学校编号：10384　　　　分类号：__________ 密级：__________

学　　号：200323039　　　　UDC：__________________________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

SV-ARMA(p, q) 带重尾和相关误差模型的 MCMC 算法

MCMC algorithm for SV-ARMA(p, q) with fat fails and correlated errors

邱　崇　洋

指导教师姓名：　刘继春　副教授

专 业 名 称：　概率论与数理统计

论文提交日期：　2 0 0 6　年　5　月

论文答辩日期：　2 0 0 6　年　　月

学位授予日期：　2 0 0 6　年　　月

答辩委员会主席：_________

评　阅　人：_________

2006 年　5　月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果．本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明．本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任．

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘要

由于金融计量经济学的兴起，各种新的关于时间序列的数学模型也被提出来解释当今经济金融中发生的问题与现象. 自从 Engle 在 1982 年开创性的提出了 ARCH 模型之后，1986 年，Bollerslev 将 ARCH 模型发展成更为流行的 GARCH 模型. 近二十年来， GARCH 模型已经被广泛地应用于研究经济、金融等领域的时间序列问题的分析中. 这是因为，金融数据等总呈现出波动聚类和重尾的特性，而 GARCH 模型能体现出这两种特性. 但 GACH 模型也存在着一些缺陷： 1. GARCH 模型对参数的条件限制比较强； 2. GARCH 模型的条件方差由以前的条件方差和波动率唯一确定不是很妥当的. 近几年来, 人们提出用随机波动模 (SV) 型来刻画金融时间序列. 因为 SV 模型也具有波动聚类和重尾的特性, 又在一定程度上克服了 GARCH 模型的缺陷. 然而, 在金融资产波动的建模中, 随机波动模型远没有 GARCH 模型普及. 其主要原因是 SV 模型的估计非常困难. Markov Chain Monte Carlo(MCMC) 算法是最近发展起来的一种简单且行之有效的 Bayes 计算方法. MCMC 算法使得 Bayes 统计中许多看起来困难的计算变得简单直观了. 2004 年， Jacquier 等用 MCMC 算法对带重尾和相关的随机波动 (SV) 模型 (AR(1) 型) 作了估计. 在本文中，我们自然地提出了 SV-ARMA(p,q) 带重尾和相关误差的模型：

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \\ \log h_t = \alpha + \delta_1 \log h_{t-1} + \cdots + \delta_p \log h_{t-p} + v_t + \theta_1 v_{t-1} + \cdots + \theta_q v_{t-q}, \\ \varepsilon_t \sim t(v), v_t \sim N(0,\sigma^2),\ \varepsilon_t\text{与}v_t\text{相关}, (\varepsilon_t, v_t)\ \ iid,\ \ t = 1, ..., T. \end{cases}$$

给出了它的 MCMC 算法. 进一步，对这一模型的算法，我们作了模拟和实证的检验，证明了对新模型给出的 MCMC 算法是可行的.

关键词: SV-ARMA(p,q) 模型， MCMC 算法，重尾，相关误差.

Abstract

As the Econometric literature is becoming more and more popular, many mathematic models were advanced to explain the phenomena appeared in eonomic and financial fields. Engle(1982) originally presented ARCH models and later Bollerlev(1986) expanded to the more popular GARCH models. From that time, GARCH models are offen applied in financial research, because GARCH models embody the characteristics of the fat tails and volatility clustering which are usually taken on in financial datas. However, GARCH models have the limitations, such as the strong request for the parameters and unsuitability for the conditional variance only decided by former conditional variance and volatility. Recently, pepole apply stochastic volatility models on financial time series, because stochastic volatility models not only embody the characteristics of the fat tails and volatility clustering but also overcome the limitations of GARCH models in a certain extent. However, stochastic volatility models are much less applied in financial fields for its difficulty in estimate. Markov Chain Monte Marlo(MCMC) is a simple and effective method in Bayes calculation, which can make many difficultly calculation ease. Jacquier(2004) completed estimate for stochastic volatility(SV) models(AR(1)) with fat tails and correlated errors by MCMC algorithm. Meanwhile, we naturally expanded SV-ARMA(p, q) with fat tails and correlated errors:

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \\ \log h_t = \alpha + \delta_1 \log h_{t-1} + \cdots + \delta_p \log h_{t-p} + v_t + \theta_1 v_{t-1} + \cdots + \theta_q v_{t-q}, \\ \varepsilon_t \sim t(v), v_t \sim N(0, \sigma^2),\ \varepsilon_t \text{ and } v_t \text{ are correlated}, (\varepsilon_t, v_t) \ \ iid, \quad t = 1, ..., T. \end{cases}$$

and presented its MCMC algorithm. Finally we maked simulation and demonstration for the new models by our MCMC algorithm, and proved its feasibility.

