学校编号：10384　　分类号：__________ 密级：__________

学　　号：200223039　　UDC：____________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

完备随机内积模中的 Lax-Milgram 定理

The Lax-Milgram Theorem in Complete Random Inner Product Modules

周国军

指导教师姓名： 郭铁信　　教授

申请学位级别： 硕　士　学　位

专 业 名 称： 概率论与数理统计

论文提交日期： 2005 年　5　月

论文答辩日期： 2005 年　　月

学位授予单位： 厦　门　大　学

学位授予日期： 2005 年　　月

答辩委员会主席： __________

评　　阅　　人： __________

2005 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果．本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明．本人依法享有和承担由此论文而产生的责任．

声明人 (签名):

年　月　日

目　录

Contents

摘要

本文旨在将经典的 Lax-Milgram 定理推广成随机度量理论中最简便的形式. 全文共三章.

第一章为引言，简单回顾了随机度量理论的历史、现状及前景，并阐述了本文所得到的结论的意义.

在第二章中，给出了随机度量理论中常用的记号及本文中用到的基本概念与命题.

在最后一章中，给出了 Lax-Milgram 定理在随机度量理论中的最简单且最便于应用的形式 —— 设 (S,χ) 为数域 K 上以 $\sigma-$ 有限测度空间 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的完备的 $RIP-$ 模，而且 $a: S\times S\to L(\mu,K)$ 满足如下条件：

(**A**) 存在 $\xi\in L^{+}(\mu)$, 使得 $|a(p,q)|\le\xi\cdot\widetilde{X}_p\cdot\widetilde{X}_q$, $\forall\ p,q\in S$;

(**B**) a 是 coercive(即，存在 $\eta\in L^{+}(\mu)$, 使得 $|a(p,p)|\ge\eta\cdot\widetilde{X}_p^2$, $\forall\ p\in S$ 且 $\mu(\{\omega|\eta(\omega)=0\})=0$);

(**C**) 对每个 $q\in S, a(\cdot,q): S\to L(\mu,K)$ 是模同态，且对每个 $p\in S$,

$a(p,\xi q_1+\eta q_2)=\bar{\xi}a(p,q_1)+\bar{\eta}a(p,q_2)$, $\forall\ q_1,q_2\in S$ 及 $\forall\ \xi,\eta\in L(\mu,K)$.

则存在唯一的连续模同态 $A: S\to S$ 使 A^{-1} 存在且 $\mu-a.s.$ 有界，还满足：

(**1**) $a(p,q)=X_{A(p),q}$,$\forall\ p,q\in S$;

(**2**) $\widetilde{X}_{A^{-1}(p)}\le\frac{1}{\eta}\widetilde{X}_p$, $\forall\ p\in S$.

关键词: 完备的随机内积模；几乎处处有界的随机线性泛函； Riesz 表示型定理； Lax-Milgram 定理

Abstract

The purpose of this paper is to generalize the classical Lax-Milgram theorem from classical functional analysis to random metric theory.There are three chapters in this paper.

In the first chapter, we simply introduce the history,present and future of random metric theory,then we clarify the significance of the result of this paper.

In the second chapter, we show some basic signes, concepts and propositions of random metric theory.

In the last chapter, we prove the simplest form of the Lax-Milgram theorem in random metric theory—— Let (S, χ) be a complete random inner product module over the scalar field K with base a $\sigma-$ finite measure space $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, and $a : S \times S \to L(\mu, K)$ satisfy the following:

(**A**) there exists $\xi \in L^+(\mu)$ such that $|a(p, q)| \leq \xi \cdot \widetilde{X}_p \cdot \widetilde{X}_q$, $\forall\ p, q \in S$;

(**B**) a is coercive (namely, there exists $\eta \in L^+(\mu)$ such that $|a(p, p)| \geq \eta \cdot \widetilde{X}_p^2$, $\forall\ p \in S$ and $\mu(\{\omega | \eta(\omega) = 0\}) = 0$);

(**C**) $a(\cdot, q) : S \to L(\mu, K)$ is a module homomorphism for any $q \in S$, and for every $p \in S$ the following also holds:

$a(p, \xi q_1 + \eta q_2) = \bar{\xi} a(p, q_1) + \bar{\eta} a(p, q_2)$, $\forall\ q_1, q_2 \in S$, $\forall\ \xi, \eta \in L(\mu, K)$.

