学校编号： 10384 分类号：＿＿＿＿＿＿密级：＿＿＿＿＿＿
学　　号： 200223044 UDC:＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

厦 门 大 学
硕 士 学 位 论 文

分数阶微分方程的数值方法及误差分析
Numerical Methods and Error Analysis of Fractional Differential Equations

沈 淑 君

指导教师姓名：刘发旺 教授、博导

申请学位级别：硕 士 学 位

专 业 名 称：应 用 数 学

论文提交日期：2005 年 4 月

论文答辩日期：2005 年 5 月

学位授予单位：厦 门 大 学

学位授予日期：2005 年 5 月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

评阅人：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

2005 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　　月　　日

目　　录

Content

摘 要

分数阶计算是一门正在兴起的学科，它在很多科学领域中发挥了越来越重要的作用，特别在工程，物理，金融，水文等领域．与整数阶模型相比，分数阶模型的显著优点在于它有着深厚的物理背景．但是，由于缺乏较恰当的数学方法，对分数阶计算的理论分析和数值方法的研究还是比较困难的课题．尽管现在大量的应用科学领域已牵涉到分数阶的微分方程，非常少的文献讨论分数阶微分方程的数值方法，尤其是对分数阶偏微分方程的数值方法的探讨．

本文分别考虑了分数阶 Bagley-Torvik 方程和分数阶偏微分方程问题．第一章，先给出有关分数阶导数的一些预备知识．第二章，考虑分数阶常微分方程 —Bagley-Torvik 方程，给出其解的存在性和唯一性，导出了用格林函数表示其解析解．利用 Riemann-Liouville 和 Grünwald-Letnikov 定义之间的关系，提出了求解此方程的一种更有效的数值方法．第三章，考虑时间分数阶扩散方程，这个方程被解释为相对于慢性反常扩散现象的非 Markovian 的随机过程的一个概率密度．为解此方程，提出两个新的计算有效的显式差分格式，并给出了稳定性和收敛性的详细误差分析．第四章，考虑具有绝缘端点的空间分数阶扩散方程．提出一个新的计算有效的显式差分格式和一种新的分析技巧，给出了稳定性和收敛性的误差分析．在每一部分，都给出了数值例子，证实了所提出的数值方法的有效性，这些数值方法也适用于求解一般的分数阶微分方程．

关键词：　分数阶计算，稳定性，收敛性．

Abstract

Fractional calculation is a developing science. It plays a more and more important role in various fields of science, especially in engineering, physics, finance, and hydrology. The most significant advantage of the fractional order models in comparison with integer-order models is based on important fundamental physical considerations. However, because of the absence of appropriate mathematical methods, numerical methods and theoretical analysis of fractional calculation are very difficult tasks. At present, though a growing number of works by many authors from various fields of science and engineering deal with dynamical systems described by fractional order equations, very few papers describe the numerical methods for fractional differential equations, especially for fracitonal partial differential equations.

In this paper, we consider both the fractional ordinary differential equation and the fractional partial differential equations. In the first chapter, some related knowledge about fractional derivatives are presented. In the second chapter, the fractional-order Bagley-Torvik equation is considered. The existence and uniqueness of solution for the fractional-order Bagley-Torvik equation is given. The analytical solution of the fractional-order Bagley-Torvik equation is derived by the corresponding Green's function. Using the relationship between the Riemann-Liouville definition and the Grünwald-Letnikov definition, a computationally effective method is proposed for the fractional-order Bagley-Torvik Equation. In the third chapter, the time fractional diffusion equation is considered. The fundamental solution of the eqution is interpreted as a probability density of a self-similar non-Markovian stochastic process related to a phenomenon of slow anomalous diffusion. In order to solve this equaiton, two effective explicit finite-difference schemes are given. The detail analysis of the stability and convergence of are derived. In the fourth chapter, the space fractional diffusion equation with insulated ends is considered. An effective analysis skill and an explicit finite difference approximation for this equation are proposed. A detailed analysis of the stability and convergence of the explicit numerical method is discussed. Numerical examples are presented in every chapter, which verify the efficiency of the above numerical methods. The techniques can also be applied to deal with fracitonal order synamical systems and controllers.

Keywords: Fractional calculation, Stability, Convergence.

序 言

近几十年来，人们渐渐发现分数阶导数在很多科学领域中发挥了越来越重要的作用．特别在工程，物理，金融，水文等领域 [1,2,3,4], 分数阶导数的计算课题是一个有用的数学工具．越来越多的文献也已经论述了用分数阶方程来解决各种学科和工程中的动力系统问题．与整数阶模型相比，分数阶模型的显著优点在于它有着坚实的实用背景和物理解释 [2,5,6].

