学校编码：10384　　　　分类号______ 密级______
学号：19020070153860　　　　UDC______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

分数阶热流方程，积分方程以及向列型液晶模型解的存在性及其相关问题

Existences to Fractional Heat Flow, Integral Equation and Liquid Crystal Flow and Related Topics

许 建 开

指导教师姓名：谭　忠　教授
专 业 名 称：应 用 数 学

论文提交日期：2010 年 4 月
论文答辩日期：2010 年 5 月
学位授予日期：　　年　　月

答辩委员会主席：__________
评　阅　人：__________

2010 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

目 录

Contents

中文摘要

本文讨论了三个偏微分方程组解的存在性以及解的相关性质。全文共分为三个部分。第一部分为本文的第三章，主要研究一个广义的热流方程，即：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = -\wedge^{2\alpha}\boldsymbol{u} + (\wedge^{2\alpha}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}, \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x), \\ |\boldsymbol{u}_0(x)| = 1。 \end{cases}$$

这里 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3)$ 为定义在 $\Omega \times [0, +\infty)$ 上的一个有限旋转向量，即 $|\boldsymbol{u}| = 1$。 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是周期域或全空间. 我们也用 $\wedge$ 表示 $(-\triangle)$ 的平方根算子, $0 < \alpha \leq 1$ 。$(\cdot, \ \cdot)$ 表示通常的向量内积。

当 $\alpha = 1$ 时，这系统变为了一个从 $\Omega \subset R^3$ 到 S^2 上的传输调和热流映射。实际上上面的传输调和热流方程可以推广到更一般的形式，即从紧致 Riemannian 流型 M(m维) 到紧致 Riemannian 流型 $N = S^n$ 上的一个传输热流映射[32,33]。为了区别这种经典的传输调和映射，我们把上面这个偏微分方程称为广义热流方程或分数阶热流方程. 我们证明了：如果初值 $u_0 \in H^\alpha(\mathbb{I}^n) \cap L^p(\mathbb{I}^n)$, $p > \frac{n}{\alpha}$ 则分数阶热流方程至少存在一个整体弱解。

本章的主要贡献在于我们推广了文献 [47] 中阶为 $\frac{1}{2}$ 的传输热流模型。下面我们简单介绍一下我们处理这个系统所遇到的困难和所用的技巧。

对于 $\alpha = \frac{1}{2}$ 和 $\alpha = 1$ 而言，此时 $\wedge$和 $-\triangle$ 分别是 Cauchy 半群和 Gaussian 半群的生成元，其半群的 Fourier 变化有具体的显示，因而我们容易得到其对应的惩罚方程解的 L^∞ 估计。但是对于一般的热流方程而言，$-(-\triangle)^\alpha$ 是对称 α-稳定过程的生成元[7]，其半群的 Fourier 变化不再具有显示，这里我们利用 Fourier 变化的在周期域上的性质得到了对应逼近方程的 L^∞ 估计，并证明了惩罚逼近方程的整体存在性。

第二个困难来源于非线性项的收敛问题。由于逼近解的正则性不高以及分数阶算子不满足莱布尼兹法则即 $\wedge^\alpha(f \cdot g) \neq g \cdot \wedge^\alpha f + f \cdot \wedge^\alpha g$ ，所以我们不能像经典调和热流方程那样直接利用逼近解的某种紧性去证明分数阶热流方程解的存在性。同时我们也注意到对于 $\frac{1}{2} < \alpha < 1$，文献 [47] 中的方法也是失效的。这里我们利用著名的交换子引理和方程自身的结构来克服这个困难。

第二部分是本文的第四章，在这一章中，我们主要的目标是研究下列奇异积分方程

组正解的存在性和不存在性。

$$\begin{cases} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^q(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \ , \\ v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^p(y)}{|x-y|^{n-\mu}} dy \ 。\end{cases}$$

