学校编码：10384　　　　分类号______密级 ______

学号：X2006170018　　　　UDC ______

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

超立方体和增广立方体中点不交路的若干问题

Some questions of Vertex-disjoint Paths in Hypercubes and Augmented Cubes

许　建　艺

指导教师姓名：　张 莲 珠 教授

专 业 名 称：　应 用 数 学

论文提交日期：　2010 年 4 月

论文答辩日期：　2010 年 5 月

学位授予日期：

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2010 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目　　录

Contents

摘　要

设$G=(V,E)$是以V为点集，E为边集的网络拓扑图。在网络拓扑图G中，点不交路中的每条路可以看成是相对独立的信息传递途径，一个大规模网络在运行时难免会出现一些故障，这使得容错性成为度量网络拓扑结构优良与否的重要指标，因此研究网络中点不交路问题及容错性具有十分重要的意义。n维超立方体Q_n和n维增广立方体AQ_n是常见的网络拓扑结构，它们具有很多优良的性质。在这篇论文中，我们主要研究n维超立方体Q_n和n维增广立方体AQ_n的点不交路及容错问题，得到下列主要结果：

（1）设F是n $(n\geq 2)$ 维增广立方体AQ_n的一个边故障集，u,v,x,y是AQ_n中任意4个不同顶点，若边故障集的基数 $|F|\leq 2n-4$，则在AQ_n-F中存在两条分别连接u和v，x和y的路P_1和P_2，使得$V(P_1)\cap V(P_2)=\phi$，$V(P_1)\cup V(P_2)=V(AQ_n)$，而且边故障集的基数 $|F|=2n-4\ (n\geq 2)$是最佳上界。

（2）设x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3是n $(n\geq 3)$ 维增广立方体AQ_n中任意6个不同顶点，若$n>3$或$n=3$时有$\min\{d(x_1,y_1),d(x_2,y_2),d(x_3,y_3)\}=1$（$d(x,y)$是顶点$x$与$y$之间的距离），则在$AQ_n$中存在三条两两不相交路$P_1$，$P_2$和$P_3$，使得$V(P_1)\cup V(P_2)\cup V(P_3)=V(AQ_n)$，这里$P_1$连接$x_1$和$y_1$，$P_2$连接$x_2$和$y_2$，$P_3$连接$x_3$和$y_3$。

（3）设u,v,x,y是n $(n\geq 2)$ 维超立方体Q_n中4个不同顶点，x与y之间的距离$d(x,y)$和u和v之间的距离$d(u,v)$均是奇数，若对于奇数l_1，l_2，$l_1\geq d_{Q_n}(u,v)$，$l_2\geq d_{Q_n}(x,y)$，且$l_1+l_2=2^n-2$，则Q_n中存在两条不交路P_1和P_2，使得$V(P_1)\cap V(P_2)=\phi$，且$l(P_1)=l_1$，$l(P_2)=l_2$，这里P_1连接u和v，P_2连接x和y，$l(P_i)$ $(i=1,2)$是路P_i的长度。除了以下两种情况：

（1）当$n=3$，$d_{Q_3}(u,v)=d_{Q_3}(x,y)=1$，$d_{Q_3}(u,y)=d_{Q_3}(v,x)=3$，取$l_1=1,l_2=5$时；

（2）当$n=3$，$d_{Q_3}(u,v)=d_{Q_3}(x,u)=d_{Q_3}(v,y)=1$，$d_{Q_3}(x,y)=3$，取$l_1=l_2=3$时。

关键词：超立方体；增广立方体；不交路；边容错；

Abstract

Suppose $G=(V,E)$ is a net graph with vertex set V and edge set E. In a net topological graph G, each path of the vertex-disjoint paths can be viewed as a relatively independent pipeline. It is inevitable for a net to have some faults in operation, which makes fault tolerance an important index in measuring the quality of net topological structures. Therefore, it is of great significance to study the vertex-disjoint paths on the net and the fault tolerance. The n-dimension hypercube Q_n and the n-dimension augmented cube AQ_n are common net topological structures which are in possession of many good qualities. This paper mainly studies the vertex-disjoint path and fault tolerance of the n-dimension hypercube Q_n and the n-dimension augmented cube AQ_n. The major results are as follows.

