

学校编码: 10384
学 号: 19120080150451

分类号 _____ 密级 _____
UDC _____

厦门大学
博士 学位 论文
图的条件连通度

The Conditional Connectivity of Graphs

郭 利 涛

指导教师: 郭晓峰教授
专业名称: 应用数学
论文提交日期: 2011 年 月
论文答辩日期: 2011 年 月
学位授予日期: 2011 年 月

答辩委员会主席: _____ 教授
评 阅 人: _____

2011 年 3 月

厦门大学博硕论文摘要库

Doctoral Dissertation

The Conditional Connectivity of Graphs

By
Litao Guo

Supervisor: Professor Xiaofeng Guo

Speciality: Graph Theory

Institution: School of Mathematical Sciences

Xiamen University
Xiamen, P. R. China

March, 2011

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

- （）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于 年 月 日解密，解密后适用上述授权。
（）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学博硕士论文摘要库

摘要

图的连通性是图论的一个基本研究课题, 它与网络的可靠性(容错性)密切相关. 图的经典连通性是用连通度和边连通度来度量的. 图的连通度(边连通度)就是使图不连通所要删除的最小的点(边)数, 显然它反映了相应的网络的容错性. 在通信网络的可靠性的进一步研究中, 人们需要了解两个具有相同的连通度或边连通度的图, 哪个可靠性更高? 为了深入研究网络的可靠性或容错性, 人们提出了许多条件连通性的概念.

Harary 在 1983 年引入条件连通度的概念 [38]. 设图 $G = (V, E)$, P 是图的某种性质, $S \subseteq V(G)$. G 的条件连通度 $\kappa(G : P) = \min\{|S| : G - S$ 不连通, 并且 $G - S$ 的每个分支都有性质 $P\}$. 同样可以定义条件边连通度 $\lambda(G : P)$. 如果令 P 为每个连通分支至少有 k 个点的性质, 那么 $\lambda(G : P)$ 就是我们经常说的 k -限制性边连通度 $\lambda_k(G)$. 类似地, 对于点的情况, 我们可以定义 k -限制性连通度 $\kappa_k(G)$. 设 $S \subseteq E(G)$ ($V(G)$), $G - S$ 不连通, 并且 $G - S$ 的每个分支至少有 k 个点, 则称 S 为 k -限制性边(点)割. 设 $\xi_k(G) = \min\{ |[U, \bar{U}]| : \emptyset \neq U \subset V(G), |U| = k \text{ 且 } G[U] \text{ 连通} \}$. 一个图 G 叫做 λ_k -最优的, 如果 $\lambda_k(G) = \xi_k(G)$. 图 G 是超- λ_k (超- κ_k)连通的, 如果每个最小的 k -限制性边割(点割)都孤立一个 k 个点的连通子图. 图 G 是超- κ_k 连通的, 如果 $\kappa_k(G) = \xi_k(G)$ 且每个最小的 k -限制性点割都孤立一个 k 个点的连通子图 ($k = 1, 2, 3$). 特别地, 当 $k = 1$ 时, 我们称图 G 是超边连通(超连通)的.

特别地, 设 P_δ^k 表示图 G 去掉一个边割 F 后的每个连通分支的最小度 δ 大于等于 k 的性质. 条件边连通度 $\lambda_\delta^k(G)$ 是一个具有性质 P_δ^k 的最小边割 F 的基数(如果这个边集存在).

Fàbrega 和 Fiol 引入了边 extra-连通度 (edge extraconnectivity) 的概念 [27]. 设 P_e^k 表示连通分支有多于 k 个点的性质. 图 G 的一个边集 F 是边 extra-割, 如果 $G - F$ 不连通且 $G - F$ 的每个连通分支具有性质 P_e^k . 边 extra-连通度 $\lambda_e^k(G)$ 是最小边 extra-割的基数.