但是，人们注意到这些分数阶微分方程的解析解大多由比较特殊的函数来表示，而要解这些特殊的函数是很困难的 [7,8,9]．于是，越来越多的人对分数阶微分方程的数值方法更感兴趣.

对分数阶微分方程的数值方法的探讨是一门崭新的课题。尽管大量的应用科学领域已牵涉到分数阶的微分方程 [1,10,11,12], 非常少的文献讨论分数阶微分方程的数值方法．虽然已有一些作者提出了各种有效的数值解法，如 Diethelm 等人 [13] 提出了用分数阶 Adams 法解非线性常微分方程． Lin 和 Liu[14] 导出了用一高阶逼近来解分数阶常微分方程． Liu 等人 [15,16,17] 用行方法把分数阶偏微分方程转化为常微分方程来解决．但是，对分数阶数值方法的探讨仍是一个较难的课题 [16,17,18,19].

本文分别考虑了分数阶常微分和分数阶偏微分方程. 为了便于读者阅读，本文先给出了有关的预备知识．列出了常见的几种分数阶导数及它们之间的相互关系．这些预备知识都是阅读本文必不可少的．接着第二章，考虑分数阶 Bagley-Torvik 方程. 先给出分数阶 Bagley-Torvik 方程解的存在性和唯一性，导出了用格林函数表示分数阶 Bagley-Torvik 方程的解析解．利用 Riemann-Liouville 定义和 Grünwald-Letnikov 定义之间的关系, 提出了求解分数阶 Bagley-Torvik 方程的一种更有效的数值方法．这个方法不仅适合求解分数阶 Bagley-Torvik 方程，而且也可直接利用于求解其它类型的分数阶导数．数值例子给出

了有力的证明. 第三章, 考虑考虑时间分数阶偏微分方程问题 —- 时间分数阶扩散方程, 这个方程可被解释为相对于慢性反常扩散现象的非 Markovian 的随机过程的一个概率密度. 同时, 对此方程提出两个新的计算有效的显式差分格式, 并给出了稳定性和收敛性的详细误差分析. 数值例子也证实了我们的数值方法的有效性. 第四章, 考虑具有绝缘端点的空间分数阶扩散方程. 对此方程也提出一个新的计算有效的显式差分格式和一种新的分析技巧, 给出了稳定性和收敛性的误差分析. 最后, 也给出了数值例子来说明. 从中, 我们可看出本文中所提出的数值方法也适用于求解一般的分数阶微分方程.

第一章 预备知识

分数阶的导数有许多定义 [1,20] , 例如 Riemann-Liouville 定义, Grünwald-Letnikov 定义, Caputo 定义, Miller-Ross 定义. 为了方便起见，下面引用 Riemann-Liouville 定义, Caputo 定义和 Grünwald-Letnikov 定义.

定义 1：（ Riemann-Liouville 定义的分数阶导数） [1]：

$$
{}_tD^{\beta}f(t)=\begin{cases}\frac{d^m}{dt^m}\left[\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int\limits_0^t\frac{f(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-m}}\right], & 0\le m-1<\beta<m,\\ \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t), & \beta=m\in N.\end{cases}\tag{1.1}
$$

定义 2：（ Caputo 定义的分数阶导数） [1]：

$$
{}_tD_*^{\beta}f(t)=\begin{cases}\frac{1}{\Gamma(m-\beta)}\int\limits_0^t\frac{f^m(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta+1-m}}, & 0\le m-1<\beta<m,\\ \\ \frac{d^m}{dt^m}f(t), & \beta=m\in N.\end{cases}\tag{1.2}
$$

定义 3：（ Grünwald-Letnikov 定义的分数阶导数） [1]：假定导数 $f^k(t),(k=1,2,\cdots,n)$ 在区间 $[0,t]$ 上是连续的，且 $0\le n-1\le\beta<n$,

$$
{}_t\overline{D}^{\beta}f(t)=\lim_{\tau\to 0}\tau^{-\beta}\sum_{j=0}^{[\frac{t}{\tau}]}(-1)^j\begin{pmatrix}\beta\\ \\ j\end{pmatrix}f(t-j\tau)\tag{1.3}
$$

和

$$
{}_t\overline{D}^{\beta}f(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^j(0)t^{j-\beta}}{\Gamma(1+j-\beta)}+\frac{1}{\Gamma(n-\beta)}\int\limits_0^t\frac{f^{(n)}(\tau)d\tau}{(t-\tau)^{\beta-n+1}}.\tag{1.4}
$$

以上三个分数阶导数间有如下的关系：

性质 1：具有相同的非整数阶的 Caputo 分数阶导数和 Riemann-Liouville 分数阶导数有如下的关系式 [21]:

$$ {}_tD_*^{\beta}f(t)=\begin{cases} {}_tD^{\beta}\left[f(t)-\sum\limits_{k=0}^{m-1}f^k(0^+)\frac{t^k}{k!}\right] \\ \\ {}_tD^{\beta}f(t)-\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{f^k(0^+)t^{k-\beta}}{\Gamma(k-\beta+1)} \end{cases},\quad m-1<\beta<m. \tag{1.5}$$