Then there exists a unique continuous module homomorphism $A : S \to S$ such that A^{-1} exists and is $\mu - a.s.$ bounded, further the following also hold:

(**1**) $a(p, q) = X_{A(p),q}$, $\forall\ p, q \in S$;

(**2**) $\widetilde{X}_{A^{-1}(p)} \leq \frac{1}{\eta} \widetilde{X}_p$, $\forall\ p \in S$.

Key Words: Complete random inner product modules;almost surely bounded random linear functionals; Riesz representation theorem;Lax-Milgram theorem

第一章 引言

随机度量理论源于概率度量理论 (亦称 “Probabilistic Geometry”).1942 年, 著名的几何与拓扑学家 Karl Menger 首创了概率度量空间 (Probabilistic Metric Spaces, 简记为 PM- 空间, 原名为统计度量空间 Statistical Metric Spaces)[1]. 他的定义被杰出的统计学家 A.Wald, 概率度量空间理论领域的著名学者 B.Schweizer 与 A.Sklar 教授及前苏联科学院院士 *A.N.Šerstnev* 所发展, 于 1964 年形成了 PM- 空间的最终定义. 在 1962 年 *Šerstnev* 亦提出了概率赋范空间 (Probabilistic Normed Spaces, 简记为 PN- 空间) 的定义, 在二十世纪六, 七十年代 PM- 空间获得了蓬勃的发展, 1983 年 B.Schweizer 与 A.Sklar 的在该领域最有影响的著作 [2] 就是重要标志. 概率度量空间的基本出发点是认为两点间的距离是随机的, 从而用一个分布函数表示, 它在一个非负实数 x 处的值被解释为此两点间距离小于 x 的概率, 因此 PM- 空间具有强烈的应用背景. 正如 B.Schweizer 在 [3] 中所说: “应用的时机已经成熟.” 在随后的的岁月里, B.Schweizer 与 A.Sklar 等人将 PM- 空间的思想与信息论、聚点分析、统计力学、数理统计及混沌动力系统相结合做出了一系列开创性的工作 [2,4-8]. 比如, 如今在数理统计学和金融学中受到广泛关注的 *Copula* 就是在 PM- 空间理论发展过程中所产生的概念.

从理论上讲, PM- 空间与 PN- 空间分别是通常泛函分析中度量空间及赋范空间的概率推广. 这种分析学基础的推广必将引发一系列基本问题的研究. 除 PM- 空间理论自身的发展外, 或许最引人注目的大事是 1956 年捷克布拉格学派的著名学者 —*A.Špaček* 院士的工作 [9]: 他从随机过程理论的观点出发提出了随机度量的概念, 它可以看作一个随机过程且每一个样本是某一集合上的通常度量 [10].1968 年, Stevens 修改了 *A.Špaček* 的途径, 提出了度量生成空间 [11]. 一年后, Sherwood 受 Schweizer 和 Sklar 关于分布生成空间的研究的启发提出了 E- 空间与伪度量生成空间 [12] 及 E- 范空间与半范生成空间 [13], 并建立了两个

引人注目的等距同构定理 [12,13]. 直到 Schweizer 与 Sklar 的著作 [2], 终于形成了比 *A.Špaček* 关于随机度量空间原始定义更为一般且更为标准的随机度量空间 (Random Metric Spaces, 简记为 RM- 空间) 及随机赋范空间 (Random Normed Spaces, 简记为 RN- 空间) 的最终定义.

早在 1979 年, 游兆永先生在中国首先倡导了 PM- 空间理论的研究, 他与朱林户教授关于 PM- 空间等距离度量化的工作 [14,15] 直到目前仍是我国关于 PM- 空间方面最有代表性的工作之一. 1981 年, 林熙教授在她的硕士论文中利用 Sherwood 关于 PM- 空间上依概率度量压缩映象的不动点原理 [16], 首次研究了定义在可分 Banach 空间上依概率度量压缩的随机算子的随机不动点问题, 表明利用 E- 范空间框架可以为随机算子的可测性研究提供方便 [17]. 这启发了朱林户教授 [18] 利用 E- 范空间框架研究王梓坤先生在文献 [19] 中提出的关于不可分赋范空间上随机线性泛函的延拓问题, 尤其重要的是他本质上证明了实 E- 范空间上的 Hahn-Banach 延拓定理并探讨了 E- 范空间的随机共轭空间问题. 无疑这些工作对后来的研究富有极大的启发性, 但他们工作的中心仍在 PM- 空间方面, 充其量注意到一类性质较好的 PM- 空间 —E- 空间 [20] 的研究, 这种状况在 1989 年前后发生了质的变化.

