学校编号：10384　　分类号：__________ 密级：__________
学　　号：200223001　　UDC：______________________________

厦　门　大　学

硕　士　学　位　论　文

代数的扩张与扩张代数的自同构

The extension of algebra and the automorphism of the extension algebra

陈　健　敏

指导教师姓名：林亚南　教授

专 业 名 称：基 础 数 学

论文提交日期：2005 年 5 月

论文答辩日期：2005 年　月

学位授予日期：2005 年　月

答辩委员会主席：________

评　　阅　　人：________

2005 年 5 月

The extension of algebra and the automorphism

of the extension algebra

By

Jianmin Chen

Supervisor: Professor Yanan Lin

Speciality: The representation of algebra

Institution: College of Mathematics Science

Xiamen University

Xiamen, P. R. China

May , 2005

学　位　论　文

代数的扩张与扩张代数的自同构

陈　健　敏

厦　门　大　学

二　0　0　五　年　五　月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

目录

Contents

摘　要

代数的扩张是利用一个已知的代数按照一定的规则得到一类新的代数的过程，代数的扩张和扩张代数的相关性质是代数学研究的基本问题. 本学位论文主要研究对偶扩张，平凡扩张，单点扩张代数的自同构问题. 其中，对偶扩张代数是一个代数与其反代数的张量得到的一类扩张代数；平凡扩张代数是代数 A 与 $D(A) = \mathrm{Hom}(A, k)$ 的半直积得到的一类扩张代数；单点扩张是代数 A 与闭域 k 通过一个 A- 模 M 的扩张代数. 本学位论文共分为四章.

第一章，我们对与论文有关的研究方向及发展动态进行介绍，并概述了本文的主要工作.

第二章，我们研究对偶扩张代数的箭图自同构， Frobenius 态射以及固定点代数. 第一节，我们证明了一个代数 A 的对偶扩张代数 $\mathcal{D}(A)$ 的箭图自同构由代数 A 相应的箭图自同构决定. Frobenius 映射的概念在研究代数群及其表示理论时提出. 在讨论代数群的有理结构，联系 Lie 型有限群与对应的代数群等方面， Frobenius 映射起了重要作用 [8]. Frobenius 映射的核在代数群的有理表示理论中具有关键地位. 在处理 Steinberg 定理， Lusztig 猜想等问题中， Frobenius 扭函子起了核心作用 [9]. 第二节和第三节，我们还分别证明了一个代数的对偶扩张代数的 Frobenius 态射以及固定点代数都是由这个代数的 Frobenius 态射以及固定点代数完全决定.

第三章，我们关注 n- 平凡扩张代数和重复代数的自同构问题. 在这一章中，我们给出了 n- 平凡扩张代数的代数自同构的整体结构，导出了 n- 平凡扩张代数的可逆元的特征及内自同构的具体形式；另外，我们还对重复代数的刚自同构和范畴自同构的结构以及其同构群的特征进行整理和叙述.

第四章，我们研究单点扩张代数的代数自同构群，单点扩张代数中可逆元的特征以及由此得到的内自同构的具体形式.

关键词：对偶扩张；平凡扩张；单点扩张；自同构.

Abstract

Algebra extension is a process of forming a kind of new algebra got according to certain rule from a known algebra, algebra extension and relevant nature of extension algebra have been the basic problem in the study of algebra . Our main research antithesis of academic dissertation is the automorphism of three extension algebras,they are the dual extension algebra , the trivial extension algebra and the one-point extension algebra. Among them, the dual extensions algebra is a new algebra expansed by the tensor of an algebra A and the anti-algebra of A;the trivial extension algebra is the extension algebra come from the half-direct product of an algebra A and $D(A) = \mathrm{Hom}(A, k)$; the one-point extension algebra is expanded by an algebra A and close field k through an A-mould M. This academic dissertation is divided into four chapters altogether.

Chapter one, we carry on the introduction to the research direction and the trends of the development related to thesis , and sum up the groundwork of this text.