我们证明了：当 $p \le \frac{\mu}{n-\alpha}(q \le \frac{\alpha}{n-\mu})$, 或 $q=1, 0<p<\frac{n}{n-(\alpha+\mu)}(p=1, 0<q<\frac{n}{n-(\alpha+\mu)})$ 时，上面的积分系统不存在正解。相似的，当 $q=1, \frac{n}{n-(\alpha+\mu)} \le p < \frac{n+(\alpha+\mu)}{n-(\alpha+\mu)}$ $(p=1, \frac{n}{n-(\alpha+\mu)} \le q < \frac{n+(\alpha+\mu)}{n-(\alpha+\mu)})$ 上面的积分系统在 $u \in L_{loc}^{\frac{n(p-1)}{(\alpha+\mu)}}(R^n)(v \in L_{loc}^{\frac{n(q-1)}{(\alpha+\mu)}}(R^n))$ 中不存在正解. 并且，利用 W.X.Chen, C.M.Li 和 B.Ou[79,80,82,84] 所建立的积分型的移动平面法，我们也证明了如果 $1<p,q<\infty$，$p_1 \ge 1$，$q_1 \ge 1$ 满足下列不等式

$$\frac{p-1}{p_1} + \frac{q-1}{q_1} \ge \frac{\alpha+\mu}{n},$$

$$1 \ge \frac{p}{p_1} > \frac{\mu}{n}, 1 \ge \frac{q}{q_1} > \frac{\alpha}{n}。$$

且$u \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^{q_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 是系统 (1.1) 一个正解，则 (u,v) 一定是关于 $\mathbb{R}^n$ 中的某一点是径向对称且单调递减的。

第三部分为本文的第五章，在这章中我们主要讨论了下列向列型液晶模型。

$$\begin{cases} \rho_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \\ (\rho \boldsymbol{u})_t + \operatorname{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla P = \mu \Delta \boldsymbol{u} - \lambda \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{d} \odot \nabla \boldsymbol{d}), \\ \boldsymbol{d}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{d} = \gamma(\Delta \boldsymbol{d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d})), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \end{cases}$$

上面的方程是定义在区间 $Q_T := \Omega \times (0,T)$ 上，其中 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ 是有界正则区域，$\boldsymbol{u}(x,t), \boldsymbol{d}(x,t)$ 分别表示流体的速度与液晶分子的方向，$\rho(x,t)$, $P(x,t)$ 分别表示流体密度和压强。$\boldsymbol{f}$ 是一个光滑函数。

在初始密度属于 $L^r(\Omega)$ $r > \frac{3}{2}$ 且 $\boldsymbol{f}$ 为惩罚函数的条件下，我们证明了向列型液晶模型存在整体能量弱解. 对比于 Jiang-Tan 在 [2] 中文献的结论，我们利用逼近解的能量泛函以及标准的椭圆正则性估计去掉了系统对于 $\boldsymbol{f}$ 光滑有界的要求。

关键词： 惩罚函数; 弱解; 向列型液晶模型; 积分方程组; 对称 $\alpha-$ 稳态过程.

Abstract

This dissertation which consists of three parts, is devoted to studying the existence of three partial differential equations and related properties. Part 1, which is the third chapter in this paper, studies the existence of generalized heat flow equation involving fractional Laplacian. i.e.,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial t} = - \wedge^{2\alpha} \boldsymbol{u} + (\wedge^{2\alpha}\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{u}(x,0) = \boldsymbol{u}_0(x) \\ |\boldsymbol{u}_{\mathbf{o}}(x)| = 1。 \end{cases}$$

in which $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_n) : \Omega \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ is a finite spin vector，$i.e.$，$|\boldsymbol{u}| = 1$。$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ is a period region or the whole space，$\wedge$ denotes the square root of $(-\triangle)$ and $0 < \alpha \leq 1$. $(\cdot, \ \cdot)$ represents the normal inner product。

As $\alpha = 1$，this system turns into the classical evolution problems of Harmonic maps from $\Omega \subset R^3$ into S^2，which is extended to more general harmonical map between different compact Riemannian manifolds and has been studied extensively in [32,33]。 To distinguish the classical evolution heat flow, the above system is called a generalized evolution heat flow or evolution heat flow equation involving fractional Laplacian。We show that there exist at least a weak solution to the generalized evolution heat flow，provided $u_0 \in H^\alpha(\mathbb{I}^n) \cap L^p(\mathbb{I}^n)$ with $p > \frac{n}{\alpha}$ and $\mathbb{I}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$。

The main contribution of this chapter is that we extend the evolution heat flow with $\alpha = \frac{1}{2}$ studied by Z.A.Yao in [47]，Main difficulties and techniques involved in studying our problem are as follows:

Firstly，when $\alpha = \frac{1}{2}$ or $\alpha = 1$，$\wedge$ and $-\triangle$ are respectively the infinitesimal generator of the Cauchy semigroup and Gaussian semigroup in R^n，the Fourier transform of which has concrete expression, therefore we easily obtain the L^∞-estimation of the corresponding approximated system of fractional heat flow equation. However, for general symmetric α-stable processes[7], we can't obtain the concrete expression of the Fourier transform of corresponding semigroup. Here we make use of the properties of Fourier transform in period region to obtain the L^∞-estimate of penalized equation.

