adx^{\mathbf{s}+\mathbf{s}'}$;

(2) $\forall\mathbf{s}\notin rad(f),\mathbf{r}\in rad(f),\mathbf{u}\in\mathcal{U},[adx^{\mathbf{s}},D(\mathbf{u},\mathbf{r})]=-(\mathbf{u},\mathbf{s})\sigma(\mathbf{r},\mathbf{s})adx^{\mathbf{r}+\mathbf{s}}$;

(3) $\forall\mathbf{r},\mathbf{r}'\in rad(f),\mathbf{u},\mathbf{u}'\in\mathcal{U},[D(\mathbf{u},\mathbf{r}),D(\mathbf{u}',\mathbf{r}')]=D(\mathbf{w},\mathbf{r}+\mathbf{r}')$,

其中$\mathbf{w}=\sigma(\mathbf{r},\mathbf{r}')((\mathbf{u},\mathbf{r}')\mathbf{u}'-(\mathbf{u}',\mathbf{r})\mathbf{u})$.

1.2 斜导子李代数L

定义1.2.1 对$\mathbf{r}\in rad(f),\mathbf{u}=u_1\mathbf{e_1}+u_2\mathbf{e_2}\in\mathcal{U}$, 我们记

$$D(\mathbf{u},\mathbf{r})=x^{\mathbf{r}}(u_1d_1+u_2d_2)$$

$$L=\langle D(\mathbf{u},\mathbf{r})|(\mathbf{u},\mathbf{r})=0,\mathbf{r}\in rad(f),\mathbf{u}\in\mathcal{U}\rangle\oplus\langle adx^{\mathbf{n}}|\mathbf{n}\in\Gamma\rangle$$

我们称L为量子环面上的斜导子的集合。

对$m\in\Gamma$, 我们记

$$D(\mathbf{m})=\begin{cases}x^{\mathbf{m}}(m_2d_1-m_1d_2), & 若\mathbf{m}\in rad(f),\\ adx^{\mathbf{m}}, & 若\mathbf{m}\in\Gamma\setminus rad(f).\end{cases}$$

则我们有下列结果：

引理1.2.2 L是$Der(\mathbb{C}_q)$的一个李子代数，具有下列基元：

$$\{D(\mathbf{m})|\mathbf{m}\in\Gamma\setminus\{\mathbf{0}\}\}\cup\{d_1,d_2\}$$

且基元满足如下李关系：

$$[D(\mathbf{m}), D(\mathbf{n})] = g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) D(\mathbf{m} + \mathbf{n}),$$

$$[d_k, D(\mathbf{m})] = -[D(\mathbf{m}), d_k] = m_k D(\mathbf{m}), 1 \le k \le 2$$

$$[d_1, d_2] = 0$$

其中$\mathbf{m} = m_1\mathbf{e_1} + m_2\mathbf{e_2}, \mathbf{n} = n_1\mathbf{e_1} + n_2\mathbf{e_2} \in \Gamma$, 且

$$g(\mathbf{m}, \mathbf{n}) = \begin{cases} q^{m_2n_1} - q^{m_1n_2}, & \text{若}\mathbf{m}, \mathbf{n} \notin rad(f), \\ m_2n_1 - m_1n_2, & \text{其它}. \end{cases}$$

注1.2.3 (1) 当$q = 1$ 时，L是Virasoro-like代数; 当q不是单位根时，L是Virasoro-like代数的q-类似[KPS]. 从而我们这里研究的秩为2的量子环面上的斜导子李代数实际上包含了Virasoro-like及其q-类似为特殊情形。
(2) Virasoro-like代数和Virasoro-like代数的q-类似上的Harish-Chandra模的分类在文[LT4]，[LT5]中已经被刻划。
(3) L的中心扩张，导子，自同构群在[CXL]，[LT3]中已经得到。

2 第二章 sl_2-模与函子F_g^α

2.1 一类无穷维sl_2-模

首先，我们引入一类无穷维sl_2-模。设x, y, h为李代数sl_2的Chevalley基，即：

$$[h, x] = 2x, [h, y] = -2y, [x, y] = h$$

对任意$\lambda \in \mathbb{C}$, 我们设$Z(\lambda)$为一个具有可数基$(v_0, v_1, v_2, \cdots)$的向量空间，则下列公式在$Z(\lambda)$上定义了一个sl_2-模结构(令$v_{-1} = 0$)：

(a) $hv_i = (\lambda - 2i)v_i$;

(b) $yv_i = (i + 1)v_{i+1}$;

(c) $xv_i = (\lambda - i + 1)v_{i-1} (i \ge 0)$.