Chapter two, we study the quiver automorphism,Frobenius morphism and the fixed point algbra of the dual extension algebra.In section one, we prove that the quiver automorphism of the dual extensions algebra $\mathcal{D}(A)$ which is expanded by an algebra A is decided by the quiver automorphism of A. The concept of Frobenius morphism is put forward while studying the algebra group and the theory of represent of the algebra group . Frobenius has played an important role when we discuss the reasonable structure of the algebra group, contact the finite group of Lie type and corresponding algebra group , etc [8].The kernel of Frobenius morphism shows a key status in the theory of reasonable represent of the algebra group. Frobenius torsion function play a key role in dealing with Steinberg theorem, Lusztig suggestion[9].In section two and section three, we also prove the Frobenius morphism and the fixed point algbra of the dual extensions algebra $\mathcal{D}(A)$ which is expanded by an algebra A is decided by the Frobenius morphism and the fixed point algbra of A,respectively.

Chapter three, we pay close attention to the automorphism of n-trivial extension algbra and the repetitive algebra. Among this chapter , we give the whole structure of the algebra automorphism of n-trivial extension algbra, induce the characteristic of the units of n-trivial extension algbra and the concrete structure of the inner automorphism of n-trivial extension algbra; In addition,we make up the structure of rigid automorpism and category automorpism of the repetitive algebra .

Chapter four ,we study the algebra automorphism group of the one-point extension algebra, the characteristic of the units and the inner automorphism of the one-point extension algebra.

Key word:dual extension ;trivial extension;one-point extension;automorphism.

第一章 引言

代数是处理问题时非常有用之抽象工具，也是现代数学的基础语言之一．它主要是使用公理化的方法来研究数学问题，并有效的推导数学理论．它处理的对象是抽象的集合，这些集合中的元素可以是传统的数系，矩阵，函数或是几何量等．

代数学研究的一种方法是从一个已知的代数按照一定的规则构造出一类新的代数，从而利用已知的代数以及规则的特点去研究这类新的代数及相关性质．从一个代数按照一定规则构造出一类新的代数的过程称为代数扩张．扩张的法则很多，例如代数的张量，直和，直积，半直积等等．

本文总假设代数 A 是闭域 k 上有限维结合代数．根据著名的 Gabrial 定理，基的有限维代数同构于箭图 Q 的路代数 kQ 的商代数 kQ/I, 其中 I 是 kQ 的理想．

代数的扩张和扩张代数的相关性质是代数学研究的基本问题．本文我们主要研究对偶扩张，平凡扩张，单点扩张代数的自同构问题．其中，对偶扩张代数是一个代数与其反代数的张量得到的一类扩张代数; 平凡扩张代数是代数 A 与 $D(A) = \mathrm{Hom}(A, k)$ 的半直积得到的一类扩张代数；单点扩张是代数 A 与闭域 k 通过一个 $A-$ 模 M 的扩张代数．

本章，我们对于有关研究方向的发展动态以及文章的框架做简明的阐述．

受到 Cline,Parshall 和 Scott[1] 引导的遗传代数的启发，1994 年惠昌常引进了对偶扩张代数 [2] 的概念，他证明了：如果代数 B 的箭图不含有向圈 $(crientedcycle)$, 则 B 的对偶扩张代数 $\mathcal{D}(A)$ 是 BGG- 代数．同年，邓邦明和惠昌常对对偶扩张拟遗传代数作了系统的研究，在 [3] 和 [4] 中介绍了对偶扩张代数的一些很好的性质．惠昌常在 [5] 中证明了：一个有限维代数的对偶扩张代数的整体维数是这个有限维代数的整体维数的两倍．近年，杜先能在对偶扩张代数上先后进行了一些理论的研究，[6] 讨论了对偶扩张代数的倾斜理论，尤其讨论了一个给定的代数与它的对偶扩张代数倾斜模之间的关系；[7] 讨论了代数 A 的对偶扩张代数 R 的 shod 子范畴； $A-$ 模范畴 $\mathcal{D}$ 的倾斜对象与 $R-$ 模范畴 $\overline{\mathcal{D}}$ 的倾斜对象之间的关系以及 R 的

反变有限的子范畴.

本文的第二章, 我们研究对偶扩张代数的图自同构，Frobeniu 态射和固定点代数. 在箭图自同构的基础上，我们自然地定义了带关系箭图的自同构，定理 2.1.3 证明了带关系箭图 $\mathcal{D}(A)$ 的自同构由带关系箭图 A 的自同构决定.