1) Suppose F is an edge fault set of the n $(n \geq 2)$ dimension augmented cube AQ_n, u,v,x,y are the 4 random vertexes of AQ_n, and if the radix of the edge fault set $|F| \leq 2n-4$, there will be two paths P_1 and P_2 connecting u and v, x and y respectively in $AQ_n - F$, which result in $V(P_1) \cap V(P_2) = \phi$, $V(P_1) \cup V(P_2) = V(AQ_n)$. Furthermore, the radix of the edge fault set $|F| = 2n-4$ $(n \geq 2)$ is the best upper bound.

2) Suppose $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ are the 6 random vertexes of the n $(n \geq 3)$ dimension augmented cube AQ_n, when $n > 3$ or $n = 3$ with $\min\{d(x_1,y_1), d(x_2,y_2), d(x_3,y_3)\} = 1$（$d(x,y)$ is the distance between vertex x and y）,there will be three disjoint paths P_1, P_2 and P_3 in AQ_n, which lead to $V(P_1) \cup V(P_2) \cup V(P_3) = V(AQ_n)$. Here P_1 connects x_1 and y_1, P_2 connects x_2 and y_2, P_3 connects x_3 and y_3.

3）Suppose u,v,x,y are 4 different vertexes of the n $(n \geq 2)$ dimension hypercube Q_n, the distance $d(x,y)$ between x and y and the distance $d(u,v)$ between u and v are both odd numbers, and if the odd numbers $l_1 \geq d_{Q_n}(u,v)$, $l_2 \geq d_{Q_n}(x,y)$, and $l_1 + l_2 = 2^n - 2$, then there will be two disjoint paths P_1 and P_2 in Q_n, which lead to $V(P_1) \cap V(P_2) = \phi$, and $l(P_1) = l_1$, $l(P_2) = l_2$. Here P_1 links

u and v, P_2 links x and y, and $l(P_i)$ $(i=1,2)$ is the length of the path P_i. Except for the following cases:

(i) $l_1=5$, $l_2=1$ with $d_{Q_3}(u,v)=d_{Q_3}(x,y)=1, d_{Q_3}(u,y)=d_{Q_3}(v,x)=3$;

(ii) $l_1=l_2=3$ with $d_{Q_3}(u,v)=d_{Q_3}(x,u)=d_{Q_3}(v,y)=1$, $d_{Q_3}(x,y)=3$.

Key words: hypercube; augmented hypercube; vertex-disjoint path; edge fault tolerance.

第一章 引言

1.1 互联网与组合网络些

互联网始于 1969 年，是在 ARPA（美国国防部研究计划署）制定的协定下将美国西南部的大学 UCLA(加利福尼亚大学洛杉矶分校)、Stanford Research Institute(史坦福大学研究学院)、UCSB(加利福尼亚大学)和 UniversityofUtah(犹他州大学)的四台主要的计算机连接起来。随后越来越多的高校、公司加入，规模越来越大，但最开始仅由政府部门投资建设的，最初只是限于研究部门、学校和政府部门使用。随着 TCP/IP 体系结构的发展和 e-mail(电子邮件)、FTP(文件下载)和 telnet(远程登录)等命令的规定标准化而使得学习和使用网络变的非常容易。上世纪九十年代商用进入互联网后，互联网更是得到迅速拓展，现在互联网已经涉及到各个领域。截止 2007 年 1 月，全球互联网已经覆盖五大洲的 233 个国家和地区，网民达到 10.93 亿，用户普及率为 16.6%，而且每年正在快速增长。随着互联网的高速发展，作用的多样化，我们不仅可以在互联网上聊天、玩游戏，还可以是在互联网上进行广告宣传和购物。更重要的是在互联网上我们可以在数字知识库里寻找自己学业上、事业上的所需，从而帮助我们的学习与工作。在过去的 30 年，互联网不断改变着我们与周围世界的关系，通过前所未有的方式实现与他人、地域和信息接入，从整体上改变着我们的通信、商业和社会。确实让我们看到互联网已经渗入我们的生活，给我们的生活带来很大的方便，成为我们生活不可或缺的一部分。

