学校编码：**10384** 分类号______密级______

学号：**19020090153604** **UDC**______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

基于S-λ概率分布的曲线曲面造型方法

Curves and surfaces modeling based on S-λ probability distributions

范 飞 龙

指导教师姓名： 曾 晓 明 教授

专 业 名 称： 计 算 数 学

论文提交日期： 2012 年 6 月

论文答辩时间： 2012 年 8 月

学位授予日期： 2012 年 月

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2012 年 **6** 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。 本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果， 获得（　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

在自由型曲线曲面造型中，造型基函数的性质往往决定着最终的曲线和曲面的性质，因而寻找和选取合适的造型基函数便成为 计算机辅助几何设计研究的重要内容，是国际前沿研究的课题。常见的造型基函数包括Bézier基函数、B样条基函数、负 Bernstein基函数（由Goldman提出）、Poisson基函数（由Goldman和Morin提出）等。这些基函数都与离散概率分布密切相关， 例如Bézier基函数取自二项分布；B样条基函数与一个随机过程密切相关；负Bernstein基函数与负二项分布对应； 而Poisson基函数则对应Poisson分布。另一方面，这些离散概率分布在算子逼近论中也扮演着逼近算子的角色。 结合离散概率分布的概率质量函数和常见的逼近算子，我们提出了一类离散型概率造型基函数，称为S-λ基函数， 并在此基础上构造自由型曲线曲面。

基于S-λ概率分布的概率质量函数，我们引入生成函数和变换因子两个概念，并且基于生成函数、变换因子以及卷积技术构造S-λ基函数和S-λ曲线曲面。 S-λ基函数包括了常见的Bézier基函数、负Bernstein基函数、Poisson基函数等，因而我们可以通过对 S-λ基函数来统一研究以上常见基函数，同时通过S-λ曲线曲面来统一研究以上基函数对应的曲线曲面。本文围绕S-λ基函数以及 生成函数、变换因子和卷积技术开展了系统和深入的研究，主要取得了以下的创新成果：

1. 基于S-λ分布，通过生成函数、变换因子以及卷积技术将CAGD中常用的Bézier曲线曲面、Poisson曲线曲面、有理Bézier曲线曲面（负Bernstein） 等技术统一到一个框架。从而使得我们可以对这些基函数和对应的曲线曲面进行统一的研究。通过S-λ基函数、张量积S-λ基函数、三角S-λ基函数 分别构造了对应的S-λ曲线、张量积S-λ曲面、三角S-λ曲面。通过改变S-λ基函数的生成函数和变换因子，我们可以构造出更多的可用于造型的基函数。 国际著名期刊Computer Aided Design的审稿人评价S-λ基函数和曲线这部分的工作时提到：

   > *“The ideas and insights are highly original and provide a clever contribution to the theory of CAGD. ”*

2. 得到S-λ基函数以及对应曲线曲面的一些重要的几何性质，这些性质在曲线曲面造型中具有重要的作用。 一元S-λ基函数具有非负性，单位分解，边界插值，单峰性，线性无关性，升阶，递推和卷积性质等。 而张量积和三角S-λ基函数则具有非负性，单位分解性，插值性，线性无关性，升阶，单峰性，递推性等。 从而所有由S-λ基函数构造的曲线都具有下面的性质：

(a) 仿射不变性
(b) 凸包性质
(c) 插值于第一个控制顶点
(d) 局部性
(e) 非退化性
(f) 变差缩减性

而所有的S-λ曲面都具有下面的性质：

(a) 仿射不变性
(b) 凸包性质
(c) 插值性
(d) 非退化性
(e) 边界曲线是一元S-λ曲线

我们也研究了区域$(-\infty,0]\times[0,\infty)$上的一个具体的张量积$S$-$\lambda$基函数，也就是混合张量积负Bernstein-Poisson基函数， 以及对应的曲面，得到了更多具体的性质，包括伸缩、裁剪等重要性质。

3. 提出了一种新的形状参数调整技术。通过对生成函数系数进行调整来达到对曲线曲面进行形状调整，而这种技术与Bézier曲线曲面 通过调整控制顶点、与B样条曲线通过调整节点向量是不同的。
4. 得到了S-λ基函数的升阶、降阶公式，统一了几种不同曲线的升阶、降阶公式。 特别是用卷积公式这一简洁的方式把原先几种不同曲线曲面如Bézier曲线曲面、Poisson曲线曲面、有理Bernstein曲线曲面等的升阶公式统一起来。通过升阶和降阶公式，我们将Bézier基函数的向上向下递推算法推广到S-λ系列的基函数的向上向下递推算法。 包括一元S-λ基函数向上向下递推，张量积S-λ基函数的德卡斯特罗向上向下递推以及金字塔递推，三角S-λ基函数 德卡斯特罗四面体递推结构等。对应的，将Bézier曲线曲面的德卡斯特罗和金字塔几何作图算法 推广到S-λ曲线曲面上。我们同时也得到了德卡斯特罗算法、金字塔算法的各种结构示意图， 这使得我们可以更清晰地分析基函数和曲线曲面的递推结构，以及基函数对曲线曲面递推的影响等。
5. 将B样条的de Boor-Cox递推式推广到渐进S-λ递推式，得到了渐进S-λ基函数，并研究了其非负性、紧支性、单位分解以及线性无关性等。 我们构造了节点向量上的渐进S-λ基函数及其曲线，它将B样条基函数作为特例包含进去。 渐进S-λ曲线具有仿射不变、局部调整、凸包以及非退化性质等。
6. 提出了S-λ曲线的S-λ开花，尝试对原先几种不同曲线的开花进行统一处理，