源于 Galois 理论， Frobenius 映射的概念在研究代数群及其表示理论时提出. 在讨论代数群的有理结构，联系 Lie 型有限群与对应的代数群等方面， Frobenius 映射起了重要作用 [8]. Frobenius 映射的核在代数群的有理表示理论中具有关键地位. 在处理 Steinberg 定理， Lusztig 猜想等问题中， Frobenius 扭函子起了核心作用 [9].

最近，Deng-Du[10] 将 Frobenius 映射思想结合于折叠图 (folding graph) 的思想，建立了 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上代数 A 的表示理论和 $\mathbb{F}_q$ 上 - 固定点代数 A^F 的表示理论的关系，这里 $\mathbb{F}_q$ 是 q 元有限域， $\overline{\mathbb{F}}_q$ 是其代数闭包， F 是 A 的 Frobenius 映射. 特别地，对于箭图的路代数和图自同构，他们自然导出了 Frobeniu 态射，进而建立了 $\overline{\mathbb{F}}_q$ 上代数 A 和 $\mathbb{F}_q$ 上代数 A^F 的不可分解模，几乎可裂序列， Auslander-Reiten 箭图的关系，并对于有限域的有限维遗传代数建立了部分 Kac 定理.

按照文 [10] 的方法，带关系的箭图的自同构自然导出代数的 Frobenius 态射，再根据定理 2.1.3 的结论, 我们在定理 2.2.2 中证明了 $\mathcal{D}(A)$ 的 Frobenius 态射由 A 的 Frobenius 态射完全决定. 进一步，定理 2.3.1 证明代数 A 的对偶扩张代数 $\mathcal{D}(A)$ 的固定点代数同构于相应的代数 A 的固定点代数的与 A^{op} 的固定点代数的张量积; 作为一种特殊情况，当 Q 为单的箭图时 (即从一个顶点到另一个顶点最多只有一条箭) 时，代数 $\mathcal{D}(A)$ 的固定点代数同构于代数 A 的固定点代数的对偶扩张代数.

第二章的结果已整理成文《对偶扩张代数的 Frobenius 态射和固定点代数》，将发表在《数学学报》上.

对称代数具有很好的性质, 所以一直是人们所关注的一类重要代数. 作为一类特殊的对称代数，平凡扩张代数也是近年来研究的热门问题；重复代数是在上世纪 80 年代由 Hughes-Waschbuesch[11] 引入的，当时主要关注的是获得有限表示自入射代数的分类. 但是由于平凡扩张代数同构于 $\widehat{A}/(\nu)$, 其中 $\widehat{A}$ 表示代数 A 的重复代数， ν 为 A 的 Nakayama 自同构，所以人们常常把平凡扩张代数和重复代数

放在一起研究.

在研究平凡扩张代数和重复代数的同时，人们自然会想到另一类可以表示为 $\widehat{A}/(\nu^n)$ 的代数，这就是杜先能在 [12] 中引入的一类自入射代数

$$R_A^n=\{\begin{pmatrix} a_1 & \varphi_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & \varphi_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n & \varphi_n \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 \end{pmatrix} | a_i\in A, \varphi_i\in D(A), 1\leq i\leq n\}$$

运算与重复代数相同. 易知 R_A^1 就是平凡扩张代数，且 $R_A^n=\widehat{A}/(\nu^n)$. 我们称之为 $n-$ 平凡扩张代数.

本文的第三章，我们讨论 $n-$ 平凡扩张代数和重复代数的自同构. 第一节，我们介绍平凡扩张代数，重复代数，$n-$ 平凡扩张代数的概念以及三者的关系. 第二节，我们关注的主要是 R_A^n 的代数自同构群，定理 3.2.1 和推论 3.2.3 给出了 R_A^n 的代数自同构的整体结构；作为附加结果，定理 3.2.4 指出了 R_A^n 中可逆元的特征，推论 3.2.5 得到 R_A^n 的内自同构的具体形式. 第三节，我们归纳了 [13] 以及 [14],[15] 中关于重复代数的自同构的相关结论.