Key Words: SV-ARMA(p, q) models, MCMC algorithm, fat tails, correlated errors.

目录

Contents

第一章　背景

我们知道，经典统计的出发点是根据样本，在一定的统计模型下作出统计推断；而 Bayes 统计认为，在取得样本观测值 $X=(X_1,X_2,\ldots,X_n)^T$ 前，往往对参数统计模型中的参数 θ 有某些先验知识，其数学描述就是 θ 的先验分布，由 X 和先验分布提供的信息，组成完整的后验信息，这一后验分布是 Bayes 统计推断的基础.

Markov Chain Monte Carlo(MCMC) 方法就是最近发展起来的一种简单且行之有效的 Bayes 计算方法. MCMC 方法使得 Bayes 统计中许多看起来困难的计算变得简单直观了. MCMC 方法在统计物理中得到广泛的应用已有四十多年的历史了，但它在 Bayes 统计，显著性检验，极大似然估计等方面的应用则是近十几年的事情.

MCMC 方法的基本思想是通过建立一个平稳分布为 $\pi(x)$ 的 Markov 链来得到 $\pi(x)$ 的样本, 基于这些样本就可以作各种统计推断. 如假设 $\pi(x), x\in\mathfrak{X}$ 为后验分布, 我们要计算的后验量可以写成某函数 $f(x)$ 关于 $\pi(x)$ 的期望:

$$E_\pi f=\int_{\mathfrak{X}} f(x)\pi(x)dx$$

如果我们得到了 $\pi(x)$ 的样本 $X^1,\ldots,X^n$, 则 $E_\pi f$ 可估计为:

$$\hat{f}_n=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x^i).$$

这便是 Monte Carlo 积分，当 $X^1,\ldots,X^n$ 是平稳分布为 $\pi(x)$ 的 Markov 过程的样本时，有:

$$\hat{f}_n \xrightarrow{a.s.} E_n f,\ n\to\infty.$$

最简单, 应用最广泛的 MCMC 方法是 Gibbs 抽样, 它由 Geman s. 和 Geman D. 最初命名提出的. 它的想法很直观，设 $X=(X_1,\ldots,X_n)$ 的密度函数为 $\pi(x)$, 任意固定 T$\subset$N, 在给定 $X_{-T}=x_{-T}$, 条件下，其中 $x_T=\{x_i, i\in T\}, x_{-T}=\{x_i, i\notin T\}$, 定义随机变量 $X'=(X_1',\ldots,X_n'): X_{-T}'=X_{-T}$, 而 X_T' 具有密度函数 $\pi(x_T'|x_T)$, 则对

任一可测集 B, 都有：

$$p(X' \in B) = \int_B \pi(x'_{-T})\pi(x'_T|x'_{-T})dx' = \int_B \pi(x')dx' = \pi(B).$$

因而 x' 的密度函数也是 $\pi(x)$.

上述过程定义了一个由 X 到 X' 的转移核，其相应的平稳分布是 π. 这样构造的 MCMC 方法称为 Gibbs 抽样. 当 T 只含一个元素时称为单元素 Gibbs 抽样. 单元素 Gibbs 抽样是在给定 $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ 时, 由 x_i 关于 $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ 条件下的抽样，因为它只涉及单变量抽样，这使之最具吸引力.

在给出起始点 $x^0 = (x_1^0, \ldots, x_n^0)$ 后，假定第 t 次迭代开始时的估计值为 x^{t-1}. 则第 t 次迭代分为如下 n 步：

①. 由条件分布 $\pi(x_1|x_2^{t-1}, \ldots, x_n^{t-1})$ 抽取 x_1^t.

......

②. 由条件分布 $\pi(x_i|x_1^t, \ldots, x_{i-1}^t, x_{i+1}^{t-1}, \ldots, x_n^{t-1})$ 抽取 x_i^t.