关键的一步是郭铁信教授 1989 年的工作 [21], 他利用实值随机变量集合的本质上确界原理 [22] 巧妙地构造随机度量 (随机范数) 使取值于任一度量空间 (相应地, 任一赋范空间) 的随机元构成随机度量空间 (相应地, 嵌入到随机赋范空间), 这种构造为可测性的研究提供了方便 [21] 同时也保留了目标空间的完备性 [23,24]. 特别是当所论的目标空间是可分的或所论的随机元是随机变量时, 这种构造退回到 E- 空间中相应的构造, 一般地, E- 空间的框架不再适用. 这种构造将随机度量理论与随机泛函分析内在地融合起来, 使随机泛函分析有了一个新的发展途径 — 空间随机化途径 [23,25].

郭铁信教授发现: E- 范空间的随机共轭空间不再是 E- 范空间, 而是随机赋范空间, 也注意到朱林户教授在文献 [18] 中的技巧对实随机赋范空间亦有效, 在澄清随机线性泛函的 “线性性质 ” 本质的基础上在文献 [21] 中非凡地证明了复随机赋范空间上随机泛函的延拓定理, 从而得到了关于随机线性泛函扩张的一个

完整的 Hahn-Banach 定理，并在随机赋范空间的框架下提出了随机共轭空间的合理定义. 文献 [21] 突出了 RM- 空间及 RN- 空间的基本重要性，它是我国最早有关随机度量理论自身研究的重要文献，也为随机共轭空间的进一步发展作了基本的准备工作.

文献 [21] 引发了一系列关于 RN- 空间与随机内积空间 (Random Inner Product Spaces, 简记为 RIP- 空间) 及其上的随机共轭空间的工作 [26-37], 其中引人注目的为文献 [28,30,35], 它们以不同的形式提出并研究了强 RN- 空间及强 RIP- 空间, 也讨论了它们的随机共轭空间的进一步性质. 尤其是文献 [27,36] 利用强可测函数空间上点式可近的思路解决了经典 Lebesgue-Bochner 函数空间中的 L^p- 逼近问题. 这些工作都为随机赋范模与随机内积模的概念的提出积累了宝贵的素材.

在文献 [25,37,38] 中, 郭铁信教授首次提出了随机赋范模 (Random Normed Modules, 简记为 RIP- 模) 及随机内积模 (Random Inner Product Spaces, 简记为 RIP- 空间), 它们克服了强 RN- 空间及强 RIP- 空间的局限性，为随机共轭空间的深入发展铺平了道路 — 如一类拓扑模及其上的模同态的发展 [24,37,39]，进一步证明了 Riesz 表示定理 [40]. 特别是郭铁信教授将随机共轭空间的表示与 Banach 空间值鞅，向量测度等技巧结合，发现一类重要的随机赋范模的随机共轭空间表示的强弱与 Banach 空间的几何结构深刻相关，不但利用 Banach 空间几何技巧完成了随机共轭空间的表示理论，而且将这些表示用于取值于共轭 Banach 空间的弱星可测函数的弱星等价性研究, 获得了相当深刻的弱星等价性定理 [41].

文献 [27,36] 建立了完备随机赋范模中依随机范数的点式最佳逼近性质与相关的 L^p- 空间中依 L^p- 范数的通常最佳逼近性质的等价关系，这不仅解决了 Banach 空间的逼近性质的 L^p- 稳定性问题，而且利用 Banach 空间的理论解决了许多随机逼近中的存在性问题.

