学校编号：10384　　　　分类号：＿＿＿＿ 密级：＿＿＿＿
学　　号：200323009　　　　UDC：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

具非线性源的多孔介质方程解的 Blow-up 时间对初值的相依性

The Dependence Of The Blow-up Time With Respect To The Initial Data In Porous Media Equation With Nonlinear Source

梁　之　磊

指导教师姓名：　赵俊宁　教授

专 业 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2006 年 5 月

论文答辩日期：　2006 年　月

学位授予日期：　2006 年　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿

评　　阅　　人：＿＿＿＿

2006 年　5　月

学　位　论　文

具非线性源的多孔介质方程解的 Blow-up 时间对初值的相依性

梁　之　磊

厦　门　大　学

二 0 0 六 年 五 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）.

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目录

Contents

摘　要

本文对如下形式的多孔介质方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u_t = \triangle u^m + u^p, & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

讨论在解的 Blow-up 时间 T 有限的情况下，当初值出现一个小的扰动函数 $h(x)$ 时, 方程的 Blow-up 时间 T_h 随之发生的变化情况, 证明了 Blow-up 时间 $|T-T_h|$ 和 $\| h \|_{L^1(\Omega)}$ 之间连续相依性的结果，其中 $1 < m < p$,　$Q_T = \Omega \times (0,T), 0 \leq u_0(x) \in L^\infty(\Omega), h(x) \in L^\infty(\Omega)$,$\Omega \subset R^N$ 是一有界区域。

关键词：多孔介质方程；强非线性源；　Blow-up 时间

Abstract

This paper is devoted to the Dirichilet problem of the following porous media equation

$$\begin{cases} u_t = \triangle u^m + u^p, & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega, \end{cases}$$

let T be the Blow-up time of the solution,we will investigate the relation between T and the Blow-up time T_h of the solution when a perturbed function $h(x)$ was added to the initial value $u_0(x)$, we find the fact that $|T - T_h|$and $\| h \|_{L^1(\Omega)}$has a continuous dependence on each other,where $1 < m < p$, $Q_T = \Omega \times (0,T), 0 \leq u_0(x) \in L^\infty(\Omega), h(x) \in L^\infty(\Omega)$,$\Omega$ is a bounded domain in R^N.

Key words: Porous media equation ;Blow-up time ; Strong nonlinear source.

第一节 引言

本文考虑具强非线性源的多孔介质方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases} u_t = \triangle u^m + u^p, & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1}$$

它是许多物理现象的数学模型 (参见文献 [1]) ，例如:

假设有一种不可压流体在均匀、各项同性的刚体多孔介质中流动, 由质量守恒律

$$\theta_t + div\bar{\nu} = 0$$

其中 $\bar{\nu}$ 表示渗流速度， θ 表示介质孔隙率， Darcy 定律给出

$$\bar{\nu} = -k(\theta) \cdot \bigtriangledown\phi$$

其中 $k(\theta)$ 为液导系数， ϕ 为总位势,

如果我们忽略掉各种吸附作用、化学作用、渗透效应和热效应，则 ϕ 可表示为

$$\phi = \Psi + z$$

其中右端第一项 Ψ 表示静力学位势，第二项 z 是重力位势；这里取坐标 (x,y,z) 使得 z 轴垂直向上，由上面三式，得

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} = div(k(\theta)\nabla\Psi) + \frac{\partial k(\theta)}{\partial z}$$

变量 θ 与 Ψ 之间的关系可根据经验确定; 对许多介质，Ψ 是 θ 的函数, 且 $k(\theta)\frac{d\Psi}{d\theta}$ 与 $k(\theta)$ 有一种合理的选择:

$$k(\theta)\frac{d\Psi}{d\theta} = D_0\theta^{m-1}, k(\theta) = k_0\theta^n$$

其中 D_0, k_0, m, n 均为正常数，且 $1 < m \le n$ ，此时，适当改换变量后可得到

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \triangle \theta^m + \frac{\partial \theta^n}{\partial z}$$

