学校编码：10384　　　　分类号 ______ 密级 ______
学号：x2005170023　　　　UDC ________________

硕　士　学　位　论　文

具有 Dini 连续性系数的非线性椭圆方程组弱解的正则性

Partial Regularity for Weak Solutions of Nonlinear Elliptic Systems with Dini Continuous Coefficients

邱　亚　林

指导教师姓名: 谭　忠　教　授
专 业 名 称: 应　用　数　学

论文提交日期: 2008 年 9 月
论文答辩日期: 2008 年　月
学位授予日期: 2008 年　月

答辩委员会主席: ____________
评　阅　人: ____________

2008 **年　月**

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

声明人（签名）:

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目 录

Contents

摘　要

本文我们研究在自然增长条件下，具有 Dini 连续性系数的非线性椭圆方程组

$$-\mathrm{div}A(x,u,Du) = B(x,u,Du), \quad x \in \Omega$$

弱解 u(其梯度 Du 的增长指标为 $m=2$ 及 $1<m<2$) 的正则性问题。对于部分正则性证明的经典方法是”凝固系数法”，即通过”凝固系数”得到常系数方程组再把解跟由”凝固系数”后得到的常系数方程组所构成的 Dirichlet 问题的解进行比较, 得到重要的衰减估计并进行标准的迭代, 从而推出部分正则性结果。其中需要用到复杂而繁琐的反 Hölder 不等式或者 Gehring 引理，而且得到的 Hödler 指标不是最优的. 即：Hödler 正则性指标低于已知系数函数的 Hödler 连续性条件中的指标。本文采用部分正则性研究的新的方法－ $\mathcal{A}-$ 调和逼近方法，来研究具有自然增长条件的非线性偏微分方程组弱解的部分正则性. 这种新方法是通过 $\mathcal{A}-$ 调和逼近引理架起 $\mathcal{A}-$ 调和函数和非线性偏微分方程组之间的桥梁，使得我们能够根据文章的实际需要构造某个跟弱解 u 相关的特定函数，通过 $\mathcal{A}-$ 调和逼近引理，揭示了存在这样的 $\mathcal{A}-$ 调和函数在 L^2 意义下跟该特定函数靠得非常近，从而可以利用 $\mathcal{A}-$ 调和函数那些好的性质，推出需要的衰减 (Decay) 估计，由此得到部分正则性结果.

在自然增长条件下，当 $m=2$ 时，虽然 2002 年 Duzaar 和 Gastel 在文 [10]，袁秋宝和谭忠在文 [26] 中分别讨论了两类不同形式具有 Dini 连续性系数的非线性椭圆方程组弱解的正则性问题，但我们这里讨论的，是一类更为广泛的具有 Dini 连续性系数的非线性椭圆方程组，实际上它是 A 关于变量 (x,ξ) 的连续性为对所有的 $x,\tilde{x}\in\Omega$, $\xi,\tilde{\xi}\in\mathbb{R}^N$ 和 $p\in\mathbb{R}^{nN}$ 有下式成立：

$$(1+|p|)^{-1}|A(x,\xi,p)-A(\tilde{x},\tilde{\xi},p)| \le \kappa(|\xi|)\mu((|x-\tilde{x}|^2+|\xi-\tilde{\xi}|^2)^{\frac{\beta}{2}})$$

这一条件是对 2000 年 Duzaar 和 Grotowski 文 [14] 关于 A 假设条件的推广，关于这个问题以前并没有很好的结果.

在自然增长条件下，当 $1<m<2$ 时，由于 $\mathcal{A}-$ 调和逼近技巧已经不再适用，庆幸的是另一种类似于 p-Laplace 形式的 $\mathcal{A}-$ 调和逼近方法，使得我们可以对这类 Dini 系数非线性椭圆方程组弱解的部分正则性问题进行探讨。然而此刻却出现了积分函数的指数 $\frac{-1}{2}<\frac{m-2}{2}<0$ 是负的情形，这使得我们在 $m=2$ 时的技巧失效。为了克服这个困难，我们借鉴了 1989 年 Acerbi 和 Fusco 处理变分泛函极小的方法及陈淑红 [28] 处理 $1<m<2$ 情形下非线性椭圆方程组弱解的部分正则性问题的方法，推出相应的不等式，证明了在自然增长条件下的 Caccioppoli 不等式，并得到了在这种情行的最优部分正则性结果. 因此，本文在自然增长条件下的 Caccioppoli 不等式的证明是全新的，在 $1<m<2$ 情形下，弱解的部分正则性结果也是崭新的。

本文主要的创新点是：把系数 A 的 Hölder 连续性减弱为 Dini 连续性，弱解的部分正则性结论仍然成立.