得到初步的结果。 基函数的对偶函数用于求S-λ空间中的函数在S-λ基函数系上展开的系数。我们在分析了幂基、拉格朗日基、牛顿基等插值基函数的对偶泛函、 以及Bézier基函数、负Bézier基函数和Poisson等逼近基函数的开花（对偶泛函）的基础上， 通过对生成函数进行开花的方法，以公理化形式提出了S-λ基函数的一种开花定义，它具有对称、边界对称、递推以及对角性质。最后我们也证明了S-λ曲线的S-λ开花是存在和唯一的。

关键词： S-λ基函数；生成函数；变换因子；卷积；离散概率分布；曲线；曲面；对偶函数；

Abstract

Many methods used in Computer Aided Geometric Design (CAGD) are closely associated with probability distributions, particularly the discrete distributions. For example, the Bernstein basis functions used in Bézier curves are taken from the binomial distribution, the B-spline basis functions used in B-spline curves are connected with some stochastic process. The Poisson basis functions which are advanced by Goldman and Morin are developed from the Poisson distribution, and the Bernstein basis functions of negative degree which were analyzed by Goldman are taken from the negative binomial distribution. On the other hand, it is well known that the above basis functions and some other basis functions generated from the discrete distributions play very important roles in Approximation Theory, which are used to construct various approximation processes in Approximation Theory. Motivating by these ideas that come from CAGD and Approximation Theory we write the present thesis. In this thesis we introduce a broad class of discrete distributions which are called S-λ distributions. The S-λ distributions have some applications in Approximation Theory.

The object of this thesis is to study a new method of curves and surfaces modeling based on the S-λ distributions. The curves and surfaces generated by means of the S-λ distributions are called S-λ curves and surfaces. The S-λ basis functions are constructed by their generation functions and transform factor functions. We will show that S-λ curves include Bézier curves, Poisson curves, rational Bézier curves and a lot of other curves. Therefore, the researches of this thesis provide a unified scheme for dealing with these curves and surfaces, and reveal the relations among these curves and surfaces. The contributions of our work are summarized as follows:

1. S-λ basis functions, tensor product S-λ basis functions and triangular S-λ basis functions are constructed by means of the technique of generating functions and transformation factors. These basis functions generate S-λ curves and surfaces. We show that S-λ curves include Bézier curves, Poisson curves, rational Bézier curves and a lot of other curves. Therefore, the research in this thesis provides a unified scheme

for dealing with these well-known curves and surfaces. A reviewer of the international journal *Computer-Aided Design* has the following comment for the S-λ bases and curves work:

> *"The ideas and insights are highly original and provide a clever contribution to the theory of CAGD."*

2. We obtain a lot of geometric properties of the S-λ curves and surfaces, which are important in CAGD. The S-λ basis functions have non-negative, partition of unity, interpolation, differentiation, unimodality, linear independence, Descartes's law of signs, degree elevation, degree reduction and convolution properties. The tensor product and triangular S-λ basis functions have non-negative, partition of unity, interpolation, linear independence, unimodality, degree elevation and degree reduction properties. All the curves generated by the S-λ basis functions are shown to have the following properties:

   (a) Affine invariance
   (b) Convex hull
   (c) Interpolation of initial control point
   (d) Locality
   (e) Non-degeneracy
   (f) Variation diminishing

   The tensor product and triangular surfaces are shown to have the following properties:

   (a) Affine invariance
   (b) Convex hull
   (c) Interpolation of initial control point
   (d) Locality
   (e) Non-degeneracy
   (f) Boundary S-λ curves

   We also research a concrete tensor product S-λ basis functions and the corresponding surfaces, which is the mixed tensor product negative Bernstein-Poisson basis functions and surfaces, and we obtain more concrete properties such as rescaling and trimming properties.

3. By means of the technique of generating functions, a new convenient and practical method for local changes of S-λ curves and surfaces is proposed.
4. The degree elevation and degree reduction properties of the S-λ basis functions give a unified formula of many different curves mentioned above. The de Casteljau down and up recurrence of Bézier basis functions is extended to the S-λ basis functions. And the de Casteljau algorithm of Bézier curves and surfaces is extended to the S-λ curves and surfaces. The corresponding schematic diagrams are shown, which are useful for the analysis of S-λ curves and surfaces.
5. The de Boor-Cox recurrence of B-spline basis functions is extended to the progressive S-λ basis functions. The progressive S-λ basis functions have non-negative, compact support, partition of unity, and linear independence properties. The progressive S-λ curves are constructed, which have affine invariance, locality, convex hull and non-degeneracy properties.
6. We propose a blossom for S-λ curves, and provide a unified blossom for these well-known curves. Dual functionals are maps that compute the coefficients of functions in S-λ space with respect to a fixed S-λ basis function. We recall the dual functions of the monomial basis functions, Lagrange interpolation basis functions and Newton interpolation basis functions, and recall the multiaffine blossom of the Bézier curves, the multirational blossom of the negative Bernstein curves. Then, we propose the blossom for S-λ curves, which is called S-λ blossom. We prove that the S-λ blossom of an S-λ curve is exists and is unique.

Key Words: S-λ basis functions;generation functions; transformation functions; convolution; discrete distributions; curves; surfaces; dual functions;

目　录