当考虑的问题是流体在水平柱中的运动，则上式可简化为

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \triangle \theta^m$$

更多的实际问题，例如在生物群体的动力学中，群体的空间扩散模型是

$$\rho_t = \triangle A(\rho) + \sigma(\rho)$$

其中 ρ 表示生物分布的密度，$\sigma(\rho)$ 表示生物的增长率，扩散系数 $A'(\rho)$ 当 $\rho > 0$ 时为正，而当 $\rho = 0$ 时 $A'(\rho) = 0$ 。

本文所考虑的问题 (1) 中，非线性项 u^p 描述的是扩散过程中的非线性源，被称为 "热源 "，此时，方程可能会出现 Blow-up 现象，即解在有限时间内可能是无界的。为保证解的存在性 (这而指的是广义解) ，对初值 $u_0(x)$ 和指标 p 应做一定的限制。

本文感兴趣的是如果所考虑方程的解在有限时间 Blow-up ，若对初值增加一扰动函数 $h(x)$ ，设扰动后的 Blow-up 时间为 T_h ，那么 T 和 T_h 之间的关系是什么，即问题 (1) 中解的 Blow-up 时间 T 和下面问题

$$\begin{cases} u_t = \triangle u^m + u^p, & (x,t) \in Q_T, \\ u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,T), \\ u(x,0) = u_0(x) + h(x) \ge 0, & x \in \Omega \end{cases} \tag{2}$$

解的 Blow-up 时间 T_h 之间有什么样的关系；我们有如下的

定理：设 T 和 T_h 分别是 (1) 和 (2) 解的 Blow-up 时间，并且有估计式 (4),(5) 和 (6),(7) ；那么当 $\| h \|_\infty$ 充分小时，存在常数 $C = C(u_0, c_0, c_1, c_2) > 0$ 使得

$$|T_h - T| \le C||h||^{\delta}_{L^1(\Omega)}$$

其中 $\delta=(pC_0^{p-1}-\frac{1}{p-1})^{-1}$

注 1:Hrrero 和 Vel*á*zquez 以及 Pablo Groisman 等人分别讨论了当 $m=1$ 时, 即方程 (1) 为半线性热方程时的情况: 在扰动函数 $h(x)\in L^{\infty}(\Omega)$ 的前提下, 对 $N=1$ 的情况，得到了估计式 $|T-T_h|\leq C\parallel h\parallel_{\infty}$；当 $N>1$ 时， Pablo Groisman 等人在文章 [5] 中证明出类似的结果 $|T-T_h|\leq C\parallel h\parallel_{\infty}\cdot|\ln(\parallel h\parallel_{\infty})|^{\frac{N+2}{2+\varepsilon}}$.

注 2: 对于 $m>1$ ，方程会产生退化的情况下，我们已不能利用上面的途径来证明类似的结论，因为由于解的性质相对变坏，一些对证明起重要作用的估计式不能再保证它的正确性，比如在半线性热方程中成立的下面的一个性质

对 $\forall\varepsilon>0,\exists\tau=\tau(\varepsilon)>0$ ，使得

$$|u(x,t)|\leq\kappa(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}+(\varepsilon+\frac{N\kappa}{2p})\frac{(T-t)^{-\frac{1}{p-1}}}{|\ln(T-t)|}$$

对所有的 $\Omega\times[T-\tau,T)$ 都成立；其中 $\kappa=(p-1)^{-\frac{1}{p-1}}$
对问题 (1) 却还无法给出证明；所以我们引入新的辅助估计式 (5) 和 (7) ，并且在定理的估计式中出现的是函数 $h(x)$ 的 L^1 模。

第二节 预备知识

首先给出一些常用的记号

$$\| f \|_{L^p(\Omega)}= \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\| f(\cdot,t) \|_{L^p(\Omega)}= \left(\int_\Omega |f(x,t)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\| f \|_\infty= \inf \sup_{N\in\Pi, x\in\Omega\setminus N} |f(x)|$$