下面是本文的两个主要结论：

(1) 当 $\mid A(x,\xi,p)-A(\widetilde{x},\widetilde{\xi},p)\mid\leq K(|\xi|)\mu((|x-\widetilde{x}|^2+|\xi-\widetilde{\xi}|^2)^{\frac{\beta}{2}})(1+|p|)$, 其中 $x,\overline{x}\in\Omega$, $\xi,\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N$, $p\in\mathbb{R}^{nN}$, 我们得到定理 2.1:

设 $u\in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ 是满足条件 $(H_1)-(H_3)$, $(\mu_1)-(\mu_3)$ 的 (2.2') 的弱解. 则存在一个相对闭集 Sing$u\subset\Omega$ 使得 $u\in C^1(\Omega\backslash\mathrm{Sing}u,\mathrm{R}^\mathrm{N})$. 进一步有 Sing$u\subset\Sigma_1\cup\Sigma_2$, 其中

$$\begin{aligned}\Sigma_1&=\{x_0\in\Omega:\liminf_{\rho\to0+}⨍_{B_\rho(x_0)}|Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2>0\},\text{和}\\ \Sigma_2&=\{x_0\in\Omega:\sup_{\rho>0}(|u_{x_0,\rho}|+|(Du)_{x_0,\rho}|)=\infty\},\end{aligned}$$

特别地， $L^n(\mathrm{Sing}u)=0$.

(2) 当 $1<m<2$, 在条件 $\mid A(x,\xi,p)-A(\widetilde{x},\widetilde{\xi},p)\mid\leq K(|\xi|)\mu(|x-\widetilde{x}|^m+|\xi-\widetilde{\xi}|^m)(1+|p|)^{\frac{m}{2}}$（其中 $x,\overline{x}\in\Omega$, $\xi,\overline{\xi}\in\mathbb{R}^N$, $p\in\mathbb{R}^{nN}$ ）下，我们得到定理 5.1:

设 $u\in W^{1,m}(\Omega,\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ 是满足条件 $(H_1)-(H_4)$, $(\mu_1)-(\mu_2)$ 和 $\sup_\Omega|u|<M$ 的 (2.2) 的弱解. 则存在一个相对闭集 Sing$u\subset\Omega$ 使得 $u\in C^1(\Omega\backslash\mathrm{Singu},\mathbb{R}^N)$.

进一步有 $\mathrm{Sing}u \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, 其中

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{x_0 \in \Omega : \liminf_{\rho\to 0+} ⨍_{B_\rho(x_0)} |Du - (Du)_{x_0,\rho}|^m > 0\}, \text{和} \\ \Sigma_2 &= \{x_0 \in \Omega : \sup_{\rho>0}(|u_{x_0,\rho}| + |(Du)_{x_0,\rho}|) = \infty\},\end{aligned}$$

特别地, $L^n(\mathrm{Sing}u) = 0$.

关键词: 非线性椭圆方程组; 次二次增长条件; Dini 连续性; 自然增长条件; 部分正则性; $\mathcal{A}-$ 调和逼近方法.

Abstract

In this paper, we consider regularity of the weak solution of the nonlinear elliptic systems of divergence form with Dini continuous coefficients under the controllable growth condition and natural growth condition:

$$-\mathrm{div}A(x,u,Du)=B(x,u,Du), \quad x\in\Omega$$

In most direct proof of partial regularity, one uses the method of "freezes the coefficients" to obtain the disired result.Precisely, by "freezes the coefficients" , we obtain an elliptic system with constant coefficients, and the solution of the Dirichlet problem associated to these coefficients with boundary date u and the solution itself canthenbe compared. Then we can obtain the important decay estimate by iterating and yielding the results of partial regularity. The complex and long reverse-Hölder inequality or the Gehring Lemma is needed in this procedure. What makes things worse is that the Hölder exponent of partial regularity obtained by this method is not optimal. It means that one just can get a Hölder exponent more litter than the one in the Hölder continuity condition of the given coefficient function. Here, we adopt the method of $\mathcal{A}$-harmonic approximation– which was first carried out by Duzaar and Grotowski. They considered the interior partial regularity of the weak solutions of nonlinear elliptic systems with Hölder continuous coefficients. The new method simplifies the procedure of the proof. In particular, we get the relatively satisfying partial regularity and optimal interior partial regularity.

