学校编号： 10384　　　　分类号：________密级：________

学　　号： 19020071152113　　　　UDC:__________

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

扩散方程的概率推导及其在金融上的应用

The Probabilistic Derivation of The Diffusion Equation and Applications In Finance

郑　美　铃

指导教师姓名：　谭 忠 教 授

学 科 名 称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2010 年 4 月

论文答辩时间：　2010 年 5 月

论文打印时间：　2010 年　月

答辩委员会主席：__________

评　　阅　　人：__________

2010 年　5　月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学位论文规范（讨论稿）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行条例实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查询、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（ ）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（ ）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘 要

在传统的偏微分方程理论中，几乎都是从几个简单的物理模型出发，根据守恒定律和变分原理，推导并建立起三类典型方程及其相应的典型定解问题。比如，通过弦振动模型建立波动方程；通过热传导过程或污染物扩散模型建立扩散方程；通过引力问题建立位势方程。本文我们试图打破传统的思维定势，从概率角度重新建立扩散方程。从而把确定性的热传导过程与概率性的随机游走模型联系起来。

在推导过程中，我们看到布朗运动（连续的随机游走）与扩散方程基本解之间存在的深层联系，即 $\frac{1}{2}\Delta$ 事实上是布朗运动的强无穷小算子，其中 Δ 是熟知的拉普拉斯算子。正是由于布朗运动与扩散方程之间的密切联系，众多概率问题与分析问题可以互相转化。

大多数物理学、力学和工程技术问题都可以归结成三类典型的偏微分方程来进行研究。扩散方程经常出现在流体力学、过滤问题、化学动力学与族群动态论的数学模型中，尤其是在金融数学中作为期权的模型出现。本文，我们把著名的 Black-Scholes 模型中的差分方程转化成扩散方程，并由此导出较简单的解。

关键词： 扩散方程　概率推导　随机游走　Black-Scholes 方程

Abstract

In the traditional theory of partial differential equations , the three typical equations and corresponding typical well-posed problems almost all came from a few simple physical models . They were established by using the conservation and variational principle . For example , established the wave equation through the string vibration model , established the diffusion equation through the conduction of heat or the pollution in a channel , established the potential equation through the gravitational . In this paper , we try to break the current mind-set and re-establish the diffusion equation from the probability perspective . Thus we find the deep connection between the probabilistic (Random Walk) and deterministic (The conduction of heat) models .

Also we find that $\frac{1}{2}\Delta$ is in fact the infinitesimal generator of the Brownian motion , where Δ denotes tha Laplace operator . Just because the deep connection between the Diffusion equation and Brownian motion , most of the probabilistic and analysis problems can be transformed to each other .

Most of the physics , mechanics and engineering problems can be attributed to the three typical partial differential equations . The diffusion equation occurs frequently in the fluid dynamics , filtration problems , kinetics chemistry and population dynamics , especially appears as a model of options in the financial mathematics . This paper , we transform the celebrated Black-Scholes model into a diffusion equation , and derive a simple solution .

Key Words: The Diffusion Equation ; The probabilistic derivation ; Random Walk ; Black-Scholes equation

目 录

Table of Contents

序 言

偏微分方程这一学科并不是科学家自觉创立的，而是在讨论自然现象（特别是物理现象）的过程中逐步建立起来的。十八世纪，Euler 最早提出了弦振动的二阶方程。1746 年， D′Alembert 在论文《张紧的弦振动时形成的曲线的研究》中首先提出了波动方程，并于 1750 年证明了它们的函数关系。这样在对弦振动的研究中，数学家们开创了偏微分方程这一学科。 1822 年， Fourier 发表《热的分析理论》（The ó rie analytique de la chaleur），提出了三维空间的热方程，偏微分方程进一步发展。

时至今日，虽然偏微分方程已经发展成为一个理论丰富并且应用广泛的数学学科，但相比其他一些数学学科来说，还远不是完善的。这大体上是由偏微分方程所反映的自然现象的复杂性所决定的。在传统的偏微分方程理论中，几乎都是从几个简单的物理模型出发，根据守恒定律和变分原理，推导并建立起三类典型方程及其相应的典型定解问题。比如通过热传导过程或污染物扩散模型建立扩散方程。