互联网是指将两台计算机或者是两台以上的计算机终端、客户端、服务端通过计算机信息技术的手段互相联系起来的结果。所以，即使仅有两台机器，不论用何种技术使其彼此通信，也叫互联网。因特网是互联网的一种，它是由上千万台设备组成的互联网。

现在常说的互联网指的是（1）通过全球唯一的网络逻辑地址在网络媒介基础之上逻辑的链接在一起，这个地址是建立在‘互联网协议’（IP）或今后其它协议基础之上的。（2）可以通过‘传输控制协议’和‘互联网协议’（TCP/IP），或者今后其它接替的协议或与‘互联网协议’（IP）兼容的协议来进行通信。（3）以让公共用户或者私人用户享受现代计算机信息技术带来的高水平、全方位的服

务。这说明首先，互联网是全球性的；其次，互联网上的每一台主机都需要有“地址”；最后，这些主机必须按照共同的规则（协议）连接在一起。

互联网最初设计是为了能提供一个通讯网络，即使一些地点被毁坏也能正常工作。如果大部分的直接通道不通，路由器就会指引通信信息经由中间路由器在网络中传播。随着互联网的发展，网络结构越来越多样化。

因为目前不仅互联网的传输速度不够，更重要的是互联网还没有定型，还一直在发展、变化。所以互联网关于未来发展的流行趋势不单是考虑提高网络的连接速度，还在于探求建立一个完美高效的互联网模型。

图论是数学的一个分支，它以图为研究对象。图论中的图是由若干给定的点及连接两点的线所构成的图形，这种图形通常用来描述某些事物之间的某种特定关系，用点代表事物，用连接两点的线表示两个事物之间具有特定关系。

图论本身是应用数学的一部份，历史上图论曾经被好多位数学家各自独立地建立过。关于图论的文字记载最早出现在瑞士数学家欧拉(L.Euler) 1736年出版第一本图论著作论著中，他所考虑的原始问题有很强的实际背景，著名Konigsberg七桥问题，他用抽象分析法把这个问题化为第一个图论问题，从而奠定了他在图论（及拓扑学）创始人的地位。在19世纪和20世纪的前半期，主要研究一些游戏问题，诸如迷宫问题、博弈问题和棋盘上马的行走路线等等，直到1936年哥尼格发表了第一本图论专著，从此图论成为一门独立的学科。

随着社会的发展，图论的应用范围很广，它不但能应用于自然科学，也能应用于社会科学。它非但广泛应用于电信网络、电力网络、运输能力、开关理论、编码理论、控制论、反馈理论、随机过程、可靠性理论、化学化合物的辨认、计算机的程序设计、故障诊断、人工智能、印制电路板的设计、图案识辩、地图着色、情报检索，也应用于诸如语言学、社会结构、经济学、运筹学、兵站学、遗传学等方面。同时学科本身也获得长足发展，形成了拟阵理论, 超图理论, 代数图论, 拓扑图论等新分支并快速发展。

组合网络理论研究始于著名的(d,k)图问题[1]，由于(d,k)图问题在互连网络设计中的潜在作用，吸引了许多图论研究者。在早期，组合网络理论主要研究图的直径、连通路和(d,k)图等仅仅只是图论问题，直到第一台并行处理计算机[2]问世组合网络理论才开始转向具体的网络拓扑结构的理论研究。