单点扩张代数也是一类非常特殊的扩张代数. 从带关系的箭图的观点看，单点扩张代数就是在已知代数的箭图上增加了一个点，从这个点出发的一些箭，以及一些关系. 从矩阵代数的观点看，单点扩张代数就是形如 $\begin{pmatrix} A & M \\ 0 & k \end{pmatrix}$ 的矩阵，其中 A 是已知代数且 M 是一个左 $A-$ 模. 一个有限维代数的单点扩张代数也是有限维的. [16] 指出一个有限维代数是一个单点扩张代数当且仅当存在一个单的内射模. 许多代数，如树代数，上三角阵代数，直向代数都可通过有限次单点扩张过程得到，所以对单点扩张代数的研究是非常必要的. 本文的第四章，我们讨论单点扩张代数的自同构. 定理 4.1.2 和推论 4.1.3 给出单点扩张代数的代数自同构群的结构，定理 4.1.4 和推论 4.1.5 分别指出单点扩张代数中可逆元的特征和单点扩张代数的内自同构的具体形式.

第二章 对偶扩张代数的箭图自同构和固定点代数

第一节 对偶扩张代数的带关系的箭图自同构

设 k 是一个数域. 设 $Q=(Q_0,Q_1)$ 是有向箭图, 其中 Q_0 是顶点的集合, Q_1 是箭的集合. 对任意 $\alpha\in Q_1$, 记 $s(\alpha)$ 为 α 的起点, $t(\alpha)$ 是 α 的终点. 本文总设箭图是有限的, 即 $|Q_0|<\infty, |Q_1|<\infty$. 在箭图 Q 中, 一条从顶点 x 到顶点 y 的长度为 l 的路形如 $(x|\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l|y)$, 这里 $\alpha_i\in Q_1$, $1\le i\le l$, 且 $t(\alpha_1)=s(\alpha_{i+1})$, $1\le i\le l-1$. 对每个顶点 x, 我们定义从 x 到自身的长度为 0 的路, 记 $e_x=(x|x)$. 对数域 k, 记 kQ 为箭图 Q 的路代数, 它以 Q 的非零路作为 k- 空间的基, 基的乘法定义为

$$\rho_1\circ\rho_2=\begin{cases}\rho_1\rho_2 & \text{如果} t(\rho_1)=s(\rho_2)\\ 0 & \text{否则.}\end{cases}$$

而 kQ 的乘法由基的乘法扩张而成. 箭图 Q 的一个关系是若干具有相同起点和终点的路的 k- 线性组合. 设 $\{\rho_i \mid i\in\Lambda\}$ 是 Q 的一些关系的集合, I 是由 $\{\rho_i \mid i\in\Lambda\}$ 生成的理想. 我们称代数 A 由箭图 Q 和关系 I 所决定, 如果 A 同构于 kQ/I. 著名的 Gabriel 定理指出: 任意基的代数都由箭图和关系所决定.

设代数 A 是由箭图 Q 和关系 $I=\langle\rho_i \mid i\in\Lambda\rangle$ 所决定, 我们定义新的箭图 $Q'=(Q_0',Q_1')$, 其中 $Q_0'=Q_0$, $Q_1'=\{\alpha':i\to j \mid \text{如果}\alpha:j\to i\in Q_1\}$. 设 $\rho=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_l)$ 是 Q 的路, 记 ρ' 是 Q' 中的路 $(\alpha_l',\cdots,\alpha_2',\alpha_1')$. 在 Q' 定义关系 $I'=\langle\rho' \mid \rho\in\Lambda\rangle$. 根据 [3], 代数 A 的对偶扩张代数 $\mathcal{D}(A)$ 由箭图 $Q^*=(Q_0,Q_1\bigcup Q_1')$ 和关系 $I^*=\langle\{\rho_i|i\in\Lambda\}\bigcup\{\rho_i'|i\in\Lambda\}\bigcup\{\alpha\beta'|\alpha,\beta\in Q_1\}\rangle$ 所决定.