注2.1.1 $Z(\lambda)$实际上是sl_2的以λ为最高权的Verma模。

下面我们看$Z(\lambda)$的一些性质：

引理2.1.2 当$\lambda+1$不是一个正整数时，$Z(\lambda)$是一个不可约的sl_2-模。

证明：由(c)易证得。 □

引理2.1.3 当$\lambda+1$是某个正整数时，sl_2-模$Z(\lambda)$有一个以v_i为极大向量的不可约子模$\mathcal{S}=\langle v_i, v_{i+1}, \cdots\rangle$. 此外，$Z(\lambda)/\mathcal{S}$是一个有限维的不可约$sl_2$-模。

证明：由(c)可得。 □

2.2 函子F_g^α

现在我们来引入一族以$\mathcal{U}$中的向量α和函数g为参数的从sl_2-模到L-模的函子F_g^α.

引理2.2.1 [LT2] 设函数$g:\Gamma\to\mathbb{C}^*$满足任意$\mathbf{n},\mathbf{m}\in\Gamma$, $\mathbf{s}\in rad(f)$有：

$$g(\mathbf{n})g(\mathbf{m})=g(\mathbf{n}+\mathbf{m}),\ g(\mathbf{s})=1$$

则我们有：

(1) 若$q\neq 0$不是一个单位根，则存在$a,b\in\mathbb{C}^*$使$g(\mathbf{n})=a^{n_1}b^{n_2}$.

(2) 若$q\neq 0$是一个p次单位根，则存在$\mu_1,\mu_2\in\mathbb{Z}$使$g(\mathbf{n})=q^{\mu_1 n_1+\mu_2 n_2}$.

证明：(1) 对$\forall n=n_1e_1+n_2e_2\in\Gamma$, 我们有$g(n)=g(n_1e_1+n_2e_2)=(g(e_1))^{n_1}(g(e_2))^{n_2}$, 令$a=g(e_1), b=g(e_2)$ 即得。

(2) 此时，$rad(f)=\{k_1pe_1+k_2pe_2|k_1,k_2\in\mathbb{Z}\}$, 记$g(e_1)=a, g(e_2)=b$，则由$g(pe_1)=a^p=1$可知$a$ 是p次单位根，从而存在$\lambda\in\mathbb{Z}$, 使得$a=q^\lambda$. 同理, 存在$\mu\in\mathbb{Z}$, 使$b=q^\mu$. 因此$g(n)=q^{\lambda n_1+\mu n_2}$. □

现在我们构造一个从sl_2-模到L-模的函子。

定义2.2.2 任给$\alpha\in\mathcal{U}$和一个满足对任意$\mathbf{n},\mathbf{m}\in\Gamma,\mathbf{s}\in rad(f)$, 有$g(\mathbf{n})g(\mathbf{m})=g(\mathbf{n}+\mathbf{m})$

且$g(\mathbf{s})=1$的函数$g:\Gamma\to\mathbb{C}^*$，定义一个映射

$$\begin{array}{rcl} F_g^\alpha : sl_2\text{-模} & \longrightarrow & L\text{-模}, \\ V & \longmapsto & F_g^\alpha(V)=V\otimes\mathbb{C}_q=\bigoplus_{\mathbf{n}\in\Gamma}V(\mathbf{n}), \end{array}$$

其中$V(\mathbf{n})=V\otimes x^{\mathbf{n}},\forall\mathbf{n}\in\Gamma$, 且$L$在$F_g^\alpha(V)$上的作用如下定义：

(1) $adx^{\mathbf{s}}v(\mathbf{n})=\sigma(\mathbf{s},\mathbf{n})(g(\mathbf{s})-f(\mathbf{n},\mathbf{s}))v(\mathbf{n}+\mathbf{s})$,

(2) $D(\mathbf{u},\mathbf{r})v(\mathbf{n})=(\mathbf{u},\mathbf{n}+\alpha)v(\mathbf{n}+\mathbf{r})+A(\mathbf{u},\mathbf{r})v(\mathbf{n}+\mathbf{r})$.

