学校编码：10384　　　　分类号＿＿＿＿ 密级＿＿＿＿
学　　号：17020051403014　　　　UDC＿＿＿＿＿＿＿＿

厦门大学

博 士 学 位 论 文

H系统热流的整体存在性和部分正则性

Global Existence and Partial Regularity for Heat Flow of H-Systems

黄　涛

指导教师：谭　忠　教　授
专业名称：应　用　数　学
论文提交日期：2008 年 4 月
论文答辩日期：2008 年 6 月
学位授予日期：2008 年 　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿
评　　阅　　人：＿＿＿＿＿＿

2008 年 6 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　　）。

（请在以上相应括号内打"✓"）

作者签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　　日期：　　　年　月　日

目 录

Contents

摘 要

本文主要研究 H 系统热流方程弱解的整体存在性和部分正则性以及奇点的奇性分析.

H 系统方程来源于微分几何，具有悠久的历史，它和几何中许多重要的问题，例如极小曲面问题、 Plateau 问题等都有非常紧密的联系. 它和其他来源于微分几何的方程，如调和映射方程等都是变分学所关心的主要问题. 1900 年， Hilbert [50] 在世界数学家大会上提出的著名的 23 个公开问题中就有三个涉及变分问题，这充分凸显了变分方法的重要性，也使得变分学在 20 世纪迅速发展. 变分学中一系列新方法、新理论的提出使这些来源于微分几何的方程成为人们关注的焦点问题，由此也得到了许多存在性和正则性的优美结果.

本文所采用的研究方法是热流方法，该方法是 1964 年 Eells 和 Sampson [35] 在研究调和映射方程时引入的. 关于调和映射热流的研究吸引了人们的注目，并取得了丰硕的研究成果. H 系统热流方程和调和映射热流具有类似的非线性增长，这表明他们之间可能会有很多相似的性质. 但是两者存在本质的区别，调和映射热流是 Dirichlet 能量的梯度流，对 Dirichlet 能量自然的满足能量不等式，这表明解的 Dirichlet 能量是衰减的，这是得到解的全局存在性和部分正则性的关键所在. 遗憾的是， H 系统热流对 Dirichlet 能量是否具有能量不等式还是个公开问题，这正是研究 H 系统热流方程的难点所在.

关于 H 系统热流弱解的整体存在性和部分正则性已经有一些结果，在二维情形， 1990 年， O. Rey [76] 在 $\|H\|_\infty\|u_0\|_\infty < 1$ 的假设下，证明了 H 系统热流方程全局正则解的存在性. 2002 年，对一般 $u_0 \in H^1(\Omega), \chi \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$ 的初边值， Chen-Levine [24] 证明了方程直到第一次爆破时间前存在唯一正则解，在方程的解满足一个强制性假设，即满足能量不等式的假设下，她们证明了方程全局弱解的存在性，这个全局解除去有限个点外是正则的，并讨论了奇点处的 bubble 现象. 对于高维情形结果还非常的少.

本文主要在以下几个方面发展了前人的结果：

(1) 在二维情形，我们去掉了 Chen-Levine [24] 中关于解满足 Dirichlet 能量不等式的假设，给出了 Dirichlet 能量的一个和时间有关的估计，用经典的脱靴方法，证明了对任意的时间， H 系统热流方程弱解存在且唯一，

并且这个弱解对任意的有限时间最多只有有限个奇点.

(2) 在二维情形的有限奇性时刻，我们证明了 bubble 现象只能产生在区域的内部．同时给出了 H 系统热流方程存在有限时刻爆破的例子，说明在某些特殊情况下，方程存在有限时刻爆破.

(3) 得到了二维情形有限时刻处奇点的精确结构，证明了有限时刻的能量等式, 表明爆破前的能量等于爆破之后弱解的能量与产生的 bubble 的能量之和．在这一点上， Chen-Levine [24] 只得到了一个不等式.