1.2 超立方体与增广立方体

超立方体Q_n是较早提出的一种总体性质较好的互联网络，具有递推结构、对称性、直径小、度数低等优良的性质。早在1962年，Michigan 大学的 Squire 和 Palais 就提出超方体计算机的设想。大约在1975年左右，个人计算机制造商 IMS Associates 宣布了基于 Intel8080 微处理器的256个点商用超立方体计算机，但他们既没有发表详细的设计报告，也没有生产出一台机器。1977年，Columbia 大学的 Sullivan 和他的同事们设计出第一台超立方体并行处理机，即Columbia Homogeneous Parallel Processor, 简称CHOPP。现在有许多基于超立方体网络的超级计算机投入商业运行，比如：Caltech 的 Cosmic，Intel 的 iPSC/2 和 Connection Machines等。在1988年，Yale Unviversity 的 Youcef Saad 和 Martin H.Schultz 在 IEEE TRANSACTIONS ON COMPUTERS 发表的第一篇有关超立方体Q_n的文章《Topological Propertise of Hypercubes》, 主要讲述了超立方体Q_n的定义和它的一些性质。在2003年，Tseng-Kuei Li, Chang-Hsiung Tsai , Jimmy J.M. Tan , Lih-Hsing Hsu 在 Information Processing Letters 发表的《Bipanconnectivity and edge-fault-tolerant bipancyclicity of hypercubes》开始探讨超立方体Q_n的容错性等问题。有关早期对超立方体的研究见 [3—7]。随着人们对超立方体研究的深入，研究者发现它并不是各方面拓扑性质最好的网络，也有它固有的缺点，比如它的直径还不够小，基于这些缺陷研究者提出了超立方体的某些变形网络，皆在改进超立方体的缺点，例如 Efe[8,9] 的交叉超立方体，Cull 和 Larson[10] 的麦比乌斯立方体，Akers 和 Krishnamurthy[11] 的星图， El-Amawy 和 Latifi[12] 的折叠超立方体， Huang 和 Wu [13,14] 的平衡超立方体，等等。这使寻找新的网络拓扑结构并研究其图论性质引起组合网络理论研究的热潮。新的网络拓扑结构，新的概念层出不穷，泛圈性、泛连通性、限制连通性、路由转发指数等相继提出，随着网络系统规模的不断增大，系统间发生故障的可能性也随之增加， 因此容错性成为了衡量一个网络拓扑结构优良与否的重要指标，从而又有了容错直径、容错泛圈性、容错泛连通性等概念。

Choudum 和 Sunitha [15] 提出的增广立方体AQ_n也是超立方体变形网络其中的一种。增广立方体网络比超立方体网络直径更小，更高连通度和更大容错性等性质，因此，它成为了网络中另一种常用的拓扑结构。

1.2.1 超立方体与增广立方体的泛圈性和泛连通性

泛圈性[16]是网络拓扑结构研究的热点之一。一个图G称为是泛圈的，如果对于任意正整数l，满足$g(G)\le l\le |V(G)|$，若图G中含有长为l的圈，这里$g(G)$是图G的围长（G的围长指的是G中最小的圈的长度），$|V(G)|$是图G的阶。随后，研究者又提出了点泛圈性[17]和边泛圈性[18]， 一个图G称为是点泛圈的，如果对于任意正整数l，满足$g(G)\le l\le |V(G)|$，若图G中每个顶点都含于长为l的圈。一个图G称为是边泛圈的，如果对于任意正整数l，满足$g(G)\le l\le |V(G)|$，若图G中每条边都含于长为l的圈。显然，一个图是边泛圈的则该图为点泛圈的。

一个图G称为是泛连通的，如果对于图G中任意两个顶点x和y，任意正整数l，满足$d(x,y)\le l\le |V(G)|-1$，若图G中含有长为l连接x和y的路，这里$d(x,y)$是图G中x和y的距离，$|V(G)|$是图G的阶。易见，一个图是泛连通的则该图为边泛圈的。关于泛连通的研究结果见[19—24]，关于泛圈的研究结果见[25—30]。

下面列举一些主要结果：

定理 1.1 (Shih et al [28]) 设F_e是n $(n\ge 3)$ 维超立方体Q_n的一个边故障集，若Q_n中每个顶点至少关联两条非故障边且边故障集的基数$|F_e|\le 2n-5$，则Q_n-F_e中任意一条边都落在长为6到2^n的偶圈中。

定理 1.2 (Wang et al [29]) 设F_e是n $(n\ge 3)$ 维超立方体Q_n的一个边故障集，若Q_n中每个顶点至少关联两条非故障边且边故障集的基数$|F_e|\le 2n-5$，任取Q_n中两个顶点x和y，对于正整数l，满足$d(x,y)\le l\le |V(G)|-1$， 这里$d(x,y)$是图G中x和y的距离， $|V(G)|$是图G的阶，则Q_n-F_e中存在长为l的连接x和y的路，这里l与$d(x,y)$奇偶性相同