在文献 [42] 中, 郭铁信教授从随机赋范模与一类抽象的 L^p- 空间的联系入手建立了完备随机赋范模的随机共轭空间与 Banach 空间的通常共轭空间理论之间的深刻对应关系 (这种对应关系已成为一个不可缺少的桥梁), 这不仅给出了完备

随机赋范模为随机自反的外部特征, 也进一步启发了郭铁信教授在文献 [43] 中利用随机共轭空间表示方法统一了迄今为止六十多年来关于 Lebesgue-Bochner 函数空间对偶表示的所有的重要结果.

在文献 [45] 中, 郭铁信教授结合文献 [27,36,43,42] 中的思想方法已顺利地建立了完备随机赋范模中的 James 定理等随机自反的深刻内在特征.

最近, 郭铁信教授在文献 [39] 中提出了随机半范空间 (Random Seminormed Spaces, 简记为 RSN- 空间) 及随机半范模 (Random Seminormed Modules, 简记为 RSN- 模) 的定义, 对 RSN- 模上的连续的模同态进行了刻画, 并证明了 RSN-模中的 Hahn-Banach 延拓定理.

需要指出的是：在沿着泛函分析的思路尤其是空间理论的方法发展随机度量理论的过程中日益形成了随机度量理论的一个新版本, 文献 [38] 是一个重要的标志. 这一新版本使过去关于随机共轭空间的工作获得了一个合理解释, 也为随机共轭空间的进一步发展提供了一个普适的框架. 关于这一新版本及上述结论可参考郭铁信教授的论文 [46] 或综述性长文 [44,45]. 本文正是采用了这一新版本.

综上所述, 随机度量理论在中国已被发展成为一个独立, 系统且统一的整体 — 它不仅形成了一个新版本, 还提出了 RN- 模, RIP- 模与 RSN- 模等重要框架且建立了随机共轭空间理论, 特别是随机泛函分析的空间随机化途径的提出使随机泛函分析更加成熟. 随机赋范模与 Banach 空间, 随机共轭空间与经典共轭空间的内在联系是随机度量理论得以深层发展且取得成功应用的关键. 随机度量理论的发展深化了人们对经典泛函分析的认识. 今后, 随机度量理论将朝着向随机分析渗透的方向发展, 它有着广阔的前景. 而且因为一个随机度量空间及随机赋范空间分别决定一个概率度量空间及概率赋范空间, 所以我国学者关于随机度量理论的发展对概率度量理论领域的一个最实质和独特的贡献, 特别是, 郭铁信教授的文献 [38] 已引起国际同行的重视, 如见文献 [47].

熟知, 经典的 Lax-Milgram 定理在微分方程理论中有着广泛的应用, 鉴于该定理在泛函分析及微分方程理论中的基本重要性, 我们自然考虑将其推广到完备的 RIP- 模中, 进而将其应用于研究随机微分方程理论. 文献 [29] 提出了随机内积空间 (Random Inner Product Spaces, 简记为 $RIP-$ 空间) 并证明了 Schwartz

不等式. 进一步, 文献 [35] 在 [29] 的基础上首先考虑完备的 $RIP-$ 空间上的 Riesz 表示定理并且同时亦考虑了相应的 Lax-Milgram 定理. 由于 $RIP-$ 空间与通常内积空间有着本质的差别, 将经典的理论推广到 $RIP-$ 空间中去常常会遇到许多实质性的困难, 比如, 文献 [35] 提出了强随机内积空间, 同时要求所要表示的几乎处处有界的随机线性泛函具有闭值域时才有所谓的 Riesz 表示型定理, 作为连锁反应, 相应的 Lax-Milgram 定理的推广形式也比经典情形外加了许多不自然的限制, 这在应用上极不方便. 文献 [38,40] 首次证明了 Riesz 表示型定理不仅在完备的 $RIP-$ 模上成立而且在完备的 $RIP-$ 模上不必首先要求所要表示的几乎处处有界的随机线性泛函的值域为闭, 同时表明值域为闭虽不是 Riesz 表示型定理的条件, 但它确是 Riesz 表示型定理的直接推论.

本文的目的是在文献 [38, 40] 工作的基础上改进文献 [35] 中的工作到最简洁且最便于应用的形式.

本文的结论将在一定程度上推动随机度量理论的发展, 对随机微分方程理论的发展和随机度量理论的应用有着重要的作用.