(4) 对高维 H 系统热流，当边界值 $\chi \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ 时, 在 $\|H\|_\infty \|u_0\|_\infty < 1$ 的假设下，或者在 $\|H\|_\infty \|u_0\|_\infty \leq 1$ 并且初值 u_0 具有充分小能量的假设下，我们都可以证明 H 系统热流方程存在一个全局正则解．当方程的解满足能量不等式时, 我们也证明方程存在一个全局弱解, 这个弱解除去有限个奇点外是正则的，在这些奇点处有和二维问题相似的 bubble 现象 (集中现象), 并且在每个奇点上只有有限个 bubble.

全文共分四章.

第一章介绍了 H 系统方程和 H 系统热流来源和背景.

第二章介绍了相关的定义和性质.

第三章研究了二维 H 系统热流弱解的整体存在性和部分正则性．在分析能量集中的过程中, 我们所采用了 Lin-Wang [59] 在研究调和映射热流时所采用的方法，通过构造方程的 P.S. 序列来分析能量集中的过程.

第四章研究了高维 H 系统热流解的整体存在性和部分正则性.

关键词： H 系统热流，整体存在性，部分正则性，奇点结构分析

Abstract

In this paper, we are concerned with the global existence and partial regularity of weak solution to the heat flow of H-systems and the structure of singularities (bubbles).

The H-system equations come from the Differential Geometry and have a long history. It is related to minimal surface problem, Plateau problem and constant mean curvature problem and so on. This problem and the other problems came from Differential Geometry, such as harmonic maps, are mainly considered in Variational Method. There are three problems related to Variational Method in Hilbert's famous 23 problems. This indicated the importance of Variational Method and made it developed faster in 20 century. The discovery of new principles in Variational Method also made faster developments in Partial Differential Equation related to Differential Geometry.

The method we used in our paper is heat flow method. This method is introduced by Eells and Sampson [35] in 1964 when they studied harmonic maps. The nonlinear term which occurs in our case is of the same order as the nonlinear term which occurs in the case of harmonic heat flows. This suggests that we can get similar results for them. However, they are quite different. The harmonic map heat flow is the gradient flow of the Dirichlet energy, which naturally satisfies the energy inequality. This is the key estimate for global existence and partial regularity. Unfortunately, it is still open whether smooth solutions to heat flow of H-systems satisfy the energy inequality property. This is the main difficulty in our study.

There are some results on the global existence and partial regularity of weak solution to the heat flow of H-systems. In two-dimensional case, in 1990, O. Rey

[76] has proved the existence of global regular solution to the equations with the assumption $\|H\|_\infty \|u_0\|_\infty < 1$. In 2002, Chen-Levine [24] have shown the existence of a unique, regular solution to the equations up until the first singular time for a general initial and boundary data $u_0 \in H^1(\Omega)$, $\chi \in H^{\frac{3}{2}}(\partial\Omega)$. In addition, assuming that the solution satisfies the energy inequality, they can get the existence of a global regular solution with exception of at most finite many singularities and discuss the bubble phenomenon of the singularities. There are only few results on in higher-dimensional case to our knowledge.

We extend the former results in the following respects:

(1) In two-dimensional case, we get rid of the extra assumption on Dirichlet energy inequality in Chen-Levine [24] and prove some kind of Dirichlet energy estimate related to time for the solutions. Then using the classic boot-strap method, we prove that there is a unique weak solution to the heat flow of H-systems for any finite time. This weak solution is smooth except for finite singular points for any finite time.

(2) In two-dimensional case, for any finite singular time, we prove that all bubbles can only occur in the interior of the domain. We also give an example of finite time blowup. This is to say that there is finite time blowup for the solution to the equations in some special case.

(3) In two-dimensional case, we obtain the exact profiles for these singular points at finite time. We prove the energy identity at any finite singular time. That is to say the energy before the blowup equals to the energy of the weak solution and the bubbles after the blowup. In Chen-Levine [24], they have only got an inequality about that.