Π 为 Ω 中零测集全体;

$$L^p(\Omega) = \{f| \parallel f \parallel_{L^p(\Omega)}< \infty\}$$

$$L^\infty(\Omega) = \{f| \parallel f \parallel_\infty< \infty\}$$

$$C^\alpha(Q_t) = \{u|[u]_\alpha = \sup_{p,q\in Q_t} \frac{|u(p) - u(q)|}{(d(p, q))^\alpha} < \infty; 0 < \alpha < 1\}$$

其中 $1 \le p < \infty, \quad d(p, q) = (|x_p - x_q|^2 + |t_p - t_q|)^{\frac{1}{2}}$

Gronwall **不等式**：设非负可积函数 $x(t), c(t)$ 在 $[0, T]$ 满足

$$x(t) \le \int_0^t c(\tau)x(\tau)d\tau + a(t)$$

则

$$x(t) \le \sup_{0\le t\le T} |a(t)| \cdot exp \int_0^T c(\tau)d\tau$$

Blow-up **解和** Blow-up **时间**：如果存在 $T_{max} < +\infty$, 使得 $u(\cdot, t) : [0, T_{max}) \to \mathcal{X}$($\mathcal{X}$ 是一 Banach 空间) 且对 $\forall\ T < T_{max}$, $\quad \| u(\cdot, t) \|_\mathcal{X}$ 在 [0,T) 上有界，同时 $\lim_{t\to T_-} \| u(\cdot, t) \|_\infty\to +\infty$, 则称解 $u(x, t)$ 在有限时刻 T 在 $\| u(\cdot, t) \|_\mathcal{X}$ 范数意义下 Blow-up，其中 T 称为 Blow-up 时间。

第三节 定理的证明

对于所讨论的方程，我们定义以下弱解

定义：函数 $u \in L^\infty(Q_T) \cap C^\alpha(Q_T), (0 < \alpha < 1)$ 称为 (1) 的一个弱解，如果对 $\forall \varphi \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$, $\varphi \mid_{\partial\Omega\times(0,t)}= 0$ 函数 u 满足

$$\int_\Omega u(x,t)\varphi(x,t)dx - \int_0^t \int_\Omega (u\varphi_s + u^m \triangle\varphi + u^p\varphi)dxds = \int_\Omega u_0\varphi(x,0)dx \quad (3)$$

证明的过程中，下面的先验估计将起到关键的作用：在 u_0 和 p 的一些适定假设下，问题 (1) 的解成立下面的不等式 (见文献 [2])

$$(p-1)^{\frac{-1}{p-1}}(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} \le ||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} \le C_0(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} \quad (4)$$

此外在一定条件下还可以证明

$$C_1(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} \le ||u(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} \le C_2(T-t)^{\frac{-1}{p-1}} \quad (5)$$

当给初值增加一个扰动函数 $h(x)$，方程 (2) 的解 u_h 仍有类似的不等式 (只需当 $\| h \|_\infty$ 取得足够小)

$$(p-1)^{\frac{-1}{p-1}}(T_h-t)^{\frac{-1}{p-1}} \le ||u_h(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} \le C_0(T_h-t)^{\frac{-1}{p-1}} \quad (6)$$

$$C_1(T_h-t)^{\frac{-1}{p-1}} \le ||u_h(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} \le C_2(T_h-t)^{\frac{-1}{p-1}} \quad (7)$$

证明的思路如下：对问题 (1) 和问题 (2) 的解 u 和 u_h，我们要得到估计式 $||u(\cdot,t) - u_h(\cdot,t)||_{L^1(\Omega)} \le ||h||_{L^1(\Omega)}(\frac{T}{T-t})^{pC_0^{p-1}}$， (对 $\forall t \in (0, \min\{T_h, T\})$) 随后我们能找到一个合适的 $t_0 \in (0, \min\{T_h, T\})$ 来建立 $\mid T - t_0 \mid$ 和 $\mid T_h - t_0 \mid$ 与 $||h||_{L^1(\Omega)}$ 之间的关系，最后利用三角不等式来得到定理的结论。