第二章 预备知识

为了行文与读者的方便，本章给出随机度量理论中常用的记号及本文中用到的基本概念与命题如下：

K 表示实数域 R 或复数域 C; $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为一 $\sigma-$ 有限的测度空间；$L^0(\mu,K)$ 表示所有定义在 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 上的 K 值 $\mu-$ 可测函数全体； $L(\mu,K)$ 表示所有 $L^0(\mu,K)$ 中元素的 $\mu-$ 等价类全体所形成的代数. 关于 $\mu-$ 可测函数， $\mu-$ 可测集， $\mu-$ 零集， $\mu-$ 几乎处处相等及 $\mu-$ 等价类等术语，均参见文献 [49].

特别地，记 $\tilde{L}(\mu,R)$ 表示所有定义在 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 上的广义实值 $\mu-$ 可测函数的 $\mu-$ 等价类全体，熟知，在偏序 $\leq$: $\xi\leq\eta$ 当且仅当 $\xi^0(\omega)\leq\eta^0(\omega)$ $\mu-a.e.$ 之下， $\tilde{L}(\mu,R)$ 成一完备格，其中 ξ^0 与 η^0 分别是 ξ 与 η 的任意选取的代表元，由 $\mu-$ 等价类的定义易知上述偏序与代表元 ξ^0 与 η^0 的特殊选取无关，故有时可以直接写作 $\xi\leq\eta$ 当且仅当 $\xi(\omega)\leq\eta(\omega)$ $\mu-a.e.$, 即此时 ξ 与 η 在后一式子中也分别表示它们任意选取的代表元，这不会产生任何歧义. 本文中出现类似场合均照此理解，尤其我们用 $[\xi\leq\eta]$ 表示集合 $\{\omega\in\Omega|\xi^0(\omega)\leq\eta^0(\omega)\}$ 所决定的 $\mu-$ 等价类.

从文献 [49] 可知完备格 $(\tilde{L}(\mu,R),\leq)$ 中任意子集 A 都有上确界 $\vee A$ 与下确界 $\wedge A$, 且存在 A 中可数子集 $\{a_n\}$ 与 $\{b_n\}$ 使得 $\vee A=\vee_{n\geq1}a_n$ 以及 $\wedge A=\wedge_{n\geq1}b_n$, 尤其当 A 在 $\leq$ 之下为定向集 (相应地, 下定向集): 即 $\forall\, a_1,a_2\in A,\exists\, a_{12}\in A$, 使得 $a_1\vee a_2\leq a_{12}$(相应地， $a_1\wedge a_2\geq a_{12}$) 时前述的 $\{a_n\}$ 可选为非降 (相应地， $\{b_n\}$ 可选为非增) 序列. 特别地， $(L(\mu,R),\leq)$ 亦为完备格，即其中任意有上界 (相应地，有下界) 的集合必有上确界 (相应地，有下确界).

最后，对任意 $\xi\in L(\mu,K)$, $|\xi|$ 表示 $|\xi^0|$ 所决定的 $\mu-$ 等价类，其中 ξ^0 为 ξ 的任意的代表元， $|\xi^0|:(\Omega,\mathcal{A},\mu)\to[\mathbf{0},+\infty)$ 被定义为 $|\xi^0|(\omega)=|\xi^0(\omega)|$, $\forall\,\omega\in\Omega$. 也记 $L^+(\mu)=\{\xi\in L(\mu,R)|\xi\geq0\}$.

定义 2.1[38] 有序对 (S,χ) 称为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的随机赋范空间 (简称为 $RN-$ 空间), 如果 S 是数域 K 上的线性空间, 而且映象 $\chi:S\to L^+(\mu)$

满足如下三个条件（记 $\chi(p)$ 为 X_p ）：

$(RN-1)$ $X_{\alpha p}=|\alpha|X_p$, $\forall\ \alpha\in K,\forall\ p\in S$;

$(RN-2)$ 若 $X_p=0$, 那么必有 $p=\theta$ (θ 为 S 中的零元);

$(RN-3)$ $X_{p+q}\le X_p+X_q$, $\forall\ p,q\in S$.

进一步，若还有一映象 $*: L(\mu,K)\times S\to S$ 使如下各条件亦满足：

$(RNM-1)$ $(S,*)$ 是代数 $L(\mu,K)$ 上的左模；

$(RNM-2)$ $X_{\xi*p}=|\xi|\cdot X_p$, $\forall\ \xi\in L(\mu,K),\forall\ p\in S$.