设 D 是强连通的有向图. D 的弧集 S 是一个限制性弧割如果 $D - S$ 有一个非平凡的强连通分支 D_1 使得 $D - V(D_1)$ 包含一条弧. 限制性弧连通度 $\lambda'(D)$ 是最小的限制性弧割的基数.

本文主要研究图的 3-限制性边(点)连通度, 基于图的各种特定参数

得到图是 λ_3 - 最优、超 $-\lambda_3$ 连通和超 $-\kappa_3$ 连通的充分条件；对有向图的限制性弧连通度，我们主要用邻域的条件得到有向图是的 λ' - 最优的充分条件；我们还研究了的几种特殊图的条件连通性及探讨了逆度与连通性的关系。主要结果如下。

一、图的 3- 限制性边（点）连通度

通过研究直径、围长、度序列、两个点的公共邻域和 3- 限制性边连通度的关系，得到图是 λ_3 - 最优的充分条件；用两个点的公共邻域、度序列、度和等条件得到不含三角形图是超 3- 限制性边连通的充分条件；用正则度的条件得到正则图是超 3- 限制性边连通的充分条件；用图及线图的直径和围长的关系，得到图是超 $-\lambda_3$ 连通和超 $-\kappa_3$ 连通的充分条件。

二、有向图的限制性弧连通度

设 D 是强连通的有向图。强连通有向图 D 被称为 λ' - 连通的，如果 D 存在限制性弧割。设 xy 是 D 的一条弧且 $yx \in A(D)$ ，则称 $\xi'(xy) = \min\{d^+(x) + d^+(y) - 1, d^-(x) + d^-(y) - 1, d^+(y) + d^-(x), d^+(x) + d^-(y) - 1\}$ 是 xy 的弧度。如果 xy 是 D 的一条弧且 $yx \in A(D)$ ，则称 $\xi'(xy) = \min\{d^+(x) + d^+(y) - 2, d^-(x) + d^-(y) - 2, d^+(y) + d^-(x) - 1, d^+(x) + d^-(y) - 1\}$ 是 xy 的弧度。 D 的最小弧度是 $\xi'(D) = \min\{\xi'(xy) : xy \in A(D)\}$ 。一个 λ' - 连通的有向图被称为 λ' - 最优的，如果 $\lambda'(D) = \xi'(D)$ 。

本文用两个点的公共邻域的条件，得到有向图是 λ' - 最优的充分条件。

三、特殊图的条件连通性

设 $G = (V, E)$ ，图 G 的 Mycielskian 变换 $\mu(G)$ 的点集为 $V \cup V' \cup \{u\}$ ，其中 $V' = \{x' : x \in V\}$ ，边集为 $E \cup \{xy' : xy \in E\} \cup \{y'u : y' \in V'\}$ 。点 x' 是 x 的 twin (x 也是 x' 的 twin)，且 u 被称为 $\mu(G)$ 的根。对于 $n \geq 2$ ， $\mu^n(G)$ 定义为 $\mu^n(G) = \mu(\mu^{n-1}(G))$ 。从定义知 $\mu(G)$ 连通。

n 个点的全关系图 T_n 是由完全图 K_n 的每个点加上一个自环所得的图。我们定义 $D_n[G] = G \otimes T_n$ 。

本文研究了图的 Mycielskian 变换 $\mu(G)$ 的超连通性，得到 $\mu(G)$ 是超连通和超边连通的充要条件；得到 $D_n[G]$ 是超连通的充要条件；研究了二部图和完全图的 Kronecker 积的超连通性，完全图、圈、路和完全图的 Kronecker 积的超连通性，分裂图、圈的幂、路的幂和完全图的 Kronecker 积的超连通性，证明了这些图是超连通的；研究了超立方体和折叠超立方体的条件连通性，并得到一些条件连通度的值。

四、逆度与连通性的关系

定义没有孤立点图 G 的逆度为

$$R(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)}.$$

本文通过研究逆度与 n, δ, ξ 的关系得到图是超边连通和 λ' - 最优的充分条件.