我们试图打破传统的思维定势，从概率角度重新建立扩散方程。从而把确定性的热传导过程与概率性的布朗运动模型联系起来。

扩散方程是一类典型的偏微分方程，它经常出现在流体力学、过滤问题、化学动力学与族群动态论的数学模型中，尤其是在金融数学中作为期权的模型出现。

著名的 Black-Scholes 方程

$$V_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 V_{SS} + rSV_S - rV = 0$$

就可以通过变换转化成为齐次扩散方程

$$v_\tau - v_{xx} = 0,\ -\infty < x < +\infty, 0 \le \tau \le T,$$

并由此导出较简单的解，即对欧式买入期权有

$$C(S,t) = SN(d_+) - Ee^{-r(T-t)}N(d_-),$$

对欧式卖出期权有

$$P(S,t) = Ee^{-r(T-t)}N(-d_-) - SN(-d_+).$$

其中， $d_\pm = \frac{\log\frac{S}{E}+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ 。 $C(S,t)$ 、 $P(S,t)$ 分别表示欧式买入和卖出期权的收益函数， S 是标的资产价格， T 、 E 是期权合同的到期日和执行价， r 是当前无风险利率， σ^2 是标的资产报酬率的波动率， $N(\cdot)$ 是标准正态分布函数。

本文共分为四个部分：

第一部分为第一章，系统的介绍了扩散方程的概念、物理背景及适定性问题。首先通过热传导过程建立起一般扩散方程；接着给出扩散方程的适定性问题；最后解决扩散方程解的唯一性问题和 Cauchy 问题。

第二部分为第二、三、四章，为本文的研究重点。这一部分，我们通过随机游走过程重新建立扩散方程并给出其概率解释。第二章由对称随机游走模型得到齐次扩散方程，第三章通过对随机游走过程做适当变形得到相应的漂移 - 扩散 - 反应方程，第四章探讨了拉普拉斯算子的概率意义。

第三部分为第五章，主要给出扩散方程在欧式期权定价过程中的应用。著名的 Black-Scholes 模型中的差分方程就可以转化成扩散方程，并由此导出较简单的解。

第四部分为第六章，总结全文，并提出了扩散方程的一些非线性问题。

第一章　扩散方程的物理推导及核心理论

本章主要介绍与扩散方程及其定解问题有关的基本概念、物理模型及某些一般性的原理、理论和定理，对从总体上了解扩散方程的特点、意义和指导以后各章具体内容的讨论有一定的意义。这里，我们仅给出定理而不加以证明，相关理论及定理的相关证明可以参阅文献 [1],[2],[3] 。

1.1　热传导过程

热是能量的一种形式，常被认为是脱离于其他形式的能。因为历史的原因，卡路里取代焦耳成为热能的度量单位， 1 卡路里 =4.182 焦耳。

我们试图建立实体热传导过程的数学模型。这是一种肉眼不可见的物质运动，它依靠分子碰撞所产生的动能进行热传递。假定实体是均匀且各向同性的，具有恒定的质量密度 ρ 并且能够接收来自外源的能量（比如，从电流或化学反应中吸收或者向外辐射）。单位时间单位质量上由外源提供的热能，用 r 表示。

热是能量的一种形式，自然地遵循能量守恒定律。

V 是实体内的一部分体积，单位时间内 V 上热能的变化量等于因热传导过程通过边界 ∂V 流出 V 的净热能加上单位时间从外源吸收的热能。

如果将单位质量的热能记作 $e = e(\mathbf{x}, t)$ ，则 V 内的总热能可由 $\int_V e\rho \, d\mathbf{x}$ 给出。因此，单位时间内 V 上热能的变化量等于（假定时间导数与积分号可交换）

$$\frac{d}{dt}\int_V e\rho \, d\mathbf{x} = \int_V e_t \rho \, d\mathbf{x}.$$

热流向量 $\mathbf{q}$ 给出了热流的方向和通过单位面积的热流大小。更确切地说，如果 $d\sigma$ 是 ∂V 的面积元， υ 是 ∂V 上的单位外法向，那么 $\mathbf{q} \cdot \upsilon \, d\sigma$ 是单位时间内通过的热流。因此，单位时间内通过 ∂V 流出的总内部热流由下式给出：

$$-\int_{\partial V} \mathbf{q} \cdot \upsilon \, d\sigma = -\int_V div\mathbf{q} \, d\mathbf{x}.$$