(4) In higher-dimensional, when the boundary date $\chi \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, under the assumption of $\|H\|_\infty \|u_0\|_\infty < 1$, or under the assumption of $\|H\|_\infty \|u_0\|_\infty \leq 1$ and the energy of u_0 is small enough, we can prove global existence of unique regular solution to the equations. Under the assumption of the energy inequality, we can also prove the global existence of weak solution to the equations. This solution is regular except for finite singular times. At any singular time, we find the concentration phenomenon (bubble) as in two-dimensional case and there are only finite bubbles at every singular point.

This paper is organized as follows:

In Chapter I, we introduce the background of H-systems and heat flow of H-systems. We also briefly introduce the history of the harmonic heat flows.

In Chapter II, we collect some related definitions and properties.

In Chapter III, we consider the global existence and partial regularity of the weak solution to the heat flow of H-systems in two-dimensional. The method we used in analysis of concentration of energy has been used in Lin-Wang [59]. We find the P.S. sequences of the heat flow of H-systems and use the P.S. sequences to blow up bubbles.

In Chapter IV, we consider the global existence and partial regularity of the weak solution to the heat flow of H-systems in higher-dimensional.

Keywords: heat flow of H-systems, global existence, partial regularity, structure analysis of bubbles (singularities)

第一章 引 言

§1.1 H 系统的背景

变分方法就是由目标集合中寻找最佳元素的方法, 它具有非常悠久的历史, 量子力学、物理等自然科学领域, 机械工程领域, 经济等社会科学领域中的很多定律都符合变分学定律. 从 Newton 、Leibnitz 、Euler 、Lagrange 和 Dirichlet 时代开始, 人们就试图在特定的空间 X 中寻找某个函数或者泛函 E 的极大或者极小值, 问题最终转化为求解 Euler-Lagrange 方程 $E'(x)=0$ 的问题. 但是 Euler-Lagrange 方程只是取得极大或者极小值的必要条件, 并且只有少数的 Euler-Lagrange 方程可以显式的解出, 这限制了这种方法的应用. Dirichlet 在研究保型映射时, 引入了 Dirichlet 原理, 即先找到 E 在 X 中的极小化序列 $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$, 使得当 $k\to\infty$ 时

$$E(x_k)\to\inf\{E(x):x\in X\},$$

如果可以证明在某种意义下当 $k\to\infty$ 时, $x_k\to x_0\in X$, 并且 $E(x_k)\to E(x_0)$, 那么 x_0 就是 Euler-Lagrange 方程的解. Hilbert 将 Dirichlet 原理应用于微分方程中 Dirichlet 问题存在性的证明, 给出了 Dirichlet 问题存在性的一种证明方法. 1900 年, Hilbert [50] 在世界数学家大会上提出的著名的 23 个公开问题中就有三个涉及变分问题.

进入 20 世纪后,变分学取得了更加长足的进步. 1929 年 Ljusternik 和 Schnirelman [63] [64] 在任意亏格为零的紧致曲面上证明了三条不同测地线的存在性, 从此人们在寻找最佳元素时, 不再只考虑积分泛函的极小值, 而考虑它们的全部的临界点, 他们的方法叫做的全局变分方法. 1934 年, Morse[66] 继续发展了这种全局变分方法, 给出了积分泛函临界点的个数和空间的拓扑之间的联系. 60 年代, Palais 和 Smale [70] [79] 给出了 P.S. 序列的概念, 证明积分泛函的 PS 序列也收敛到它的最小值. Ekeland citeEkeland 在 70 年代发展了 Ekeland 变分方法, 给出具有比较好性质的极小序列. 另外还有构造临界值的极大极小方法, 包括山路引理、 Z_2 指标理论、联结理论等一系列的新发展.

70 年代, Nirenberg 等人将临界点理论应用于非线性偏微分方程解存在性的证明, 得到了一系列重要的结果, 从此, 变分方法作为偏微分方程的重要工具, 被广泛的应用于偏微分方程的各个领域. 偏微分方程中的一大类由微分几何给出的, 例如调和映射热流问题、 Yamabe 问题等, 这些问题历来都是数学家们关注的焦点, 变分方法也是解决这些问题的有力工具.