......

③. 由条件分布 $\pi(x_n|x_1^t, \ldots, x_{n-1}^t)$ 抽取 x_n^t.

设 $x^t = (x_1^t, \ldots, x_n^t)$, 则 $x^1, x^2, \ldots, x^t, \ldots$ 是 Markov 链的实现值， $\pi(x)$ 为其平稳分布.

要使 Gibbs 抽样能够应用到实际问题中去，我们还必须知道什么时候抽样可以停止 (即收敛). 这里一个重要而困难的问题，几乎没有简单而行之有效的方法. 在实用中，通常用两种方法来进行判断.

方法一是用 Gibbs 抽样同时产生多个 Markov 链，在经过一段时间后，如果这几条链稳定下来，则 Gibbs 抽样收敛了.

方法二是看遍历均值是否已经收敛了，比如我们在由 Gibbs 抽样得到的链中每隔一段距离计算一次参数的遍历均值，当这种均值稳定后，可认为 Gibbs 抽样收敛了.

Metropolis-Hastings 方法比 Gibbs 抽样出现更早，更一般化的 MCMC 方法.

Metropolis 等人在 1953 年提出了一种构造转移核的方法， Hastings 随后对之加以推广，形成了 Metropolis-Hastings 方法，其思路如下：

任意选择一个不可约转移概率 $q(\cdot,\cdot)$, 以及一个函数 $\alpha(\cdot,\cdot), 0<\alpha(\cdot,\cdot)\le 1$, 对任一组合 $(x,x')(x\neq x')$, 定义

$$p(x,x')=q(x,x')\alpha(x,x'),\ \ x\neq x',$$

则 $p(x,x')$ 形成一个转移核.

此方法比较直观，如果链在时刻 t 处于状态 x, 即 $X^t=x$, 则首先由 $q(\cdot|x)$ 产生一个潜在的转移 $x\rightarrow x'$, 然后根据概率 $\alpha(x,x')$, 决定它是否转移，也就是说，在潜在转移点 x' 找到后，以概率 $\alpha(x,x')$ 接受 x' 作为链的下一时刻的状态值，而以概率 $1-\alpha(x,x')$ 拒绝转移到 x', 从而链在下一时刻仍处于状态 x. 一般，分布 $q(\cdot|x)$ 称为建议分布，因为我们的目标是使后验分布 $\pi(x)$ 成为平稳分布. 因此，在有了 $q(\cdot,\cdot)$ 后，应选择一个 $\alpha(\cdot,\cdot)$, 使相应的 $p(x,x')$ 以 $\pi(x)$ 为其平稳分布，一个常见的选择是

$$\alpha(x,x')=\min\left\{1,\frac{\pi(x')q(x',x)}{\pi(x)q(x,x')}\right\}.$$

此时， $p(x,x')$ 为

$$p(x,x')=\begin{cases} q(x,x'), & \pi(x')q(x',x)\ge\pi(x)q(x,x'),\\ q(x',x)\dfrac{\pi(x')}{\pi(x)}, & \pi(x')q(x',x)<\pi(x)q(x,x').\end{cases}$$

为了行文的连贯，在此引入说明由 $p(x,x')$ 产生的 Markov 链是可逆的，且 $\pi(x)$ 是其平稳分布的定理与证明.

定理 1([16]) 由上述 $p(x,x')$ 产生的 Markov 是可逆的，即

$$\pi(x)p(x,x')=\pi(x')p(x',x). \tag{1}$$

且 $\pi(x)$ 是由 $p(x,x')$ 确定的 Markov 链的平稳分布.

证明：若 $x=x'$, 则 (1) 显然成立. 设 $x\neq x'$, 则

$$\begin{aligned}\pi(x)p(x,x') &= \pi(x)q(x,x')\min\left\{1,\frac{\pi(x')q(x',x)}{\pi(x)q(x',x)}\right\}\\ &= \min\{\pi(x)q(x,x'),\pi(x')q(x',x)\}\\ &= \pi(x')q(x',x)\min\left\{\frac{\pi(x)q(x',x)}{\pi(x)q(x,x')},1\right\}\\ &= \pi(x')p(x',x).\end{aligned}$$

故 (1) 成立. 又

$$\begin{aligned}\int\pi(x)p(x,x')dx &= \int\pi(x')p(x',x)dx\\ &= \pi(x')\int p(x',x)dx\\ &= \pi(x').\end{aligned}$$

证毕.