定理 1.3 (Tsai[30]) 设F_e，F_v分别是n $(n\ge 3)$ 维超立方体Q_n的一个边故障集和点故障集，若Q_n中每个顶点至少关联两条非故障边且边故障集的基数和点故障集的基数满足$|F|=|F_v|+|F_e|\le 2n-5$，则$Q_n-F_v-F_e$中的任意一条边(点)都落在长为4到$2^n-2|F_v|$的偶圈中；如果$n\ge 4$，$|F|=|F_v|+|F_e|=n-1$，若Q_n中每个顶点至少关联两条非故障边，则$Q_n-F_v-F_e$中的任意一条边(点)都落在长为6到$2^n-2|F_v|$

的偶圈中；如果$n \ge 5$，$|F_e| \le n-2$且$|F| = |F_v| + |F_e| \le 2n-4$， 则$Q_n - F_v$中含有长从4到$2^n - 2|F_v|$的偶圈。

关于超立方体AQ_n的性质及泛圈性研究结果见[31—37]，下面列举一些主要结果：

定理 1.4 (Hsieh and Shiu **[35])**当$n \ge 2$时，AQ_n是点泛圈的。

一个图G称为是 Hamiltonian 连通的，如果对于图G中任意两个顶点x和y，图G中存在一条 Hamiltonian 路连接x和y。

Hsu et al. [33]证明AQ_n $(n \ge 1)$是 Hamiltonian 连通的。并且当$n \ge 4$时，AQ_n是$2n-3$容错 Hamiltonian 的，是$2n-4$ 容错 Hamiltonian 连通的。这里的$2n-3$和$2n-4$都是AQ_n中边故障集的基数和点故障集的基数的和。

定理 1.5 (Ma et al. [36] **)** AQ_n $(n \ge 1)$是泛圈的。当$n \ge 2$时，AQ_n是$2n-4$边容错泛圈的。

定理 1.6(Wang et al. [37]**)** 当$n \ge 4$时，AQ_n是$2n-3$容错泛圈的。

定理 1.7(Ma et al. [36]**)** $u, v \in V(AQ_n)$，当$n \ge 2$时，在AQ_n中存在一条长为l的路，这里$d_{AQ_n}(u,v) \le l \le 2^n - 1$。

1.2.2 超立方体与增广立方体的不交路

在互联网络设计中，最基本的是考虑网络的可靠性，当用图来表示网络的拓扑结构时，网络的可靠性常常用图的连通性来衡量，而图中不交路对于图的连通性有着重要的研究意义，另外点不交路中的每条路可以看成是相对独立的信息传递途径，一个互联网络在运行时难免会出现一些故障，这使得容错性成为度量网络拓扑结构优良与否的重要指标，因此研究网络中点不交路问题及容错性具有十分重要的意义。下面是超立方体点不交路的一些主要结果：

定理 1.8 (Dvoǐák[38]) 设u, v, x, y是n $(n \ge 2)$ 维超立方体Q_n中4个不同顶点，x与y之间的距离$d(x,y)$和u与v之间的距离$d(u,v)$均是奇数，则在Q_n中存在两条路P_1和P_2，使得$V(P_1) \cap V(P_2) = \phi$，$V(P_1) \cup V(P_2) = V(Q_n)$，这里$P_1$连接$x$和$y$，$P_2$连接$u$和$v$。

定理 1.9 (She et al. **[39])** 设F是n $(n \ge 3)$ 维超立方体Q_n的一个边故障

集，若 x_1, x_2, y_1, y_2 是 Q_n 中 4 个不同顶点，满足距离 $d(x_1, y_1)$ 和距离 $d(x_2, y_2)$ 都是奇数且边故障集的基数 $|F| \le n-3$，则在 $Q_n - F$ 中存在两条路 P_1 和 P_2，使得 $V(P_1) \cap V(P_2) = \phi$，$V(P_1) \cup V(P_2) = V(Q_n)$，这里 P_1 连接 x_1 和 y_1，P_2 连接 x_2 和 y_2，而且边故障集的基数 $|F| = n-3$ $(n \ge 3)$ 是最佳上界。