关键词: 条件连通度; k - 限制性 (边) 连通度; 边 extra- 连通度

厦门大学博硕论文摘要库

Abstract

The connectivity of graph is an element topic in the research of graph theory, it is closely related to the network reliability (fault tolerance). The classical connectivity concept of graph is connectivity and edge connectivity. Connectivity (edge connectivity) is the minimum number of vertices (edges) whose deletion makes the graph disconnected. Obviously, they reflect the corresponding network fault tolerance. For the further study of the network reliability, peoples need to know if two graphs have the same connectivity or edge connectivity, which has the more reliability? For further study, many concepts of connectedness have been introduced.

Harary proposed the conditional connectivity in 1983[38]. Let G be a graph and P be graph-theoretic property, $S \subseteq V(G)$. The conditional connectivity of G is $\kappa(G : P) = \min\{|S| : G - S \text{ is not connected and each component of } G - S \text{ has property } P\}$. Similarly we can define the conditional edge connectivity $\lambda(G : P)$. If let P be the property each component has at least k vertices, then $\lambda(G : P)$ is k -restricted edge connectivity $\lambda_k(G)$. Similarly, for the case of vertex, we can define k -restricted connectivity $\kappa_k(G)$. Graph G is λ_k -optimal, if $\lambda_k(G) = \xi_k(G)$. Graph G is super- λ_k (super- κ_k), if each minimum k -restricted edge (vertex) cut isolates one connected subgraph with k vertices. Particularly , if $k = 1$, we call G is super edge connected (super connected).

In particular, let P_δ^k be the property of each connected component having minimum degree $\delta \geq k$. Conditional edge connectivity $\lambda_\delta^k(G)$ is the cardinality of the minimum edge cuts, if any, whose deletion disconnects G and each component of $G - F$ has property P_δ^k .

Fàbrega and Fiol introduced edge extraconnectivity in [27]. Let P_e^k be property of each connected component having more than k vertices. $F \subseteq E$ is an edge set, F is called edge extra-cut, if $G - F$ is not connected and each component of $G - F$ has property P_e^k . The edge extraconnectivity $\lambda_e^k(G)$ is the cardinality of the minimum edge extra-cuts.

Let D be a strongly connected digraph. An arc set S of D is a *restricted arc cut* of D if $D - S$ has a non-trivial strong component D_1 such that $D - V(D_1)$ contains

an arc. The *restricted arc connectivity* $\lambda'(D)$ is the minimum cardinality over all restricted arc cuts S .

In this paper, we study the 3-restricted edge (vertex) connectivity, based on the parameters of graph we obtain sufficient conditions for graphs to be λ_3 -optimal , super- λ_3 and super- κ_3 ; For restricted arc connectivity, we use neighborhood condition to obtain sufficient conditions for digraphs to be λ' -optimal; We also study the conditional connectivity of some special class of graphs and discuss the relation between inverse degree and connectivity.

I 3-restricted edge (vertex) connectivity of graphs

Studying the relation between diameter 、 girth 、 degree sequence 、 neighborhood condition and 3-restricted edge connectivity, We obtain sufficient conditions for graphs to be λ_3 -optimal; Using neighborhood condition 、 degree sequence 、 degree sum, we obtain sufficient conditions for triangle-free graphs to be super- λ_3 ; Using regular degree, we obtain sufficient conditions for regular graphs to be super- λ_3 ; Using diameter and girth of graph and line graph, we obtain sufficient conditions for graphs to be super- λ_3 and super- κ_3 .