本文主要应用变分方法研究 H 系统问题，这个问题也来源于微分几何，是指对任意具有光滑边界的有界开集 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, 映射 $u: \Omega \to \mathbb{R}^{n+1}$ 满足,

$$\Delta_n u = \sqrt{n^n} H(u) u_{x_1} \wedge \cdots \wedge u_{x_n}, \tag{1.1.1}$$

其中 $\Delta_n u = \mathrm{div}(|\nabla u|^{n-2} \nabla u)$, $\Delta_2 u = \Delta u$,

$$\mathbf{a}_1 \wedge \cdots \wedge \mathbf{a}_n = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \cdots & \mathbf{e}_{n+1} \\ a_1^1 & \cdots & a_1^{n+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^{n+1} \end{vmatrix},$$

其中 $\mathbf{a}_1 = (a_1^1, \cdots, a_1^{n+1})$, $\cdots \mathbf{a}_n = (a_n^1, \cdots, a_n^{n+1})$, $\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_{n+1}$ 是 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的单位坐标向量.

u 叫做保形不变的，如果在 Ω 上对某个实值函数 λ 满足

$$u_{x_i} \cdot u_{x_j} = \lambda^2(x) \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \cdots, n+1.$$

此时 u 表示 $\mathbb{R}^{n+1}$ 在 $u(x)$ 点的平均曲率为 $H(u)$ 的曲面.

关于 H 系统的研究具有非常悠久的历史，人们最早考虑的是如下问题：

• 在 $\mathbb{R}^2$ 中对实值光滑函数 κ, 寻找一个闭曲线 $\mathcal{C}$, 使得 $\mathcal{C}$ 在任意 p 点的曲率正好是 $\kappa(p)$.

• 二维 Plateau 问题，即给定的 $\mathbb{R}^2$ 中两个点 a, b 以及光滑函数 κ, 寻找一个曲线 $\mathcal{C}$, 使得 $\partial\mathcal{C} = \{a, b\}$, 且 $\mathcal{C}$ 在任意 p 点的曲率正好是 $\kappa(p)$.

另外，当 $n = 2$ 时，人们还考虑了很多和 H 系统相关的微分几何问题：

(1) 极小曲面问题：对任意的由某个映射 $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$ 参数化的表示的 2 维正则曲面 M, 定义面积泛函为

$$A(u) = \int_\Omega |u_x \wedge u_y|,$$

对所有的 M, $A(u)$ 是否存在最小值，即对任意的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^3)$, 是否存在 u 满足

$$\frac{dA}{ds}(u + s\varphi)|_{s=0} = 0.$$

(2) 标准等周问题：给定无边界的二维紧致正则曲面 M, M 可由某个保形不变的映射 $u: \Omega \to \mathbb{R}^3$ 参数化的表示， $V(M)$ 表示 M 所围成的体积，那么对任意的 λ, 是否存在一个 M, 使得 $V(M) = \lambda$, 并且 M 的面积最小.

(3) 给定平均曲率问题：给定一个映射 $H:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$, 是否存在一个三维曲面 M, 使得曲面在任意点 $p\in M$ 的平均曲率为 $H(p)$.

(4)Plateau 问题：令 γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Jordan 曲线, 是否存在曲面 M, 使得 M 是以 γ 为边界的所有曲面中面积最小. 这个问题可以转化为寻找 $u\in C(\overline{D},\mathbb{R}^3)\cap C^2(D,\mathbb{R}^3)$ 满足方程

$$\begin{cases}\triangle u=0, & \text{在}D\text{中},\\ |u_x|^2-|u_y|^2=0=u_x\cdot u_y, & \text{在}D\text{中},\\ u|_{\partial D}\text{为}\gamma\text{的单调参数化}.\end{cases}$$