命题 2.1.1 [3] (1) A 是 $\mathcal{D}(A)$ 的子代数, 且与 $\mathcal{D}(A)$ 有相同的最大半单子代数 S, 同时 A 是 $\mathcal{D}(A)$ 的商代数, $A\cong\mathcal{D}(A)/\langle\alpha'|\alpha\in Q_1\rangle$,$A^{op}$ 是 $\mathcal{D}(A)$ 的子代数且与 $\mathcal{D}(A)$ 有相同的最大半单子代数 S, 同时, A^{op} 也是 $\mathcal{D}(A)$ 的商代数, $A^{op}\cong\mathcal{D}(A)/\langle\alpha|\alpha\in Q_1\rangle$;

(2) 作为左 A^{op} 右 A 模, $\mathcal{D}(A)\cong A^{op}\otimes_S A$;

(3) A 是有限维代数当且仅当 $\mathcal{D}(A)$ 是有限维代数. □

下面的定义是箭图自同构定义 [17] 的推广.

定义 2.1.2 设 (Q,I) 是一个带关系 I 的箭图，我们称 σ 是带关系的箭图 (Q,I) 的自同构，如果

(1) σ 是 Q 的顶点的置换，且对于任意的 $\alpha \in Q_1$ 都有 $\sigma(s(\alpha)) = s(\sigma(\alpha)), \sigma(t(\alpha)) = t(\sigma(\alpha))$;

(2) $\sigma(I) = I$.

带关系的箭图 (Q,I) 自同构 σ 称为可允许的，如果在 Q_0 的同一个 σ 轨道的顶点之间没有箭相连．这时也称 (Q,I,σ) 为可允许的带关系的箭图.

注 当箭图 Q 没有带关系时，定义即为文 [17] 中的图自同构.

本节的主要结论是

定理 2.1.3 设 φ 是带关系的箭图 (Q^*,I^*) 的自同构，则 $\varphi = (\delta,\sigma)$, 其中 δ 是带关系的箭图 (Q',I') 的自同构， σ 是带关系的箭图 (Q,I) 的自同构，且对任意的 $i \in Q_0$, $\delta(i) = \sigma(i)$. 特别地，当 Q 为单的箭图时， $\delta = \sigma^{op}$, 这里 $\sigma^{op}(\alpha') = \sigma(\alpha)'$.

为证明定理，首先给出一些符号约定．设 $v \neq w \in Q_0$, 记 $Q(v,w)$ 表示 Q 中从顶点 v 到顶点 w 的箭的集合， $|Q(v,w)|$ 表示 Q 中从 v 到 w 的箭的个数. 显然有 $Q^*(v,w) = Q(v.w)\bigcup Q'(v,w)$, $|Q^*(v,w)| = |Q(v,w)| + |Q'(v,w)| = |Q(v.w)| + |Q(w,v)| = |Q^*(w,v)|$. 记 $Q^\times(v,w)$ 表示 Q 中顶点 v 与顶点 w 之间的所有箭的集合，即 $Q^\times(v,w) = Q(v,w)\bigcup Q(w,v)$. 显然有 $|Q^\times(v,w)| = |Q^\times(w,v)|$, $|Q'^\times(v,w)| = |Q^\times(v,w)|$, $|Q^{*\times}(v,w)| = 2|Q^*(v,w)|$.

引理 2.1.4 设 φ 是带关系的箭图 (Q^*,I^*) 自同构,

(1) 若存在 $\alpha' \in Q'_1$ 使得 $\varphi(\alpha') \in Q_1$, 则必存在 $\beta \in Q_1$, 使得 $\varphi(\beta) \in Q'_1$;

(1) 若存在 $\alpha \in Q_1$ 使得 $\varphi(\alpha) \in Q'_1$, 则必存在 $\beta' \in Q'_1$, 使得 $\varphi(\beta') \in Q_1$.

证明: 对于 $v \in Q_0$, 记 $\varphi(v) = v^\varphi$. 设 $\alpha' \in Q'(v,w)$, 则 $\varphi(\alpha') = \varphi(v\alpha' w) = v^\varphi \varphi(\alpha') w^\varphi$. 因为 $\varphi(\alpha') \in Q_1$, 所以 $\varphi(\alpha') \in Q(v^\varphi, w^\varphi)$. 又因为 $\varphi(\alpha'\alpha) = \varphi(\alpha')\varphi(\alpha)$, 由定义 $\alpha'\alpha$ 是 Q^* 中从 v 到 v 的一条非零路，且 φ 是带关系的图自同构，所以 $\varphi(\alpha')\varphi(\alpha)$ 是 Q^* 中从 v^φ 到 v^φ 的一条非零路，所以 $\varphi(\alpha) \in Q(w^\varphi, v^\varphi)$. 此时假设 $\varphi(Q^\times(v,w)) \subseteq Q^\times(v^\varphi, w^\varphi)$, 则 $|Q^\times(v^\varphi, w^\varphi)| \geq |Q^\times(v,w)| + 1 > |Q^\times(v,w)|$. 故有