Also, we use a new method — the method of $\mathcal{A}$-harmonic approximation, to consider partial regularity theory for weak solutions of nonlinear partial differen-

tial systems under controllable growth condition and natural growth condition, respectively. $\mathcal{A}$-harmonic approximation lemma — the key ingredient of the new method — sets up a bridge between $\mathcal{A}$-harmonic function and nonlinear partial differential systems, which makes us can construct a specified function corresponding with weak solutions u. The $\mathcal{A}$-harmonic approximation lemma reveals that there is a $\mathcal{A}$-harmonic function closing to the specified function in L^2. In order to making full use of those known properties of $\mathcal{A}$-harmonic function, one can derive the desired decay estimate and then obtain the partial regularity results.

Throughout the paper, we denote by m the growth exponent of the derivation of weak solutions. When $m = 2$ under the natural growth condition, as you know, there is no better results on the partial regularity theory of partial differential systems under growth condition. we deduce Caccioppoli second inequality under the natural growth condition by a new method.

In the case $1 < m < 2$, the method of $\mathcal{A}$-harmonic approximation is no longer suitable. Thanks to another $\mathcal{A}$-harmonic approximation method, where the function defined analogous as P-Laplace function, we can proceed to the proof of the optimal partial regularity result. However, a new problem has arisen. That is the exponent of the integral function of this situation takes on negative ($-\frac{1}{2} < \frac{m-2}{2} < 0$), which causes one can't use the technique as usually. In order to remove the hindrance, in light of the paper Acerbi and Fusco considered in 1989 for the partial regularity for minimizers of functional ,we use a new method to deduce the desired result.

The most important new ideas in this paper is that we weaken the assumption on A with Dini continuity instead of Hölder continuity. The followings are the

main results:

(1) When $| A(x,\xi,p) - A(\widetilde{x},\widetilde{\xi},p) | \leq K(|\xi|)\mu((|x-\widetilde{x}|^2 + |\xi-\widetilde{\xi}|^2)^{\frac{\beta}{2}})(1+|p|)$, where $x,\overline{x} \in \Omega$, $\xi,\overline{\xi} \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^{nN}$, we have Theorem 2.1:

Let $u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ be a weak solution of (2.2') under the assumptions $(H_1)-(H_3)$, $(\mu_1)-(\mu_3)$. Then there exists a relatively closed set $\mathrm{Sing}u \subset \Omega$ such that $u \in C^1(\Omega\backslash\mathrm{Sing}u,\mathbb{R}^N)$. Furthermore, $\mathrm{Sing}u \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, where

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{x_0 \in \Omega : \liminf_{\rho\to 0+} \fint_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 > 0\}, \quad \mathit{and} \\ \Sigma_2 &= \{x_0 \in \Omega : \sup_{\rho>0}(|u_{x_0,\rho}| + |(Du)_{x_0,\rho}|) = \infty\},\end{aligned}$$

and in particular, $L^n(\mathrm{Sing}u) = 0$.

（2） When $1 < m < 2$, and $| A(x,\xi,p) - A(\widetilde{x},\widetilde{\xi},p) | \leq K(|\xi|)\mu(|x-\widetilde{x}|^m + |\xi-\widetilde{\xi}|^m)(1+|p|)^{\frac{m}{2}}$, where $x,\overline{x} \in \Omega$, $\xi,\overline{\xi} \in \mathbb{R}^N$, $p \in \mathbb{R}^{nN}$, we have Theorem 5.1:

Let $u \in W^{1,m}(\Omega,\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ be a weak solution of (2.2) under the assumptions $(H_1)-(H_4)$, $(\mu_1)-(\mu_2)$ with $\sup_\Omega |u| = M$. Then there exists a relatively closed set $\mathrm{Sing}u \subset \Omega$ it such that $u \in C^1(\Omega\backslash\mathrm{Sing}u,\mathbb{R}^N)$. Furthermore $\mathrm{Sing}u \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, where

$$\begin{aligned}\Sigma_1 &= \{x_0 \in \Omega : \liminf_{\rho\to 0+} \fint_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^m > 0\}, \quad \mathit{and} \\ \Sigma_2 &= \{x_0 \in \Omega : \sup_{\rho>0}(|u_{x_0,\rho}| + |(Du)_{x_0,\rho}|) = \infty\},\end{aligned}$$

and in particular, $L^n(\mathrm{Sing}u) = 0$.

Key words: Nonlinear elliptic systems; Dini continuity; the natural growth condition; partial regularity; approximatively $\mathcal{A}$-harmonic technique.