特别地，当 $m=1$ 有

$$ {}_tD_*^{\beta}f(t)=\begin{cases} {}_tD^{\beta}\left[f(t)-f(0^+)\right] \\ \\ {}_tD^{\beta}f(t)-\frac{f(0^+)t^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)} \end{cases},\quad 0<\beta<1. \tag{1.6}$$

性质 2：如果函数 $f(t)$ 在区间 $[a,T]$ 上在区间 $(n-1)$ 次连续可微，且 $f^{(n)}(t)$ 在 $[a,T]$ 上可积，那么对于任意一个 $\beta(0<\beta<n)$, Riemann-Liouville 分数阶导数 ${}_tD^{\beta}f(t)$ 存在并且与 Grünwald-Letnikov 分数阶导数 ${}_t\overline{D}^{\beta}f(t)$ 一致.

第二章　解分数阶 Bagley-Torvik 方程的一种计算有效的数值方法

考虑下列分数阶 Bagley-Torvik 方程 [22],

$$Ay''(t) + B_0D_t^{\alpha}y(t) + Cy(t) = f(t) \tag{2.1}$$

和初值条件：

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0. \tag{2.2}$$

这里 A, B, C 是不等于零的常数， $f(t)$ 是光滑的函数， $1 < \alpha < 2$. ${}_0D_t^{\alpha}$ 是分数阶导数.

这个 Bagley-Torvik 方程 $(\alpha = \frac{3}{2})$ 是 Bagley 和 Torvik 在研究材料的性态时提出. 在这章里，我们将讨论分数阶 Bagley-Torvik 方程 $1 < \alpha < 2$ 解的性质, 并且提出一些有效的数值方法求解这个方程. 这些数值方法也适合于求解一般的分数阶微分方程.

§2.1　分数阶 Bagley-Torvik 方程解的存在性和唯一性

容易证明下面引理：

引理 1 ：如果 $f(t) \in L_1(0, T)$, 那么方程

$$y''(t) = f(t)$$

有唯一的解 $y(t) \in L_1(0, T)$, 且满足初值条件

$$y(0) = 0, y'(0) = 0.$$

在第一节，主要讨论以下分数阶的 Bagley-Torvik 方程的非齐次方程：

$$Ay''(t) + B_0D_t^{\alpha}y(t) + Cy(t) = f(t) \quad , \quad (0 < t < T < \infty, 1 < \alpha < 2), \tag{2.3}$$

$$y(0) = 0 \quad , \quad y'(0) = 0. \tag{2.4}$$

这里系数 A， B， C 都是常数，且 $f(t) \in L_1(0,T)$, 即

$$\int_0^T |f(t)|dt < \infty.$$

为简单起见，以下假设当 $t > T$ 时， $f(t) \equiv 0$.

定理 2.1 如果 $f(t) \in L_1(0,T)$, 那么方程 (2.3) 有唯一的解 $y(t) \in L_1(0,T)$, 且满足初值条件 (2.4).

证 首先假设问题（ 2.1 ） ～（ 2.2 ）有一个解 $y(t)$, 且可记为

$$y''(t) = \frac{1}{A}\phi(t),$$

其中， $\phi(t) = f(t) - B_0D_t^{\alpha}y(t) - Cy(t)$.

由引理 1 ，得到

$$y(t) = \frac{1}{A}{}_0D_t^{-2}\phi(t) = \frac{1}{A}\int_0^t (t-\tau)\phi(\tau)d\tau. \tag{2.5}$$

将方程 (2.5) 代入方程（ 2.3 ），得到

$$\phi(t) + \frac{B}{A}{}_0D_t^{\alpha}({}_0D_t^{-2}\phi(t)) + \frac{C}{A}{}_0D_t^{-2}\phi(t) = f(t).$$

因为 $1 < \alpha < 2$, 又有

$$\phi(t) + \frac{B}{A}{}_0D_t^{\alpha-2}\phi(t) + \frac{C}{A}{}_0D_t^{-2}\phi(t) = f(t).$$

即

$$\phi(t) + \frac{B}{A}\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{1-\alpha}\phi(\tau)d\tau + \frac{C}{A}\int_0^t (t-\tau)\phi(\tau)d\tau = f(t).$$

所以可得到 $\phi(t)$ 函数的第二类 Volterra 积分方程：

$$\phi(t) + \int_0^t K(t,\tau)\phi(\tau)d\tau = f(t).$$

这里

$$K(t,\tau)=\frac{B}{A\Gamma(2-\alpha)}(t-\tau)^{1-\alpha}+\frac{C}{A}(t-\tau).$$