定理 1.10　(Chen [40]) 设 f_e 和 f_v 是 n 维超立方体 Q_n 中的故障边与故障点，对于任一个整数 k 满足 $1 \le k \le n-1$，偶图 Q_n 中的两个不同部 S 和 T，分别取出 k 个无故障点，若 $f_e + f_v \le n-k-1$，在 Q_n 中存在 k 条顶点不交无故障 $(S,T)-$路，覆盖 $2^n - 2f_v$ 个顶点。而且 $f_e + f_v \le n-k-1$ 达到最优。

定理 1.11　(Chen [41]) 设 W_n 是由 Q_n 中增加某些边得到的偶图，任意从 W_n 中的两个不同部 S 和 T 分别取出 k 个顶点，则在 W_n 中存在 k 条顶点不交 $(S,T)-$路覆盖 W_n 所有顶点，当且仅当 $k = 2^{n-1}$，$W_n - (S \cup T)$ 存在一完美匹配，而且若 $W_n - (S \cup T)$ 存在一完美匹配 M，则在 W_n 中存在 k 条顶点不交 $(S,T)-$路覆盖 W_n 所有顶点且覆盖 M 所有边。

下面是增广立方体点不交路的一些主要结果：

定理 1.12 (Ma et al. **[36])** 设 u, v, x, y 是 n $(n \ge 2)$ 维增广立方体 AQ_n 中 4 个不同顶点，则在 AQ_n 中存在两条路 P_1 和 P_2，使得 $V(P_1) \cap V(P_2) = \phi$，$V(P_1) \cup V(P_2) = V(AQ_n)$，这里 P_1 连接 u 和 v，P_2 连接 x 和 y。

定理 1.13 (Lee et al. **[42])** 设 u, v, x, y 是 n $(n \ge 2)$ 维增广立方体 AQ_n 中 4 个不同顶点，对于任意正整数 l_1，l_2，$l_1 \ge d_{AQ_n}(u,v)$，$l_2 \ge d_{AQ_n}(x,y)$，$l_1 + l_2 = 2^n - 2$，AQ_n 中存在两条不交路 P_1 和 P_2，使得 $V(P_1) \cap V(P_2) = \phi$，$V(P_1) \cup V(P_2) = V(AQ_n)$，且 $l(P_1) = l_1$，$l(P_2) = l_2$，这里 P_1 连接 u 和 v，P_2 连接 x 和 y。除了以下几种情况：

（1）$l_1 = 2$，$d_{AQ_n}(u,v) = 1$ 且 $\{x, y\} = Nbd_{AQ_n}(u) \cap Nbd_{AQ_n}(v)$；

（2）$l_2 = 2$，$d_{AQ_n}(x,y) = 1$ 且 $\{u, v\} = Nbd_{AQ_n}(x) \cap Nbd_{AQ_n}(y)$；

（3）$l_1 = 2$，$d_{AQ_n}(u,v) = 2$ 且 $\{x, y\} = Nbd_{AQ_n}(u) \cap Nbd_{AQ_n}(v)$；

（4）$l_2 = 2$，$d_{AQ_n}(x,y) = 2$ 且 $\{u, v\} = Nbd_{AQ_n}(x) \cap Nbd_{AQ_n}(y)$。

这里 $Nbd_{AQ_n}(u)$ 表示在 AQ_n 与点 u 相邻接的所有点的集合。

1.3 本文的主要工作

对于n维超立方体Q_n和n维增广立方体AQ_n的点不交路及容错问题，本文充分利用Q_n和AQ_n它们所具有的递推结构，利用数学归纳法证明得到以下 3 个主要结果：

（1）设x_1,x_2,x_3,y_1,y_2,y_3是n $(n\ge 3)$ 维增广立方体AQ_n中任意6个不同顶点，若$n>3$或$n=3$时有$\min\{d(x_1,y_1),d(x_2,y_2),d(x_3,y_3)\}=1$（$d(x,y)$是顶点$x$与$y$之间的距离），则在$AQ_n$中存在三条两两不相交路$P_1$，$P_2$和$P_3$，使得$V(P_1)\cup V(P_2)\cup V(P_3)=V(AQ_n)$，这里$P_1$连接$x_1$和$y_1$，$P_2$连接$x_2$和$y_2$，$P_3$连接$x_3$和$y_3$。