最后，单位时间内由外源提供的热能为

$$\int_V r\rho \, d\mathbf{x}.$$

因此，根据能量守恒定律，得到

$$\int_V e_t\rho \, d\mathbf{x} = -\int_V div\mathbf{q} \, d\mathbf{x} + \int_V r\rho \, d\mathbf{x}. \tag{1}$$

由 V 的任意性，得到逐点关系式：

$$e_t\rho = -div\mathbf{q} + r\rho. \tag{2}$$

这里， $e, \mathbf{q}$ 是未知的，但我们要建立模型就必须通过这些数量的结构关系式来获得额外的信息。为此，假定 $e, \mathbf{q}$ 遵循下列规律：

• 热传导的 Fourier 定律：在“正常”条件下，对众多实体而言，热流是关于温度梯度的线性函数，即

$$\mathbf{q} = -\kappa\nabla u. \tag{3}$$

这里 u 是绝对温度， κ 是导热系数，它取决于材料的性能。一般的， κ 可能依赖于 $u, \mathbf{x}, t$ 。但在一些我们感兴趣的情形下，它变化甚微以致可以忽略不计。因此，我们假定 κ 是常数。故

$$div\mathbf{q} = -\kappa\Delta u. \tag{4}$$

负号表明热量是由温度高处流向低处，即热流总是朝着温度降低的方向。

• 热能是绝对温度的线性函数：

$$e = c_v u. \tag{5}$$

这里 c_v 是材料的比热（定容条件下）。在许多感兴趣的情形下， c_v 可看作常数，且 (5) 式在不太大的温度区间内是相当准确的。

有了 (4) 式和 (5) 式，方程 (2) 化为

$$u_t = \frac{\kappa}{c_v \rho}\Delta u + \frac{1}{c_v} r. \tag{6}$$

取 $D = \frac{\kappa}{c_v \rho}$, $f = \frac{r}{c_v}$ ，得到 $u_t - D\Delta u = f$ ，系数 D 反应了材料的热响应时间。

定义 1. 二阶线性偏微分方程 $u_t - Du_{xx} = f$ 称为一维扩散方程，这里 $u = u(x,t)$ ，x 是实空间变量， t 是时间变量，正常数 D 称为扩散系数。高维扩散方程记为

$$u_t - D\Delta u = f. \tag{7}$$

若 $f = 0$ ，方程称为齐次的。这里 Δ 为 Laplace 算子:

$$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2}.$$

在均衡条件下（ u 随时间变化不显著）， u 只依赖于空间变量而且满足扩散方程。

定义 2. 方程

$$-\Delta u = f \tag{8}$$

称为泊松方程（一维情况下为 $-u_{xx} = f$ ）。当 $f = 0$ 时，称 Laplace 方程，它的解在众多领域都有重要的地位，因此也被称作调和函数。

可知，如果热传导实体是均匀的且关于热传输是各向同性的，则它的温度变化可以用方程 (7) 来描述，这里 f 表示外部热源的强度。因此，方程 (7) 也称作热方程。

另一方面，方程 (7) 可以扩展成一些更一般的扩散方程。例如，在因周围介质的分子运动而引发的物质传送过程中， u 可以认为是污染物的浓度、液体或气体中溶质（水中的染料、大气中的烟雾）的浓度或者甚至可以是一个概率密度。

稍后，我们将看到随机游走过程 t 时刻粒子位于 x 处的概率 $p(x,t)$ 与 u 的地位一样，从而找到概率性模型与确定性模型之间的深层联系。

1.2 扩散方程的定解条件

仅有方程还不足以确定在特定条件下，某个具体的规律。比如在物体表面绝热和表面与外界有热交换两种情形下，物体的温度变化是不会相同的。这说明研究对象的边界状态和初始状态对物理规律是有影响的。描述边界状态和初始状态的条件分别称边值条件和初始条件，统称为定解条件。扩散方程连同与它相应的定解条件就构成热方程的定解问题。在物理学上，不难给出热方程的定解问题。