由定理 1 可以看出，分布 $q(x,x')$ 可以取各种形式.

①. Metropolis 选择

Metropolis 考虑对称的建议分布，即

$$q(x,x')=q(x',x),\ \forall x,x',$$

此时 $\alpha(x,x')$ 简化为

$$\alpha(x,x')=\min\left\{1,\frac{\pi(x')}{\pi(x)}\right\}.$$

②. 独立抽样

如果 $q(x,x')$ 与当前状态 x 无关，即 $q(x,x')=q(x')$, 则由此建议分布导出的 Metropolis-Hastings 算法称为独立抽样，此外， $\pi(x,x')$ 变为

$$\alpha(x,x')=\min\left\{1,\frac{\pi(x')q(x)}{\pi(x)q(x')}\right\}.$$

要使得独立抽样有好的效果，$q(x)$ 应接近 $\pi(x)$, 比较安全的方法是使 $q(x)$ 的尾比 $\pi(x)$ 重.

③. 单元素 Metropolis-Hastings 算法

同时产生整个 X 有时是困难的，而将 X 根据其分量进行逐个抽样则简单得多，这就要用到条件分布．考虑 $X_i|X_{-i}, i = 1, \cdots, n$ 的条件分布，选择一个转移核 $q(x_i \to x_i'|x_{-i})$, 固定 $X'_{-i} = X_{-i} = x_{-i}$, 由 $q_i(x_i \to x_i'|x_{-i})$ 产生一个可能的 x_i', 然后以概率

$$\alpha(x_i \to x_i'|x_{-i}) = \min\left\{1, \frac{\pi(x')q_i(x_i' \to x_i|x_{-i})}{\pi(x)q_i(x_i \to x_i'|x_{-i})}\right\},$$

决定是否接受 x' 作为链的下一状态.

Gibbs 抽样是一种单元素 Metropolis-Hastings 算法, 它是取 $q(x' \to x)$ 为 $\pi(x_i|x_{-i})$, 此时 $\alpha(x' \to x) = 1$. 在 Gibbs 抽样中， $\pi(x_i|x_{-i})$ 可能难于抽取，而 Metropolis-Hastings 方法具有更大的灵活性, 它可取 $q(\cdot, \cdot)$ 为易抽取的分布, 有些文献也采用 Gibbs 抽样和 Metropolis 方法结合的办法.

第二章 模型

§ 2.1 GARCH 模型

金融时间序列数据表现出的丰富的波动特性，一直是近 20 年金融计量经济学研究的一个重点，其主要特性可归结为以下几个方面： 1. 分布重尾性 (fat tail): 金融资产价格或受益序列不服从正态分布，其分布的峰度远远大于正态分布. 2. 波动聚类性 (volatility clustering): 金融时间序列的方差随时间变化，并表现一定的相关性：一个大的波动随时间往往紧接着比较大的波动. 这说明波动幅度随时间变化，随机扰动对序列产生的影响会影响持续较长的时间. 这些特点使金融时序数列明显区别于其它时序数据. 建立在独立同正态分布基础上的 ARMA 时序模型和建立在平稳过程假设基础上的回归模型，均不能很好的捕着和刻画这些特性. Engle(1982)[1] 提出的 ARCH 模型，1986 年 Bollerslev[2] 提出的广义 ARCH 模型 (GARCH) 以及此后产生的系列相关模型考虑了金融资产价格方差的时变性，较好地反映了金融时间数据的特点，成为计量金融学地主要建模工具. 随着研究地深入， GARCH 系列模型暴露出一些缺陷：模型参数限制条件太强，对数据峰度刻画不够等. 为简单计，以 GARCH(1,1) 模型说明这一点. 将 GARCH 过程 y_t 写为如下形式

$$\begin{cases} y_t = \sqrt{h_t}\varepsilon_t, \\ h_t = w + \alpha y_{t-1}^2 + \beta h_{t-1}, \\ \varepsilon_t \sim N(0,1),\ \varepsilon_t, h_t\text{相互独立},\ \varepsilon_t\ iid\ t = 1, \dots, T, \\ \alpha \geq 0,\ \beta \geq 0. \end{cases} \tag{2}$$