（2）设F是n $(n\ge 2)$ 维增广立方体AQ_n的一个边故障集，u,v,x,y是AQ_n中任意4个不同顶点，若边故障集的基数$|F|\le 2n-4$，则在AQ_n-F中存在两条分别连接u和v，x和y的路P_1和P_2，使得$V(P_1)\cap V(P_2)=\phi$，$V(P_1)\cup V(P_2)=V(AQ_n)$，而且边故障集的基数$|F|=2n-4\ (n\ge 2)$是最佳上界。

（3）设u,v,x,y是n $(n\ge 2)$ 维超立方体Q_n中4个不同顶点，x与y之间的距离$d(x,y)$和u和v之间的距离$d(u,v)$均是奇数，若对于奇数l_1，l_2，$l_1\ge d_{Q_n}(u,v)$，$l_2\ge d_{Q_n}(x,y)$，且$l_1+l_2=2^n-2$，则Q_n中存在两条不交路P_1和P_2，使得$V(P_1)\cap V(P_2)=\phi$，$V(P_1)\cup V(P_2)=V(Q_n)$，且$l(P_1)=l_1$，$l(P_2)=l_2$，这里P_1连接u和v，P_2连接x和y，$l(P_i)$ $(i=1,2)$是路P_i的长度。除了以下两种情况：

（1）当$n=3$，$d_{Q_3}(u,v)=d_{Q_3}(x,y)=1$，$d_{Q_3}(u,y)=d_{Q_3}(v,x)=3$，取$l_1=1,l_2=5$时；

（2）当$n=3$，$d_{Q_3}(u,v)=d_{Q_3}(x,u)=d_{Q_3}(v,y)=1$，$d_{Q_3}(x,y)=3$，取$l_1=l_2=3$时。

第二章 基础知识

有关图论常用术语和记号我们可以用 *J.A.Bondy* [41]和徐俊明[1] 所使用的图论的术语和符号。我们知道互联网的拓扑结构可以用一个连通图G来表示，图G是一个二元组：$G=(V,E)$，其中V是非空有限集合，它的元素称为结点，E也是（可空）有限集合，它的元素称为边。图G的边e是一个结点二元组：$(u,v),u,v\in V$。$e=(u,v)$，称e与u,v关联，或u与v相邻接；在图G中与点u相邻接的所有点的集合记为$Nbd_G(u)$。无向图中，与点v相关联的边数称为v的度，记为$\deg(v)$。各点的度都相等的图称为正则图，或k−正则图，其中k为点度的公共值。连接u,v的路P常记为$P(u,v)$。路P包含G中所有点时称为 Hamiltonian 路。圈包含G中所有点称为 Hamiltonian 圈。包含图G中每条边和顶点的回称为 Euler 回。图G中连接两点u,v最短的路长称为u,v的距离，记为$d(u,v)$。图G中连接任意两点u,v间距离的最大值称G的直径，记为$d(G)$。

$Aut(G)$是图G的自同构群，如果对图G的每一对顶点x,y，存在$\theta\in Aut(G)$使得$y=\theta(x)$，则G称为是点可迁的。如果对图G的任意两条边$a=(x,y),b=(u,v)$，存在$\sigma\in Aut(G)$使得$u=\sigma(x),v=\sigma(y)$，则G称为是边可迁的。

2.1 超立方体和若干性质

超立方体网络的拓扑结构是n维立方体，它的图论模型是无向图，记为Q_n。Q_n的顶点集是定义在$\{0,1\}$上的n字节的二元字符串。即$V=\{x_1x_2\Lambda x_n：x_i\in\{0,1\},i=1,2,\Lambda,n\}$，$Q_n$中两个顶点$x=x_1x_2\Lambda x_n$和$y=y_1y_2\Lambda y_n$之间有边相连当且仅当$x$和$y$有且仅有一个坐标不同，即$\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|=1$。下图分别是超立方体$Q_1$，$Q_2$，$Q_3$，$Q_4$。在$n$维欧氏空间$R^n$中，超立方体$Q_n$可以认为是单位区间$[0,1]=Q_1$，正方形$Q_2$，立方体$Q_3$，等等。因此$Q_n$可以看成$R^n$中的立方体。超立方体一词也由此而来。