那么，三元组 $(S,\chi,*)$ 被称为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的随机赋范模，简称为 $RN-$ 模. 如文献 [38] 中所述，上述模乘法 $*: L(\mu,K)\times S\to S$ 实际上可视为通常的数乘 $\cdot: K\times S\to S$ 的自然扩张，因此，当 $*$ 已知时，可简写 $(S,\chi,*)$ 为 (S,χ), $\xi*p$ 为 $\xi\cdot p$, 即用 “$\cdot$” 既表示数乘又表示模乘法而不会产生任何混淆.

定义 2.2[38] 设 (S,χ) 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 $RN-$ 空间. 一线性算子 $f: S\to L(\mu,K)$ 被称为几乎处处 (简记为 $a.s.$) 有界的随机线性泛函，如果存在 $\xi\in L^+(\mu)$ 使得 $|f(p)|\le\xi\cdot X_p$, $\forall\ p\in S$. 记 S 上所有 $a.s.$ 有界的随机线性泛函所成线性空间为 S^*, 定义 $\chi^*: S^*\to L^+(\mu)$ 为 $X^*_f:=X^*(f)=\wedge\{\xi\in L^+(\mu)||f(p)|\le\xi\cdot X_p,\ \forall\ p\in S\},\forall\ f\in S^*$, 再定义 $\tilde{*}: L(\mu,K)\times S^*\to S^*$ 为 $(\xi\tilde{*}f)(p)=\xi\cdot(f(p))$, $\forall\ \xi\in L(\mu,K),\forall\ f\in S^*,\forall\ p\in S$. 那么 $(S^*,\chi^*,\tilde{*})$ 形成一个数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的完备的 $RN-$ 模，简记为 (S^*,χ^*), 称为 (S,χ) 的随机共轭空间.

注记 2.1[38] $L(\mu,K)$ 是数域 K 上的代数，当然是其自身上的左模，定义 $\chi: L(\mu,K)\to L^+(\mu)$ 为 $X_p=|p|$, $\forall\ p\in L(\mu,K)$, 那么 $(L(\mu,K),\chi)$ 形成一个数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 $RN-$ 模，简记此 $RN-$ 模仍为 $L(\mu,K)$.

命题 2.1[38] 设 (S,χ) 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 $RN-$ 空间. 记 $\mathcal{F}_+(\mathcal{A})=\{A\in\mathcal{A}|0<\mu(A)<+\infty\}$, 对每一 $A\in\mathcal{F}_+(\mathcal{A})$, $\varepsilon>0$, $0<\lambda<\mu(A)$, 设 $\mathcal{N}_\theta(A,\varepsilon,\lambda)=\{p\in S|\mu(\{\omega\in A|X_p(\omega)<\varepsilon\})>\mu(A)-\lambda\}$, $\mathcal{U}_\theta(A)=\{\mathcal{N}_\theta(A,\varepsilon,\lambda)|\varepsilon>0,0<\lambda<\mu(A)\}$ 及 $\mathcal{U}_\theta(\chi)=\bigcup_{A\in\mathcal{F}_+(\mathcal{A})}\mathcal{U}_\theta(A)$ 那么：

(1) $\mathcal{U}_\theta(\chi)$ 是 S 上某个可度量化线性拓扑在 θ 处的邻域基，该邻域基所决定

的线性拓扑称为 S 上由 χ 所诱导的 $(\varepsilon,\lambda)-$ 线性拓扑.

(2) S 中的序列 $\{p_n : n \in N\}$ 依 $(\varepsilon,\lambda)-$ 线性拓扑收敛于 S 中的某一点 p_0 当且仅当对任意的 $A \in \mathcal{F}_+(\mathcal{A})$ 序列 $\{\chi_{p_n - p_0} : n \in N\}$ 在 A 上依测度 μ 收敛于 0.

(3) 由于 $L(\mu,K)$ 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 $RN-$ 空间, 在其 $(\varepsilon,\lambda)-$ 线性拓扑下 $L(\mu,K)$ 为一拓扑代数, 即代数乘法 $\cdot : L(\mu,K)\times L(\mu,K) \to L(\mu,K)$ 为联合连续的. 若 (S,χ) 为一 $RN-$ 模, 则 (S,χ) 为拓扑代数 $L(\mu,K)$ 上的拓扑模, 即模乘法 $\cdot : L(\mu,K) \times S \to S$ 为联合连续.