其中$\mathbf{s}\notin rad(f),\mathbf{r}\in rad(f),\mathbf{u}\in\mathcal{U},v(\mathbf{n}):=v\otimes x^{\mathbf{n}}\in V(\mathbf{n}),A(\mathbf{u},\mathbf{r})=r_1u_2x+r_2u_1y+r_1u_1h.$

易验证映射$F_g^\alpha(V)$的定义是合理的，即对任一sl_2-模，向量空间$F_g^\alpha(V)$在上述定义规定作用下确实是一个L-模。

注2.2.3 (1) 对任给的sl_2-模V_1, V_2和$h\in Hom_{sl_2}(V_1,V_2)$, 令$F_g^\alpha(h):F_g^\alpha(V_1)\to F_g^\alpha(V_2)$, $v_1(n)\mapsto h(v_1)(n),\forall v\in V_1,n\in\Gamma$, 则易知$F_g^\alpha$是从$sl_2$-模到$L$-模的一个函子。

(2) $F_g^\alpha(V)$是一个关于Cartan子代数$\{D(\mathbf{u},\mathbf{0})|\mathbf{u}\in\mathcal{U}\}$的权模，且权空间的维数等于$V$的维数，从而$F_g^\alpha(Z(\lambda))$是具有无穷维权空间的$L$-模。

(3) 设W为$F_g^\alpha(V)$的一个子模，则W也是一个权模，即我们有: $W=\bigoplus_{\mathbf{n}\in\Gamma}W(\mathbf{n})$, 其中$W(\mathbf{n})$为$W$的权空间。

3 第三章 $F_g^\alpha(V)$的结构

3.1 Γ上的等价关系

这节中，我们先回顾在[LT1]中定义的Γ上的等价关系，我们将利用这些等价关系来研究$F_g^\alpha(V)$的结构。对$n\in\Gamma$, 令

$$\Gamma_{\mathbf{n}}^1=\{\mathbf{s}\notin rad(f)|f(\mathbf{n},\mathbf{s})\neq g(\mathbf{s})\}$$

$$\Gamma_{\mathbf{n}}^2=\{\mathbf{s}\notin rad(f)|f(\mathbf{n},\mathbf{s})=g(\mathbf{s})\text{且对某个}\mathbf{r}\notin rad(f),f(\mathbf{n},\mathbf{r})\neq g(\mathbf{r}),f(\mathbf{n}+\mathbf{s},\mathbf{r})\neq g(\mathbf{r})\}$$

$$\Gamma_{\mathbf{n}}^3=\{\mathbf{s}\notin rad(f)|f(\mathbf{n},\mathbf{s})=g(\mathbf{s})\text{且对任意}\mathbf{r}\notin rad(f),\text{ 如果 }f(\mathbf{n},\mathbf{r})\neq g(\mathbf{r}),\text{则}f(\mathbf{n}+\mathbf{s},\mathbf{r})=g(\mathbf{r})\}$$

$$\Gamma_{\mathbf{n}}=\Gamma_{\mathbf{n}}^1\cup\Gamma_{\mathbf{n}}^2\cup rad(f)$$

定义3.1.1 对$\mathbf{n},\mathbf{m}\in\Gamma$, 定义

$$\mathbf{n}\sim\mathbf{m}\Leftrightarrow\mathbf{n}+\Gamma_{\mathbf{n}}=\mathbf{m}+\Gamma_{\mathbf{m}}.$$

“$\sim$”显然是Γ上一个等价关系。令$\Gamma^*=\Gamma/\sim$，并用$\bar{\mathbf{s}}$表示$\mathbf{s}\in\Gamma$所对应的等价类，则$\bar{\mathbf{s}}=\mathbf{s}+\Gamma_{\mathbf{s}}$，$\Gamma=\bigoplus_{\bar{\mathbf{s}}\in\Gamma^*}\bar{\mathbf{s}}$.

注3.1.2 由定义可知对所有$\mathbf{n}\in\Gamma$下列结果成立：

(1) $\Gamma_{\mathbf{n}}=\Gamma_{\mathbf{n}}^1\uplus\Gamma_{\mathbf{n}}^2\uplus rad(f)$, $\Gamma=\Gamma_{\mathbf{n}}\uplus\Gamma_{\mathbf{n}}^3$, $rad(f)+\Gamma_{\mathbf{n}}=\Gamma_{\mathbf{n}}, rad(f)+\Gamma_{\mathbf{n}}^3=\Gamma_{\mathbf{n}}^3$.