(5) 关于 H 曲面的 Plateau 问题：令 γ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的 Jordan 曲线, 是否存在曲面 M, 使得 M 是以 γ 为边界，且 M 在任意点 p 的曲率为给定的函数 $H(p):\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$. 这个问题可以转化为寻找一个正则的 $u:D\to\mathbb{R}^3$ 满足方程

$$\begin{cases}\triangle u=2H(u)u_x\wedge u_y, & \text{在}D\text{中},\\ |u_x|^2-|u_y|^2=0=u_x\cdot u_y, & \text{在}D\text{中},\\ u|_{\partial D}\text{为}\gamma\text{的单调参数化}.\end{cases}$$

这些问题都促使人们对 H 系统方程 (1.1.1) 进行研究. 下面我们简要回顾一下其研究历史.

当 $n=2$ 时, 方程 (1.1.1) 在各种条件下解的存在性已经被广泛的研究. 当 H 为常数时， Wente(1969) [95] 和 Hildebrandt(1970) [51] 证明了方程 Dirichlet 问题解的存在性， 1988 年， Struwe [84] 证明了方程自由边界问题解的存在性. 1975 年， Wente [96] 证明了方程的解在零边值条件下是唯一的，并且给出了非连通区域解不唯一的反例. Brezis-Coron(1984) [7] 和 Struwe(1985)[81] 利用极大极小方法, 给出了方程在边界值很小的情况下另外一个解的存在性, 从而证明了方程的多解性. 对某些特殊的 $H(u)$, 在边界值很小情况下，Bethuel-Rey(1994) [6], Caldiroli-Musina(2006) [13] 同样得到多解的存在性， Caldiroli-Musina(2006) [13] 中还给出了一类非常数的 $H(u)$, 即使在边界值很小的假设下，也不存在所谓的大解. 1985 年， Brezis-Coron [8] 证明当 H 为常数时，方程的一列边界值为 γ^k 的解 $\{u^k\}_{k=1}^{\infty}$, 当

$$\|\nabla\gamma^k\|_2+\|\gamma^k\|_\infty\to 0$$

时， u^k 或者在 H^1 中强收敛到零，或者至少会有一个 H-bubble, 即 H 系统在 $\mathbb{R}^2$ 上非常数、保型不变的解. Caldiroli-Musina [13] 将这一结果推广到了 $H(u)$ 为 C^1 且有界的情形.

当 $\Omega = \mathbb{R}^2$, H 不为恒等于零的常数时， Brezis-Coron [8] 还得到如下结果：如果 $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ 是方程 (1.1.1) 的解，那么 u 具有下面的形式，

$$u(z) = \frac{1}{H}\pi\left(\frac{P(z)}{Q(z)}\right) + C,$$

其中 C 是一个 $\mathbb{R}^3$ 中的常数向量， P 和 Q 是关于 z 的多项式函数， $\pi : \mathbb{C} \to \mathbb{S}^2$ 是从北极点的球面射影，即

$$\pi(z) = \frac{2}{1 + x^2 + y^2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

最近，当 $H(u)$ 满足一定的限制条件的时候， Caldiroli-Musina(2002-2004) [9] [10] [11] [12] 也研究了这种情况下解的存在性问题.

当 $n = 2$ 时，方程 (1.1.1) 解的正则性也有很多结果. Wente [95] 证明当 H 为常数时，方程在 H^1 中的解都是光滑的. Tomi(1969) [88], Heinz(1975) [48] [49], Grüter(1984) [44], Bethuel(1993) [2], Bethuel-Ghidaglia [4](1993) [5](1994), Choné (1995) [27] 等都在类似于

$$\|H\|_\infty + \|\nabla H\|_\infty < \infty$$

的条件下，证明了方程解的光滑性. Bethuel(1993) [2], Strzelecki(2003) [86] 证明了对任意的 Lipschitz 函数 $H(u)$, 方程的解都是 $C^{2+\alpha}$ 的. 2007 年， Rivière [77] 仅在 $\|H\|_\infty < \infty$ 的假设下，利用守恒律方法证明了解的光滑性.