在本文中, 对任一 $RN-$ 空间, 凡谈及其拓扑结构均指其 $(\varepsilon,\lambda)-$ 线性拓扑.

命题 2.2[38] 设 (S^1,χ^1) 及 (S^2,χ^2) 均为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 $RN-$ 模, 那么 $f\colon S^1 \to S^2$ 为 $a.s.$ 有界当且仅当 f 为一连续的模同态.

定义 2.3[38] 称有序对 (S,χ) 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的随机内积空间 (简称 $RIP-$ 空间), 如果 S 是数域 K 上的线性空间, 而且映象 $\chi : S\times S \to L(\mu,K)$ 满足如下条件 (记 $\chi(p,q)$ 为 $X_{p,q}$):

$(RIP-1)$ $X_{p,p} \in L^+(\mu)$, $\forall\ p \in S$ 且 $X_{p,p} = \theta$ ($L(\mu,K)$ 中的零元) 当且仅当 $p = \theta$ (S 中的零元) ;

$(RIP-2)$ $X_{p,q} = \overline{X}_{q,p}$, ($\overline{X}_{p,q}$ 表示 $X_{q,p}$ 的共轭类) , $\forall\ p,q \in S$;

$(RIP-3)$ $X_{\alpha p,q} = \alpha \cdot X_{p,q}$, $\forall\ p,q \in S, \forall\ \alpha \in K$;

$(RIP-4)$ $X_{p+q,r} = X_{p,r} + X_{q,r}$, $\forall\ p,q,r \in S$.

进一步, 若还有一映象 $* : L(\mu,K) \times S \to S$ 使如下各条件亦满足:

$(RIPM-1)$ $(S,*)$ 是代数 $L(\mu,K)$ 上的左模;

$(RIPM-2)$ $X_{\xi * p,q} = \xi \cdot X_{p,q}$, $\forall\ \xi \in L(\mu,K)$, $\forall\ p,q \in S$.

那么, $(S,\chi,*)$ 被称为随机内积模 (简称为 $RIP-$ 模), 且当 $*$ 已知时, 可简写 $(S,\chi,*)$ 为 (S,χ).

如果 (S,χ) 中的两个元素 p,q 满足 $X_{p,q} = 0$ 则称 p 与 q 是正交的; 对 S 的任意子集 M, 称 $\mathrm{M}^\perp = \{q \in S | X_{p,q} = 0, \forall\ p \in \mathrm{M}\}$ 为 M 的正交补.

命题 2.3[38] 设 M 是 $RIP-$ 模 (S,χ) 的闭子空间, 则 $S = M \oplus M^\perp$ 当且仅当 M 是子模.

命题 2.4[38] 设 (S,χ) 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的 $RIP-$ 空间，则 $|X_{p,q}| \leq \widetilde{X}_p \cdot \widetilde{X}_q$ ，$\forall\ p,q \in S$, 其中，定义 $\widetilde{\chi} : S \to L^+(\mu)$ 为 $\widetilde{X}_p = \sqrt{X_{p,p}}$ ，$\forall\ p \in S$, 从而 $(S,\widetilde{\chi})$ 亦为 $RN-$ 空间. 与经典内积空间类似，一个随机范数可由某个随机内积诱导出的当且仅当该随机范数满足平行四边形法则.

命题 2.5[38] 设 (S,χ) 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的完备的 $RIP-$ 模，映象 $f\colon S \to L(\mu,K)$ 是连续模同态 (等价地， f 是 S 上的 $\mu-a.s.$ 有界的随机线性泛函，即存在 $\xi \in L^+(\mu)$ 使得 $|f(p)| \leq \xi \cdot \widetilde{X}_p, \forall\ p \in S$), 则 S 中存在唯一元素 $\pi(f)$ 使得 $f(p) = X_{p,\pi(f)}$ 且 $\widetilde{X}_{\pi(f)} = \widetilde{X}_f^*$ ，其中 $(S^*,\widetilde{\chi}^*)$ 是 $RN-$ 空间 $(S,\widetilde{\chi})$ 的随机共轭空间，与 Hilbert 空间类似，典则对应 $\pi : S^* \to S$ 是从 $(S^*,\widetilde{\chi}^*)$ 到 $(S,\widetilde{\chi})$ 上的保随机范数的共轭模同构 (当 $K=R$ 时， π 亦为模同构，从而完备的 $RIP-$ 模是随机自共轭的).