(2) $\mathbf{s}\in\Gamma_{\mathbf{n}}\Leftrightarrow\overline{\mathbf{n}}=\overline{\mathbf{n}+\mathbf{s}}$.

引理 3.1.3 对$F_g^\alpha(V)$的任意子模W 及$\mathbf{n}\in\Gamma, v\in V$, 我们有：

(1) 如果$v(\mathbf{n})\in W(\mathbf{n})$ 且$\mathbf{s}\in\Gamma_{\mathbf{n}}^1\cup\Gamma_{\mathbf{n}}^2$, 则$v(\mathbf{n}+\mathbf{s})\in W(\mathbf{n}+\mathbf{s})$.

(2) 对所有$\mathbf{m}\in\Gamma_{\mathbf{n}}$ 及$\mathbf{s}\notin rad(f)$, 如果$\mathbf{m}+\mathbf{s}\in\Gamma_{\mathbf{n}}^3$, 则$adx^{\mathbf{s}}v(\mathbf{n}+\mathbf{m})=0$.

证明：(1)我们根据s的不同情形分两种情况来证明。

(i) 若$\mathbf{s}\in\Gamma_n^1$, 即$f(\mathbf{n},\mathbf{s})\neq g(\mathbf{s})$, 则由

$$adx^s v(\mathbf{n})=\sigma(\mathbf{s},\mathbf{n})(g(\mathbf{s})-f(\mathbf{n},\mathbf{s}))v(\mathbf{n}+\mathbf{s})\in W(\mathbf{n}+\mathbf{s})$$

可得$v(\mathbf{n}+\mathbf{s})\in W(\mathbf{n}+\mathbf{s})$.

(ii) 若$\mathbf{s}\in\Gamma_{\mathbf{n}}^2$, 即$f(\mathbf{n},\mathbf{s})=g(\mathbf{s})$且对某个$\mathbf{m}\notin rad(f)$, 有$f(\mathbf{n},\mathbf{m})\neq g(\mathbf{m})$ 且$f(\mathbf{n}+\mathbf{s},\mathbf{m})\neq g(\mathbf{m})$. 从而$f(\mathbf{n},\mathbf{m}+\mathbf{s})\neq g(\mathbf{m}+\mathbf{s})$. 由(i)可得$v(\mathbf{n}+\mathbf{m}+\mathbf{s})\in W(\mathbf{n}+\mathbf{m}+\mathbf{s})$. 又因为$f(\mathbf{n}+\mathbf{m}+\mathbf{s},-\mathbf{m})=f(\mathbf{n}+\mathbf{s},-\mathbf{m})\neq g(-\mathbf{m})$, 再由(i)可得$v(\mathbf{n}+\mathbf{m}+\mathbf{s}-\mathbf{m})=v(\mathbf{n}+\mathbf{s})\in W(\mathbf{n}+\mathbf{s})$.

(2) 我们给出一个较[LT1]的引理2.6更为简洁的证明。由

$$adx^{\mathbf{s}}v(\mathbf{n}+\mathbf{m})=\sigma(\mathbf{s},\mathbf{n}+\mathbf{m})(g(\mathbf{s})-f(\mathbf{n}+\mathbf{m},\mathbf{s}))v(\mathbf{n}+\mathbf{m}+\mathbf{s})\in W(\mathbf{n}+\mathbf{m}+\mathbf{s})$$

可知我们只需证明对任意$\mathbf{m}\in\Gamma_{\mathbf{n}},\mathbf{s}\notin rad(f)$, 如果$\mathbf{m}+\mathbf{s}\in\Gamma_{\mathbf{n}}^3$, 则$f(\mathbf{n}+\mathbf{m},s)=g(\mathbf{s})$.

事实上，对$\mathbf{m}+\mathbf{s}\in\Gamma_{\mathbf{n}}^3$, 我们有

$$g(\mathbf{m}+\mathbf{s})=f(\mathbf{n},\mathbf{m}+\mathbf{s}) \tag{3.1.1}$$

且对任意$\mathbf{r}\notin rad(f)$, 如果$f(\mathbf{n},\mathbf{r})\neq g(\mathbf{r})$, 则

$$f(\mathbf{n}+\mathbf{m}+\mathbf{s},\mathbf{r})=g(\mathbf{r}) \tag{3.1.2}$$