第一章 引言

本文我们研究二阶非线性椭圆方程组在散度形式下弱解的部分正则性问题:

$$-\mathrm{div}A(x,u,Du)=B(x,u,Du) \quad 在\ \Omega\ 中. \tag{1.1}$$

其中 Ω 是 $\mathbb{R}^n$ $(n\geq 2)$ 中的有界区域, A 和 B 是定义在 $\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{nN}$ 上的可测函数, N 是满足 $N>1$ 的整数, $u:\Omega\to\mathbb{R}^N$ 是一个向量值函数.

受 Duzaar 和 Gastel 的论文 [10] 及陈淑红、谭忠的论文 [5] 以及袁秋宝, 谭忠的论文 [26] 启发, 与其他相关论文 ([5],[6],[7] 和 [26]) 不同, 这里我们把系数 A 的 Hölder 连续性减弱为 Dini 连续性, B 满足自然增长条件. 详细地说, 我们假设 A 关于变量 (x,ξ) 的连续性为对所有的 $x,\tilde{x}\in\Omega$, $\xi,\tilde{\xi}\in\mathbb{R}^N$ 和 $p\in\mathbb{R}^{nN}$ 有下式成立:

$$(1+|p|)^{-1}|A(x,\xi,p)-A(\tilde{x},\tilde{\xi},p)|\leq\kappa(|\xi|)\mu((|x-\tilde{x}|^2+|\xi-\tilde{\xi}|^2)^{\frac{\beta}{2}}) \tag{1.2}$$

其中 $\kappa:(0,\infty)\to[1,\infty)$ 是非减的, $\mu:(0,\infty)\to[0,\infty)$ 是非减且具有初值为 $\mu(0+)=0$ 的凹函数. 还要求对某个 $\alpha\in(0,1)$ 有 $r\mapsto r^{-\alpha}\mu(r)$ 是非增的, 并且

$$M(r)=\int_0^r\frac{\mu(\rho)}{\rho}d\rho<\infty \quad 对某个\ r>0. \tag{1.3}$$

我们通过调和逼近技巧得到定理的结论, 首先我们证明了 Caccioppoli 第二不等式, 这样我们将不再需要用繁琐而复杂的反 Hölder 不等式或 Gehring 引理。我们主要的结果可以叙述如下: 另外假设 (如 A 的椭圆性条件以及 A 关于变量 p 的正则性和增长性)$(1+|p|)^{-1}A(x,\xi,p)$ 满足 (1.2) 和 (1.3). 在自然条件下, 令 $u\in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$ 是 (1.1) 的弱解, 则 u 在一个 Lebesgue 测度为零的相对闭奇异集外是 C^1 的. 进一步地, 对 $x_0\in\Omega\backslash\mathrm{Sing}u$, u 的导数 Du 在 x_0 的某个领域内具有连续模 $r\mapsto M(r)$. 我们的结论在 $\mu(r)=r^\alpha,0<\alpha<1$ 下是最优的, 即在这种情况下有 $M(r)=\alpha^{-1}r^\alpha$ 和 $C^{1,\alpha}$ 正则性的最优结果.

条件 (1.3) 在具有连续性系数的椭圆方程的正则性理论中是很自然的，这个就是 Dini 条件. 尽管 Dini 他本人 [27] 在一个世纪前用了一个稍弱的条件，在前半个世纪，对线性椭圆偏微分方程理论的研究有一些重要结果，如 [19]. 条件 (1.3)(见第 3 部分的 (μ_3)) 在解决几乎极小椭圆变分问题的正则性理论中作用很大，最早由 Almgren [1](还可参考 [2][12][15][16] 和 [24]) 引入. 在 [12] 中 Duzaar 和 Steffen 证明了对一般椭圆作为被积函数的可求长线几乎可取极小. 在对给定的边界正则性的假设和定义几乎极小线时的函数假设与上面 μ 的连续模是类似的. 最后，在最近的一篇文章中， Kovats[21] 研究了具有形如 $F(D^2u) = f$ 的完全非线性椭圆方程解的问题，结论是如果 f 连续并且连续模 μ 满足 (1.3), 则具有连续性模 $r \mapsto M(r)$ 的解对二阶导数 D^2u 是 C^2 的.

就我们的认知而言，对早期的在 Dini 连续性系数下，关于部分正则性结果的证明，在处理 (1.1) 相应的齐次方程弱解的导数项的高阶积分时有技术性的困难，在奇异集外 Du 的最优连续模不能用那种方法得到. 然而本文采取的方法不仅使我们可以处理 (1.1) 相应的齐次方程也可以处理非齐次方程 (1.1) ，因此，在以下第二、三、四章中主要讨论 (1.1) 相应的齐次方程弱解部分正则性问题，而对 (1.1) ，只给出相应的结果而不加以证明.