第三章　　完备随机内积模中的 Lax-Milgram 定理

引理 3.1　设 (S,χ) 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的完备的 $RIP-$ 模，且映象 $a: S\times S\to L(\mu,K)$ 满足如下条件：

(**A**)　存在 $\xi\in L^{+}(\mu)$, 使得 $|a(p,q)|\le \xi\cdot \widetilde{X}_p\cdot \widetilde{X}_q$, $\forall\ p,q\in S$;

(**B**)　对每个 $q\in S, a(\cdot,q): S\to L(\mu,K)$ 是模同态，且对每个 $p\in S$, $a(p,\xi q_1+\eta q_2)=\bar{\xi}a(p,q_1)+\bar{\eta}a(p,q_2)$, $\forall\ q_1,q_2\in S$ 及 $\forall\ \xi,\eta\in L(\mu,K)$.

则存在唯一的连续模同态 $A: S\to S$ 使得 $a(p,q)=X_{A(p),q}$, $\forall\ p,q\in S$ 且 $\widetilde{X}_{A(p)}\le \xi\widetilde{X}_p$, $\forall\ p\in S$.

证明：任取 $p\in S$ 固定，令 $f_p(q)=\overline{a(p,q)}$, 则 f_p 是连续模同态，由命题 2.5 知，存在唯一 $w=w(p)\in S$, 使得对 $\forall\ q\in S$ 有 $f_p(q)=\overline{a(p,q)}=X_{q,w(p)}$. 从而有 $a(p,q)=X_{w(p),q}$, $\forall\ p,q\in S$.

设 $A: p\mapsto w(p)$, $\forall p\in S$, 则 $a(p,q)=X_{A(p),q}$, $\forall\ p,q\in S$, 又显然 A 是线性的，且 $\widetilde{X}^2_{A(p)}=X_{w(p),w(p)}=a(p,w(p))\le \xi\widetilde{X}_{A(p)}\cdot\widetilde{X}_p$, $\forall\ p\in S$, 即 $\widetilde{X}_{A(p)}\le \xi\widetilde{X}_p$, $\forall\ p\in S$, 从而 A 亦为连续的模同态. 引理得证.

定理 3.1　设 (S,χ) 为数域 K 上以 $(\Omega,\mathcal{A},\mu)$ 为基的完备的 $RIP-$ 模，而且 $a: S\times S\to L(\mu,K)$ 满足如下条件：

(**A**)　存在 $\xi\in L^{+}(\mu)$, 使得 $|a(p,q)|\le \xi\cdot\widetilde{X}_p\cdot\widetilde{X}_q$, $\forall\ p,q\in S$;

(**B**)　a 是 coercive(即，存在 $\eta\in L^{+}(\mu)$, 使得 $|a(p,p)|\ge \eta\cdot\widetilde{X}^2_p$, $\forall\ p\in S$ 且 $\mu(\{\omega|\eta(\omega)=0\})=0$);

(**C**)　对每个 $q\in S, a(\cdot,q): S\to L(\mu,K)$ 是模同态，且对每个 $p\in S$,

$a(p,\xi q_1+\eta q_2)=\bar{\xi}a(p,q_1)+\bar{\eta}a(p,q_2)$,$\forall\ q_1,q_2\in S$ 及 $\forall\ \xi,\eta\in L(\mu,K)$.

则存在唯一的连续模同态 $A: S\to S$ 使 A^{-1} 存在且 $\mu-a.s.$ 有界，还满足：

(**1**)　$a(p,q)=X_{A(p),q}$, $\forall\ p,q\in S$;

(**2**)　$\widetilde{X}_{A^{-1}(p)}\le \frac{1}{\eta}\widetilde{X}_p$, $\forall\ p\in S$.

证明：由引理 3.1 知, 存在唯一的连续模同态 A 使上式 (1) 成立, 且 $\widetilde{X}_{A(p)}\le$