GARCH(1,1) 过程具有以下性质 [2][18]:

①. y_t 是一个鞅差序列 (martingale difference);

②. 如果 $\alpha + \beta < 1$. 则 y_t 为协方差平稳过程;

③. 如果参数 α, β 满足条件 $2\alpha^2 + (\alpha + \beta)^2 < 1$, 则 y_t 四阶矩存在，当 ε_t 服从

$N(0,1)$ 时， y_t 分布的峰度为

$$k_y = \frac{3(1-\alpha^2-\beta^2)}{1-2\alpha\beta-[2\alpha^2+(\alpha+\beta)^2]} > 3 \quad .$$

从以上性质可以看出， GARCH 模型反映出了金融时间序列的两个特性：波动聚类和重尾性. (1) 式表明 t 时刻的条件方差 h_t 是 t-1 时刻的条件方差 h_{t-1} 和过程值 y_{t-1}^2 的线性函数，大的 h_{t-1} 和 y_{t-1} 对应的 h_t 也大，由此反映出过程波动的聚类性. 其次从性质③知道，在参数 α, β 满足一定条件时， y_t 四阶矩存在，峰度大于 3, 从而能够体现时间序列数据分布的重尾的特性.

但 GARCH 模型也存在一定的缺陷. 主要表现在：

①. GARCH 模型将时刻 t 的条件方差 h_t 表示成 t-1 时刻的条件方差 h_{t-1} 和过程值 y_{t-1}^2 的线性函数, 认为 h_t 由 h_{t-1} 和 y_{t-1}^2 唯一确定是不妥当的. $h_{t-1} = E(y_t^2|\mathcal{F}_{t-1})$ 是 y_t^2 在 $\mathcal{F}_{t-1}$ 下的条件期望，$\mathcal{F}_{t-1}$ 中包含的信息是不能简单地由 h_{t-1} 和 y_t^2 表达的，将 h_t 表示成 h_{t-1} 和 y_{t-1}^2 的线性函数只是为处理问题方便，不能充分利用过程提供的全部信息，从而降低了模型的效率.

②. 为保证 GARCH 模型有意义和有良好的性质，模型中的参数必须满足一定的条件，这无疑增加了参数估计的难度.

③. 尽管 GARCH 模型描述的过程 y_t 在一定条件下分布的峰度大于正态分布的峰度 3, 从而一定程度上反映了数据的重尾性，但其峰度的大小依赖于参数 α, β 的值. 当 α 接近 0 时， y_t 的峰度接近正态分布的峰度 3, 而金融数据的峰度往往要大许多, GACRCH 模型不能够给予充分地揭示.

§ 2.2 SV 模型

近几年来, 人们提出用随机波动模型来刻画金融资产受益特性 [3][4][5]. 研究证明, SV 模型在一定程度上克服了 ARCH 模型的缺陷，是描述时变波动的一种有效模型.

从理论角度看，随机波动模型 (stochastic volatility model, 简称： SV 模型) 最早是由 Clark(1973)[6] 在引进混合分布来刻画证券受益和交易量的联合分布特征时引入

的. 1987 年, Hull 和 White[4] 引入了连续的 SV 模型, 他们采用几何布朗运动将 Black-Scholes 公式推广到时变波动的情形. 设 $P(t),(t=1,2,\cdots,T)$ 为资产价格时间序列, 在一系列市场条件下, $P(t)$ 满足随机微分方程

$$\begin{cases} dP(t)=rP(t)dt+\sigma(t)P(t)dB_p, \\ d\sigma^2(t)=\theta\sigma^2(t)dt+\xi\sigma^2(t)dB_\sigma. \end{cases} \tag{3}$$

其中 B_p, B_σ 为标准布朗运动, 第二格方程表示资产价格 (或受益) 的波动 $\sigma(t)$ 随时间按几何布朗运动变化, 是一个随机过程, 而在传统的 Black-Scholes 公式中, 资产价格的波动设定为常数 σ. 为和传统 Black-Schles 公式区别, (3) 的解被称为连续 SV 模型. 当 B_p, B_σ 独立时, 股票价格和波动独立. Hull 和 White 指出, Black-Scholes 公式高估了处于评价或接近评价的期权价格, 低估了处于深度实值状态或深度虚值状态的期权价格. Melino 和 Turbull(1990)[5] 在汇率扩散模型中采用随机来定价外币期权, 发现 SV 模型较好地拟合了实际数据.