II Restricted arc connectivity of digraphs

Let D be a strongly connected digraph. A strongly connected digraph D is called λ' -connected, if restricted arc cuts exist. If xy is an arc with $yx \notin A(D)$, then call $\xi'(xy) = \min\{d^+(x) + d^+(y) - 1, d^-(x) + d^-(y) - 1, d^+(y) + d^-(x), d^+(x) + d^-(y) - 1\}$ the arc degree of xy . If xy is an arc with $yx \in A(D)$, then call $\xi'(xy) = \min\{d^+(x) + d^+(y) - 2, d^-(x) + d^-(y) - 2, d^+(y) + d^-(x) - 1, d^+(x) + d^-(y) - 1\}$ the arc degree of xy . The *minimum arc degree* of D is $\xi'(D) = \min\{\xi'(xy) : xy \in A(D)\}$. A λ' -connected digraph is called λ' -optimal if $\lambda'(D) = \xi'(D)$.

We use neighborhood condition to obtain sufficient conditions for digraphs to be λ' -optimal.

III Conditional connectivity of special graphs

Let $G = (V, E)$, the Mycielskian of G is the graph $\mu(G)$ whose the vertex set is $V(\mu(G)) = V \cup V' \cup \{u\}$, where $V' = \{x' : x \in V\}$ and edge set $E(\mu(G)) = E \cup \{xy' : xy \in E\} \cup \{y'u : y' \in V'\}$. The vertex x' is called the twin of the vertex x (and x is the twin of x') and the vertex u is called the root of $\mu(G)$. For $n \geq 2$,

$$\mu^n(G) = \mu(\mu^{n-1}(G)).$$

The total graph T_n on n vertices can be obtained from the complete graph K_n by adding a loop to every vertex. We define $D_n[G] = G \otimes T_n$.

We study super connectivity of $\mu(G)$ and obtain necessary and sufficient conditions for $\mu(G)$ to be super (edge) connectivity; We obtain necessary and sufficient conditions for $D_n[G]$ to be super connectivity; We study the super connectivity of Kronecker product of bipartite graphs and complete graphs, super connectivity of Kronecker product of complete graphs、cycles、paths and complete graphs, super connectivity of Kronecker product of split graphs、the powers of cycle、the powers of path and complete graphs, and prove that they are super connected; We study the conditional connectivity of hypercube and folded hypercube and have the value of some conditional connectivity

IV Inverse degree and connectivity

Let inverse degree of graph G with no isolated vertex be

$$R(G) = \sum_{v \in V} \frac{1}{d(v)}.$$

We study the relation between inverse degree and n, δ, ξ to obtain sufficient conditions for graphs to be super edge connected and λ' -optimal.

目 录

中文摘要	ix
英文摘要	xiii
第一章 引言	
§1.1 相关背景与基本定义和符号	1
§1.2 本文主要结果	4
第二章 图的 3- 限制性边连通度	
§2.1 直径、围长下的 3- 限制性边连通度	7
§2.2 度序列、邻域与 3- 限制性边连通度	14
第三章 不含三角形的超 $-\lambda_3$ 连通图	
§3.1 引言	17
§3.2 超 $-\lambda_3$ 连通图的充分条件	17
第四章 超 $-\lambda_3$ 连通的正则图	
§4.1 引言	25
§4.2 主要结果	28
第五章 直径为 D 的图的超 $-\lambda_3$ 连通性和超 $-\kappa_3$ 连通性	
§5.1 引言	30
§5.2 超 $-\lambda_3$ 连通和超 $-\kappa_3$ 连通且直径为 D 的图	30
第六章 有向图的限制性弧连通度	
§6.1 引言	39
§6.2 λ' - 最优图的充分条件	39
第七章 两类特殊图的连通性	
§7.1 引言	47
§7.2 图 G 的 Mycielskian 变换的超连通性	47
§7.3 $D_n[G]$ 连通性	50
第八章 Kronecker 积图的连通性	
§8.1 引言	55
§8.2 二部图和完全图的 Kronecker 积的超连通性	55
§8.3 完全图、圈、路和完全图的 Kronecker 积的超连通性	58
§8.4 分裂图、圈的幂、路的幂和完全图的 Kronecker 积的超连通性	61
第九章 超立方体和折叠超立方体的条件连通性	

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文全文数据库