为简便记，令函数 $v(x,t) = u(x,t) - u_h(x,t)$，则由定义 (3), 在区域 Q_t 上的函数 v 满足

$$\int_\Omega v(x,t)\varphi(x,t)dx - \int_0^t \int_\Omega v(\varphi_s + A\Delta\varphi + B\varphi)dxds = -\int_\Omega h(x)\varphi(x,0)dx \quad (8)$$

其中

$$A = m\int_0^1 (su + (1-s)u_h)^{m-1} ds$$

$$B = p\int_0^1 (su + (1-s)u_h)^{p-1} ds$$

对于倒向第一边值问题

$$\begin{cases} \varphi_s + A\Delta\varphi = 0, & (x,s) \in Q_t, \\ \varphi(x,s) = 0, & (x,s) \in \partial\Omega \times (0,t), \\ \varphi(x,t) = \chi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{9}$$

其中 $\chi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$ ， $|\chi(x)| \le 1$ ；上述问题 (9) 中的系数 A 仅仅是非负有界的可积函数，所以 (9) 一般不会有光滑解，针对这种情况，选取

$$A_\varepsilon = j_\varepsilon * A$$

代替 A ，而考虑

$$\begin{cases} \varphi_s + (\eta + A_\varepsilon)\Delta\varphi = 0, & (x,s) \in Q_t, \\ \varphi(x,s) = 0, & (x,s) \in \partial\Omega \times (0,t), \\ \varphi(x,t) = \chi(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{10}$$

这里 j_ε 是 Ω 上的磨光算子， A_ε 是 A 的磨光函数 (对于 j_ε 的选取，可以参见 [3]) ，则显然有 $A_\varepsilon \in C^\infty(\bar{Q}_t)$,$A_\varepsilon \ge 0$ ，此外，对任意给定的 $\eta > 0$ ，我们可以令 ε 充分小，使得

$$\int\int_{Q_t} (A_\varepsilon - A)^2 dxdt \le \eta^3 \tag{11}$$

根据抛物理论 (见文献 [4]) ，问题 (10) 存在解 $\varphi \in C^{2,1}(\bar{Q}_t)$ 且满足

$$|\varphi(x,s)| \le 1, \quad (x,s) \in Q_t \tag{12}$$

用 $\Delta\varphi$ 乘 (10) 中第一式，在 Q_t 上积分，利用分部积分得

$$\begin{aligned}2\int_0^t\int_\Omega(\eta+A_\varepsilon)(\Delta\varphi)^2dxds &= -2\int_0^t\int_\Omega\varphi_s\Delta\varphi dxds\\ &= \int_0^t\int_\Omega(|\nabla\varphi|^2)_s dxds\\ &= -\int_\Omega|\nabla\varphi(x,0)|^2dx+\int_\Omega|\nabla\varphi(x,t)|^2dx\end{aligned}\tag{13}$$

结合 (10) 中第三式和上面 (13) 的结论，得

$$2\int_0^t\int_\Omega(\eta+A_\varepsilon)(\Delta\varphi)^2dxds+\int_\Omega|\nabla\varphi(x,0)|^2dx=\int_\Omega|\nabla\chi(x)|^2dx\tag{14}$$

由此得到

$$2\int_0^t\int_\Omega(\eta+A_\varepsilon)(\Delta\varphi)^2dxds\le M_1,\quad \int_0^t\int_\Omega(\Delta\varphi)^2dxds\le M_1\eta^{-1}\tag{15}$$