Secondly, as the regularity of approximate solutions is not strong enough and the fractional operator $\wedge^\alpha$ doesn't meet the law of Leibniz $(\wedge^\alpha(f \cdot g) \neq g \cdot \wedge^\alpha f + f \cdot \wedge^\alpha g)$, this brings difficulties to the nonlinear term of the convergence. Therefore, we can't use directly the compactness of approximate solutions to show the existence of fractional Laplacian heat flow equation which is done by the classical evolution equation of harmonic map. On the other hand, we observe that the method used by Z.A.Yao in[47] is invalid to the case $\frac{1}{2} < \alpha < 1$. Here, with the help of the well-known commutator theorem and the feature of system, we overcome this difficulty.

The second part is the fourth chapter in this paper. Its main aim is to study the existence and non-existence of positive solution to a class of singular integral system

$$\begin{cases} u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{v^q(y)}{|x-y|^{n-\alpha}} dy \ , \\ v(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{u^p(y)}{|x-y|^{n-\mu}} dy \ . \end{cases}$$

we prove that as $p \le \frac{\mu}{n-\alpha} (q \le \frac{\alpha}{n-\mu})$, or $q = 1, 0 < p < \frac{n}{n-(\alpha+\mu)} (p = 1, 0 < q < \frac{n}{n-(\alpha+\mu)})$ there doesn't exist positive solutions to the above integral system and as $q = 1, \frac{n}{n-(\alpha+\mu)} \le p < \frac{n+(\alpha+\mu)}{n-(\alpha+\mu)}$ $(p = 1, \frac{n}{n-(\alpha+\mu)} \le q < \frac{n+(\alpha+\mu)}{n-(\alpha+\mu)})$ the integral system does not have any positive solution in $u \in L_{loc}^{\frac{n(p-1)}{(\alpha+\mu)}}(R^n) (v \in L_{loc}^{\frac{n(q-1)}{(\alpha+\mu)}}(R^n))$. Furthermore, With the help of moving plane increated by W.X.Chen, C.M.Li and B.Ou in [79,80,82,84], we also show that if $p_1, q_1 \ge 1$ and $1 < p, q < \infty$ satisfy

$$\frac{p-1}{p_1} + \frac{q-1}{q_1} \ge \frac{\alpha+\mu}{n},$$

$$1 \ge \frac{p}{p_1} > \frac{\mu}{n}, 1 \ge \frac{q}{q_1} > \frac{\alpha}{n}.$$

and $u \in L^{p_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$, $v \in L^{q_1}(\mathbb{R}^n) \cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ are a pair of positive solutions of the singular integral system. Then (u, v) must be radially symmetric and monotone decreasing about some point in $\mathbb{R}^n$

The final part is the fifth chapter in this paper. we consider the following simplified system modeling the flows of liquid crystal materials

$$\begin{cases} \rho_t + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u}) = 0, \\ (\rho \boldsymbol{u})_t + \mathrm{div}(\rho \boldsymbol{u} \otimes \boldsymbol{u}) + \nabla P = \mu \Delta \boldsymbol{u} - \lambda \nabla \cdot (\nabla \boldsymbol{d} \odot \nabla \boldsymbol{d}), \\ \boldsymbol{d}_t + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \boldsymbol{d} = \gamma(\Delta \boldsymbol{d} - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{d})), \\ \nabla \cdot \boldsymbol{u} = 0. \end{cases}$$

in $Q_T := \Omega \times (0, T)$ with the bounded regular domain $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Here $\boldsymbol{u}(x,t), \boldsymbol{d}(x,t)$ denote the velocity of the fluid and the orientation of the liquid crystal molecules, respectively. $\rho(x,t)$ is the density of the fluid and $P(x,t)$ is the pressure. $\boldsymbol{f}(d)$ is a smooth vector function.

With $u_0 \in L^r(\Omega)$ $r > \frac{3}{2}$, we show the global existence of finite energy weak solutions to the liquid crystal system, as $\boldsymbol{f}$ is the penalized function. In comparison with the result obtained by Jiang and Tan in [2], we remove the constrained condition that $\boldsymbol{f}$ is a bounded and smooth function with the help of the energy function to approximation solution and standards elliptic regularity estimate.

Key words: penalized function; weak solution ; integral equations; symmetric $\alpha-$ stable process.