$|Q^{*\times}(v^\varphi, w^\varphi)| = 2|Q^\times(v^\varphi, w^\varphi)| > 2|Q^\times(v,w)| = |Q^{*\times}(v,w)|$. 这与 φ 是带关系的箭图自同构矛盾. 故存在 $\beta \in Q^\times(v,w)$, 使得 $\varphi(\beta) \in Q'^\times(v^\varphi, w^\varphi)$, 即存在 $\beta \in Q_1$, 使得 $\varphi(\beta) \in Q'_1$. 这就证明了 (1). 对偶地，可以证明 (2). □

引理 2.1.5 设 φ 是带关系的箭图 (Q^*, I^*) 的自同构，则 $\varphi(Q_1) = Q_1$ 且 $\varphi(Q'_1) = Q'_1$.

证明: 先证 $\varphi(Q'_1) \subseteq Q'_1$. 反证法. 假设存在 $\alpha' \in Q'(v,w)$, 使得 $\varphi(\alpha') \in Q_1$. 由引理 1, 存在 $\beta \in Q^\times(v,w)$, 使得 $\varphi(\beta) \in Q'^\times(v^\varphi, w^\varphi)$.

若 $\beta \in Q(w,v)$, 则 $\varphi(\beta) = \varphi(w\beta v) \in Q'(w^\varphi, v^\varphi)$. 由对偶扩张代数的定义 $\alpha'\beta \neq 0$, 故 $0 \neq \varphi(\alpha'\beta) = \varphi(\alpha')\varphi(\beta)$. 但是 $\varphi(\alpha') \in Q_1$, $\varphi(\beta) \in Q'$, 这与对偶扩张代数的定义矛盾. 所以 $\beta \notin Q(w,v)$.

若 $\beta \in Q(v,w)$, 则 $\varphi(\beta) = \varphi(v\beta w) \in Q'(v^\varphi, w^\varphi)$. 由对偶扩张代数的定义知 $\beta'\beta \neq 0$. 所以 $0 \neq \varphi(\beta'\beta) = \varphi(\beta')\varphi(\beta)$. 仍由对偶扩张定义知 $\varphi(\beta') \in Q'(w^\varphi, v^\varphi)$. 根据引理 1 的证明过程知 $\varphi(\alpha) \in Q(w^\varphi, v^\varphi)$. 因为 $0 \neq \varphi(\beta)\varphi(\alpha) = \varphi(\beta\alpha)$, 所以 $\beta\alpha \neq 0$. 进一步有 $\alpha'\beta' \neq 0$. 所以 $0 \neq \varphi(\alpha'\beta') = \varphi(\alpha')\varphi(\beta')$. 但是 $\varphi(\alpha') \in Q_1, \varphi(\beta') \in Q'_1$, 与对偶扩张代数的定义矛盾. 所以 $\beta \notin Q(v,w)$.

这样就证明了 $\varphi(Q'_1) \subseteq Q'_1$. 由引理 2.1.4 知 $\varphi(Q_1) \cap Q'_1 \neq \emptyset$ 当且仅当 $\varphi(Q'_1) \cap Q_1 \neq \emptyset$, 故有 $\varphi(Q_1) \subseteq Q_1$. 因为 φ 是带关系的箭图自同构, 所以 $\varphi(Q_1) = Q_1$ 且 $\varphi(Q'_1) = Q'_1$.
□