其中 M_1 是与 ε 无关的常数。将 (10) 的解 φ 代入 (8) 得到

$$\begin{aligned}&\int_\Omega v(x,t)\chi(x)dx-\int_0^t\int_\Omega v((A-A_\varepsilon)\Delta\varphi-\eta\Delta\varphi+B\varphi)dxds\\ &=-\int_\Omega h(x)\varphi(x,0)dx\end{aligned}\tag{16}$$

利用不等式 (10) 的结果及函数 v 的有界性，有

$$\begin{aligned}&|\int_0^t\int_\Omega v(A-A_\varepsilon)\Delta\varphi dxds|\\ \le\ & M_2\left(\int_0^t\int_\Omega(A-A_\varepsilon)^2dxds\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega(\Delta\varphi)^2dxds\right)^{\frac{1}{2}}\\ \le\ & M_2\eta\end{aligned}\tag{17}$$

$$\begin{aligned}&|\int_0^t\int_\Omega v\eta\Delta\varphi dxds|\\ \le\ & M_2\left((\eta t|\Omega|)^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^t\int_\Omega(\Delta\varphi)^2dxds\right)^{\frac{1}{2}}\\ \leqslant\ & M_2M_1\eta^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\tag{18}$$

结合 (16),(17) 和 (18) ，令 $\eta\to 0+$ ，得

$$\int_\Omega v(x,t)\chi(x)dx\le\parallel B\parallel_\infty\int_0^t\int_\Omega|\ v\ |\ dxds+\int_\Omega|h(x)|dx\tag{19}$$

在 (19) 中选取 $\chi(x) = signv(x,t)$(可以通过逼近的方法) 得到，那么

$$\int_\Omega |v(x,t)|dx \leq \| B \|_\infty \int_0^t \int_\Omega | v | dxds + \int_\Omega |h(x)|dx$$

利用 Gronwall 不等式

$$\int_\Omega |v(x,t)|dx \leq \|h\|_{L^1(\Omega)} e^{\int_0^t \|B\|_\infty ds} \tag{20}$$

根据 (4) 和 (6)(这里不妨令 $T \leq T_h$)，进一步计算函数 $B(x,s)$ 后得到

$$\begin{aligned} B(x,s) &= p\int_0^1 (su + (1-s)u_h)^{p-1} ds \\ &\leq p\int_0^1 (sC_0(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} + (1-s)C_0(T_h-t)^{-\frac{1}{p-1}})^{p-1} ds \\ &\leq p\int_0^1 (sC_0(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} + (1-s)C_0(T-t)^{-\frac{1}{p-1}})^{p-1} ds \\ &\leq pC_0^{p-1}(T-t)^{-1} \end{aligned} \tag{21}$$

利用上面 (21) 的结果，不等式 (20) 可改写为

$$\|v(\cdot,t)\|_{L^1(\Omega)} \leq \|h\|_{L^1(\Omega)} (\frac{T}{T-t})^{pC_0^{p-1}} \tag{22}$$

对任意的 $t \in (0,T)$ 都成立；令时间 $t_0 \in (0,T)$ ，（当 $\|h\|_{L^1(\Omega)}$ 充分小时，一定可以找到这样一个时刻 t_0），使得下面不等式

$$\|h\|_{L^1(\Omega)} (\frac{T}{T-t})^{pC_0^{p-1}} \leq \frac{C_1}{2}(T-t)^{-\frac{1}{p-1}} \tag{23}$$

对任意的 $t \in [0,t_0]$ 都成立；并且在 t_0 这一时刻满足

$$(T-t_0)^{pC_0^{p-1}-\frac{1}{p-1}} \sim \frac{2}{C_1} T^{pC_0^{p-1}} \|h\|_{L^1(\Omega)} \tag{24}$$

即

$$T - t_0 \sim (\frac{2}{C_1} T^{pC_0^{p-1}} \|h\|_{L^1(\Omega)})^{(pC_0^{p-1}-\frac{1}{p-1})^{-1}}$$