考虑柱体温度 u 的变化，该柱体侧面完全绝缘且高远大于横截面积 $(L \gg A)$ 。虽然柱体是三维的，但我们可以假定热量只沿柱体的高流动且热传导强度在每个横截面上是均匀分布的。因此， $e = e(x,t), r = r(x,t),\ 0 \le x \le L.$ 这样，结构关系式 (3) 和 (5) 就变成 $e(x,t) = c_v u(x,t),\ \mathbf{q} = -\kappa u_x \mathbf{i}.$ 选取 $V = A \times [x, x+\Delta x]$ ，代入 (1) 式并消去横截面积 A ，有

$$\int_x^{x+\Delta x} c_v \rho u_t \, dx = \int_x^{x+\Delta x} \kappa u_{xx} \, dx + \int_x^{x+\Delta x} r\rho \, dx.$$

从而得到关于 u 的一维扩散方程 $u_t - Du_{xx} = f$ 。

我们要研究在 $[0,T]$ 时间段内柱体温度的变化,给定它的初始分布是合情合理的：不同的初始状态对应着不同的温度变化情况。因此，给定初始条件 $u(x,0) = g(x)$ ，这里 g 是初始温度曲线。

要得到唯一的温度变化轨迹，单有初始条件还不够，还必须知道柱体与周围环境是如何相互作用的。事实上, 从给定的初始条件出发, 我们可以通过控制柱体两端（柱体侧面是完全隔热的）的温度或者热流来改变 u 的变化轨迹。比如，我们可以让端点的温度保持在一个固定水平或者让它以某种方式随时间变化，这相当于令

$$u(0,t) = h_1(t),\ u(L,t) = h_2(t) \quad \forall t \in (0,T]. \tag{9}$$

上式称 Dirichlet 边值条件。

我们还可以给定端点处的热流。根据 Fourier 定律，$x = 0$ 处的内在热流为 $-\kappa u_x(0,t)$

且 $x=L$ 处的内在热流为 $\kappa u_x(L,t)$ 。此时热流由 Neumann 边值条件给出：

$$-u_x(0,t)=h_1(t),\ u_x(L,t)=h_2(t) \quad \forall t\in(0,T]. \tag{10}$$

另一种类型的边值条件是 Robin 条件。让周围温度保持 U ，假定柱体一端 $(x=L)$ 的内在热流线性依赖于温度差 $U-u$（牛顿冷却定律），即

$$\kappa u_x=\gamma(U-u) \ \ (\gamma>0).$$

取 $\alpha=\frac{\gamma}{\kappa}>0,\ h=\frac{\gamma U}{\kappa}$ ，则 $x=L$ 处的 Robin 边值条件为

$$u_x+\alpha u=h. \tag{11}$$

显然，我们还可以构造混合边值条件，例如：一端满足 Dirichlet 条件，另一端则满足 Neumann 条件。

综上，最常见的一维热方程问题可以表示为：给定外源 $f=f(x,t)$ ，初始分布 $g=g(x)$ ，求解 $u=u(x,t)$ 满足：

$$\begin{cases} u_t-Du_{xx}=f & 0<x<L,\ 0<t<T \\ u(x,0)=g(x) & 0\le x\le L \\ +\ \text{边值条件} & 0<t\le T \end{cases}$$

这里，边值条件可以是：

•Dirichlet ： $u(0,t)=h_1(t),\ u(L,t)=h_2(t),$

•Neumann ： $-u_x(0,t)=h_1(t),\ u_x(L,t)=h_2(t),$

•Robin ： $-u_x(0,t)+\alpha u(0,t)=h_1(t),\ u_x(0,t)+\alpha u(L,t)=h_2(t)\ \ (\alpha>0),$

或者混合条件。这样，我们就得到了初始 Dirichlet 问题、初始 Neumann 问题等。当 $h_1=h_2=0$ 时，称边值条件是齐次的。

注 1 ： 观察到在矩形区域 $Q_T=(0,L)\times(0,T)$ 的边界上有一个特殊部分（称为 Q_T 的抛物型边界）： $([0,L]\times\{t=0\})\cup(\{x=0\}\times(0,T])\cup(\{x=L\}\times(0,T])$ ，它携带了