高维情况 ($n \geq 3$) 的结果相对较少, 1996 年, Mou-Yang [68] 给出了 H 为常数时解的存在性和多解性, 并证明了保形不变的解的正则性. 2000 年, Duzaar-Grotowski [34] 对某些限定的 $H(u)$ 给出了解的存在性. Wang(1999) [94] 和 Strzelecki (2003) [86] 在

$$\sup_{p\in\mathbb{R}^3} |H(p)| + \sup_{p\in\mathbb{R}^3}(1 + |p|)|DH(p)| < \infty$$

的假设下，证明了方程解的正则性.

§1.2 H 系统热流的研究历史和现状

本文采用的研究方法是热流方法，该方法是 1964 年 Eells 和 Sampson 在研究调和映射的时候引入的. 20 世纪 90 年代，调和映射热流的研究吸引了众多数学家投身其中，取得了丰硕的研究成果. 下面我们简要回顾一下其发展历史.

设 M, N 为任意 n, m 维的 Riemannian 流形，当 $n=2$ 时，称 $u: M \to N$ 为调和映射，如果 u 满足

$$\triangle u = A(u)(\nabla u, \nabla u), \tag{1.2.1}$$

其中 $A(u)(\nabla u, \nabla u)$ 为 N 的第二基本形式.

问题: 对给定的$u_0 \in H^1(M,N) = \{u \in H^1(M, \mathbb{R}^m), u(M) \subset N\ a.e.\}$, 是否存在$u$满足方程(1.2.1), 使得$u$同伦于$u_0$.

1964 年， Eells 和 Sampson [35] 在 M 无边假设下，在研究该问题时考虑了如下热流方程

$$\begin{cases} \partial_t u - \triangle u = A(u)(\nabla u, \nabla u), & (x,t) \in M \times (0,\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), & x \in M. \end{cases} \tag{1.2.2}$$

在 N 的截断曲率不大于零的假设下，证明了方程 (1.2.2) 全局正则解的存在性. 当 $t \to \infty$ 时， u_t 在某种意义下趋于零，就可以得到方程 (1.2.1) 的解 u_∞ 同伦于 u_0. 对一般 $m=2$ 维的流形， 1985 年， Struwe [82] 证明了方程 (1.2.2) 全局弱解的存在性，这个弱解在除去有限个点外是光滑的，且在这有限个点处产生爆破，在奇点 (x_0, T_0) 处满足，存在 $\epsilon_0 > 0$, 对任意的 $R > 0$

$$\lim_{t \uparrow T_0} E(u(t), B_R(x_0)) \geq \epsilon_0,$$

其中

$$E(u(t), B_R(x_0)) = \frac{1}{2} \int_{B_R(x_0)} |\nabla u(t)|^2.$$

对 $n > 2$ 的情形， Struwe(1988) [83], Chen-Struwe(1989) [26] 给出了全局弱解的存在性，并证明了这个弱解的奇点集具有有限的 n 维 Hausdorff 测度. 对 M 有边界的情形， Chang(1989) [14], Chen-Lin(1993) [25] 也得到了类似的结果. 另外，最近 Chang-Liu(2003-2004) [16] [17] [18] 成功的将热流方法应用到 Plateau 问题的研究，得到了类似的结果.

对于解是否能有限时刻爆破的问题， Coron-Ghidaglia(1989) [29], Ding(1990) [32], Chen-Ding(1990) [22] 分别给出了高维有限时刻爆破的例子，1992 年，Chang-Ding-Ye [15] 给出了二维有限时刻爆破的例子. 于是人们开始关心这些奇点的精确性质, Qing(1995) [74], Qing-Tian(1997) [75], Ding-Tian(1995)[33], Lin-Wang(1998)[59] 证明了弱解在爆破点处存在 Bubble 现象, 每个爆破点处有有限个 bubble 并且爆破前的所有能量等于爆破后弱解的能量与所有 bubble 的能量之和. 他们所采用的方法是