此时核函数 $K(t,\tau)$ 能写成弱奇异核函数的形式：

$$K(t,\tau)=\frac{K^*(t,\tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}}.$$

这里，当 $0\le t<T$, $0\le\tau<T$, $1<\alpha<2$ 时， $K^*(t,\tau)$ 是连续的，且 $\mu=\min\{2,2-\alpha\}$. 显然， $0<\mu\le 1$. 由 [8] 可知，具有弱奇异核函数 (2.5) 及右端项 $f(t)\in L_1(0,T)$ 的方程（ 2.3 ），（ 2.4 ）有唯一解 $\phi(t)\in L_1(0,T)$. 因此由引理 1 ，可以得到问题（ 2.3 ），（ 2.4 ）有唯一解 $y(t)\in L_1(0,T)$. 同时这解可用公式（ 2.5 ）来决定．即证明了定理 1.

§2.2 分数阶 Bagley-Torvik 方程的解析解

利用常系数的三项分数阶微分方程的格林函数 [1] ,可以求出分数阶 Bagley-Torvik 方程（ 2.3 ），（ 2.4 ）的解析解．在齐次初始条件的假设下，对方程（ 2.3 ）进行拉普拉斯变换，

$$As^2Y(s)+Bs^\alpha Y(s)+CY(s)=F(s).$$

这里 s 是拉普拉斯变换系数.

因此，

$$Y(s)=\frac{F(s)}{As^2+Bs^\alpha+C}. \tag{2.6}$$

令 $g_3(s)=\frac{1}{As^2+Bs^\alpha+C}$, 我们又可以把 $g_3(s)$ 写成以下的形式

$$g_3(s)=\frac{1}{C}\frac{Cs^{-\alpha}}{As^{2-\alpha}+B}\frac{1}{1+\frac{Cs^{-\alpha}}{As^{2-\alpha}+B}}=\frac{1}{C}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\left(\frac{C}{A}\right)^{k+1}\frac{s^{-\alpha k-\alpha}}{\left(s^{2-\alpha}+\frac{B}{A}\right)^{k+1}}. \tag{2.7}$$

基于拉普拉斯变换的一般展开定理 [23] ，逐项求拉普拉斯的逆变换，我们可以得到公式（ 2.7 ）的拉普拉斯逆变换：

$$G_3(t)=\frac{1}{C}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{C}{A}\right)^k t^{2k+1}E^{(k)}_{2-\alpha,2+\alpha k}\left(-\frac{B}{A}t^{2-\alpha}\right).$$

这里 $E_{\lambda,\mu}(y)$ 是带有两个参数的 Mittag-Leffler 函数,

$$E_{\lambda,\mu}^{(k)}(y) \equiv \frac{d^k}{dy^k} E_{\lambda,\mu}(y) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j+k)!y^j}{j!\Gamma(\lambda j+\lambda k+\mu)} \quad , \quad (k=0,1,2,\cdots).$$

所以(2.6)式的右边可以视为是卷积 $G_3(t)*f(t)$ 的拉普拉斯变换, 那么, 我们可以得到

$$y(t) = G_3(t)*f(t) = \int_0^t G_3(t-\tau)*f(\tau)d\tau. \tag{2.8}$$

这就意味着(2.8)是分数阶 Bagley-Torvik 方程的解析解.

§2.3 分数阶 Bagley-Torvik 方程的一种数值方法

我们注意到分数阶 Bagley-Torvik 方程的解析解由格林函数表示, 而这些格林函数又表示为收敛的正或负的幂级数. 但是, 当是充分大或充分小时, 这些收敛的幂级数是很困难数值地求出. 因此, 发展数值方法求解分数阶的微分方程是十分有意义的, 但是也是很困难的任务. 在这一节, 我们将提出了求解分数阶微分方程的一种有效的数值方法. 我们考虑分数阶 Bagley-Torvik 方程 (2.3), (2.4). 一些有效的数值方法求解分数阶微分方程已经提出 [1,15]. 我们将利用这些技巧来求解分数阶 Bagley-Torvik 方程.

Riemann-Liouville 定义和 Grünwald-Letnikov 定义之间的关系(即性质 2), 对分数阶导数的近似是非常重要的。这使得在定义问题时利用 Riemann-Liouville 定义, 而在数值计算时利用 Grünwald-Letnikov 定义 [1,15].

方法 1 : 利用 Grünwald-Letnikov 定义 (1.3) (GL1)

Podlubny[1] 提出了一种方法来求分数阶 Bagley-Torvik 方程 (2.3) , (2.4) 的数值解. 利用 Grünwald-Letnikov 定义 (1.3) ,