定理 2.1.3 的证明: 由引理 2.1.5 知 $\varphi(Q_1) = Q_1$, $\varphi(Q'_1) = Q'_1$. 又因为 φ 是带关系的箭图 (Q^*, I^*) 的自同构. 令 δ 是 φ 在 (Q', I') 上的限制， σ 是 φ 在 (Q, I) 上的限制，则 $\varphi = (\delta, \sigma)$, 且 δ 是带关系的箭图 (Q', I) 的自同构， σ 是带关系的箭图 (Q, I) 的自同构. 显然，对于任意 $i \in Q_0$, 均有 $\delta(i) = \sigma(i)$. 当 Q 为单的箭图时，由 $\delta(i) = \sigma(i)$ 导出 $\delta = \sigma^{op}$. □

第二节 对偶扩张代数的 Frobenius 态射

首先回忆 Frobenius 态射的定义. 设 $\mathbb{F}_q$ 是 q 个元素的有限域， $k = \overline{\mathbb{F}}_q$ 是 $\mathbb{F}_q$ 的代数闭包.

定义 2.2.1 [10] (1) 设 V 是一个 k- 线性空间, $\mathbb{F}_q$- 线性同构 $F: V \to V$ 称为 V 的 Frobenius 态射，如果满足

(a). 对任意的 $v \in V, \lambda \in k$ 有 $F(\lambda v) = \lambda^q F(v)$;

(b). 对任意的 $v \in V$, 存在自然数 $n > 0$, 使得 $F^n(v) = v$.

(2) 设 A 是有单位元 1 的 k- 代数. 映射 $F_A : A \to A$ 称为 A 的 Frobenius 态射, 如果 F_A 是 A 作为 k- 空间的 Frobenius 态射且 F 是保持单位元的 $\mathbb{F}_q$- 代数同构.

设 A 是由箭图 Q 和关系 I 所决定的代数，显然 $1 = \sum_{i\in Q_0} e_i$, 这里 e_i 是顶点 i 所对应的幂等元. 设 σ 是带关系的箭图 (Q, I) 的可允许自同构，因为 $\sigma(I) = I$, 故 σ 诱导出代数 A 的 Frobenius 态射

$$F_{Q,\sigma} : A \to A$$

$$\textstyle\sum_s x_s\rho_s \mapsto \sum_s x_s^q \sigma(\rho_s),$$

其中 $\sum_s x_s\rho_s$ 是路 ρ_s 的 k- 线性组合. 若 $\rho_s = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_t$, $\alpha_i \in Q_1$, $1 \le i \le t$, 则 $\sigma(\rho_s) = \sigma(\alpha_1)\sigma(\alpha_2)\cdots\sigma(\alpha_t)$.

同理, A^{op} 由箭图 Q' 和关系 I' 所决定，带关系的箭图 (Q', I') 的自同构 δ 也诱导代数 A^{op} 的 Frobenius 态射 $F_{Q',\delta}$.

定理 2.2.2 设 $\varphi = (\delta, \sigma)$ 是带关系的箭图 (Q^*, I^*) 的可允许自同构. $F_{Q,\sigma}$, $F_{Q',\delta}$ 的定义如上. 则 $F_{Q',\delta} \otimes_k F_{Q,\sigma}$ 是 A 的对偶扩张代数 $\mathcal{D}(A)$ 的 Frobenius 态射且 $F_{Q',\delta} \otimes_k F_{Q,\sigma} = F_{Q^*,\varphi}$.

证明: 因为 $\mathcal{D}(A) = A^{op} \otimes_S A$. 显然 $F_{Q',\delta} \otimes_k F_{Q,\sigma}$ 为 $\mathcal{D}(A)$ 的 $\mathbb{F}_q$ 代数同构. 对于任意 $\lambda \in k$, $\sum_{i=1}^n a_i p_i' \otimes_S q_i \in A^{op} \otimes A$, 其中 $a_i \in k$, p_i', q_i 分别为 Q' 和 Q 中的路, $1 \le i \le n$, 则

$$\begin{aligned}
&F_{Q',\delta} \otimes_k F_{Q,\sigma}(\lambda \sum_{i=1}^n a_i p_i' \otimes_S q_i) \\
&= F_{Q',\delta} \otimes_k F_{Q,\sigma}(\sum_{i=1}^n \lambda a_i p_i' \otimes_S q_i) \\
&= \sum_{i=1}^n F_{Q',\delta}(\lambda a_i p_i') \otimes_S F_{Q,\sigma}(q_i)
\end{aligned}$$