对资本市场价格和受益的研究, 往往以等间隔的日数据作为实证研究样本, 因此, 实证研究中大量采用的是离散形式的随机波动模型. 对 (3) 进行离散化, 取时间间隔 $\Delta_t=1$, 经过变换后, 有离散形式的 SV 模型

$$\begin{cases} y_t=\sqrt{h_t}\varepsilon_t, \\ \log h_t=\alpha+\delta\log h_{t-1}+v_t, \\ \varepsilon_t\sim N(0,1),\ v_t\sim N(0,\sigma^2),\ (\varepsilon_t,v_t)\ iid,\ \varepsilon_t\text{与}v_t\text{独立},\ t=1,2,....,T. \end{cases} \tag{4}$$

其中 $y_t=\log(P(t)/P(t-1))-\mu$ 为 0 均值处理后的对数收益率序列, μ 为对数收益率的均值, $\log(h_t)$ 遵从 AR(1) 过程. 从随机波动模型的定义知道, ε_t 方差为 1, 用于刻画 y_t 一阶矩的随机特性, h_t 描述 y_t 方差的大小和演变的模型, 其中参数 δ 给出了波动 h_t 前后影响的方式和程度.

如果进一步假设 $\log(h_t)\sim N(0,\sigma_h^2)$, 即 h_t 服从对数正态分布, 根据对数正态分布

的性质及 AR(1) 过程性质得出一下结果

$$E(h_t^r) = E(e^{r\log(h_t)}) = \exp(\tfrac{r^2\sigma_h^2}{2}),$$

$$E(y_t^r) = E(\varepsilon_t^r)\exp(\tfrac{r^2\sigma_h^2}{8}),$$

其中 r 为正整数. 由此求出 y_t 的任意阶矩和任意阶的协方差函数 (如果存在), 并可得到 y_t 的峰度 k_y 计算公式

$$k_y = \frac{E(y_t^4)}{(E(y_t^2))^2} = k_\varepsilon \exp(\sigma_h^2) = 3\exp\left(\frac{\sigma^2}{(1-\delta^2)}\right) > 3\,. \tag{5}$$

k_ε 表示 ε(即正态分布) 的峰度. 显然, 随机波动模型给出的 y_t 的峰度大于正态分布的峰度. 在无条件方差和条件方差放在一起进行比较

$$\begin{cases} \mathrm{var}(y_t) = \exp(\sigma_h^2/2), \\ \mathrm{var}(y_t|\mathcal{F}_{t-1}) = \exp(\alpha + \delta h_{t-1} + v_t). \end{cases}$$

显然, y_t 的无条件方差为常数, 为协方差平稳过程, 条件方差与 $t-1$ 时刻的方差有关, 反映了 y_t 的波动聚类特征. 和 GARCH 模型相比, SV 模型的优点体现在:

①. 在 GARCH 模型中, 条件方差 h_t 是由前期方差 h_{t-1} 和过程值 y_t^2 唯一确定, 而 SV 模型中的条件方差 h_t 是一个随机过程, 有着自己的演化方式. Jaquier 等对纽约股票交易所股票的不同投资组合分别进行 GARCH 模型和 SV 模型模拟, 计算了收益平方的自相关函数. 结果显示两模型的自相关函数不同, SV 模型更加接近实际数据.

②. SV 模型可以有很大的峰度值. 从 (5) 式可以看出, 即使 δ 接近于 0 时, y_t 的峰度仍然大于正态分布的峰度 3, 当 δ 的值在 [-1,1] 范围内变化时, 其峰度值可以任意大.

③. y_t 波动在不同时刻的影响模式可以是同方向也可以是反方向, 这可以通过模型参数 δ 的正负来反映. 而 GARCH 模型难以反映这一点.

简明的特点和很好的性质使 SV 模型与 GARCH 模型相比表现出很多优势, 但在金融资产波动的建模中 SV 模型远没有 GARCH 模型普及, 其主要原因是 SV 模型的