第二章 基本假设和主要结论

设 Ω 是一个有界区域. 我们首先考虑下面二阶椭圆方程组的散度形式

$$-\mathrm{div}A(x,u,Du)=B(x,u,Du) \quad \text{在 } \Omega \text{ 中} \tag{2.1}$$

我们研究方程组 (2.1), 其中系数 A 满足下面的假设, m 是一个实数:

(H_1) $A(x,\xi,p)$ 是关于 p 具有有界连续导数的可微函数，即存在 $L>0$ 使得

$$\left|\frac{\partial A}{\partial p}(x,\xi,p)\right|\le L(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}} \quad \text{对所有的 } (x,\xi,p)\in\Omega\times\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^{nN};$$

(H_2) $A(x,\xi,p)$ 是一致强椭圆的，也就是说，存在某个 $\lambda>0$ 使得

$$\left(\frac{\partial A}{\partial p}(x,\xi,p)\nu\right)\nu\ge\lambda(1+|p|^2)^{\frac{m-2}{2}}|\nu|^2 \quad \text{对所有的} x\in\Omega,\xi\in\mathbb{R}^N,p,\nu\in\mathbb{R}^{nN}\text{成立;}$$

(H_3) 存在一个连续模 $\mu:(0,\infty)\to[0,\infty)$ 和非减函数 $\kappa:(0,\infty)\to[1,\infty)$ ，对于某一 $\beta\in(0,1)$ 使得

$$|A(x,\xi,p)-A(\tilde{x},\tilde{\xi},p)|\le\kappa(|\xi|)\mu\left((|x-\tilde{x}|^m+|\xi-\tilde{\xi}|^m)^{\frac{\beta}{m}}\right)(1+|p|)^{\frac{m}{2}}$$

对所有的 $x,\tilde{x}\in\Omega,\xi,\tilde{\xi}\in\mathbb{R}^N$, 和 $p\in\mathbb{R}^{nN}$成立;

不失一般性，我们假设 $\kappa\ge1$ 并且下面条件成立

(μ_1) μ 是非减的且 $\mu(0+)=0$ ， $\mu(1)=1$;

(μ_2) μ 是凹的，在证明定理的正则性时要求对某个指数 $\alpha\in(0,1)$ ， $r\mapsto r^{-\alpha}\mu(r)$ 是非增的。

(μ_3) Dini 条件:

$$M(r):=\int_0^r\frac{\mu(\rho)}{\rho}d\rho<\infty \text{ 对某个 } r>0.$$

(H_4) 存在常数 a 和 b ，使得非齐次项 $B(x,\xi,p)$ 满足自然增长条件即

$$|B(x,\xi,p)|\le a|p|^m+b,$$

或

$$|B(x,\xi,p)| \le |p|^{m-\tau} + b$$

当 $1 < m < 2$ 时，称自然增长条件为次二次自然增长条件。

定义 2.1 称 $u \in W^{1,m}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ 为在结构性条件下 $(H_1)-(H_4)$ 和 $(\mu_1)-(\mu_3)$ 的弱解，如果对所有的 $\varphi \in C_0^\infty(\Omega,\mathbb{R}^N)$, 恒有

$$\int_\Omega A(x,u,Du)\cdot D\varphi dx = \int_\Omega B(x,u,Du)\cdot \varphi dx \tag{2.2}$$

当 $B(\cdot,\cdot,\cdot)\equiv 0$ 时 (2.2) 成为

$$\int_\Omega A(x,u,Du)\cdot D\varphi dx = 0 \tag{2.2$'$}$$

我们可得到下面的定理

定理 2.1 设 $u \in H^{1,2}(\Omega,\mathbb{R}^N)$ 是方程 (2.2') 的满足条件 $(H_1)-(H_3)$, $(\mu_1)-(\mu_3)$ 的弱解， $m=2$. 则存在一个相对闭集 $\mathrm{Sing}u \subset \Omega$ 使得 $u \in C^1(\Omega\backslash\mathrm{Singu},\mathrm{\mathbb{R}^N})$. 进一步有 $\mathrm{Sing}u \subset \Sigma_1 \cup \Sigma_2$, 其中

$$\begin{aligned}
\Sigma_1 &= \{x_0\in\Omega : \liminf_{\rho\to 0+} -\!\!\!\!\!\!\int_{B_\rho(x_0)} |Du-(Du)_{x_0,\rho}|^2 > 0\}, \text{和} \\
\Sigma_2 &= \{x_0\in\Omega : \sup_{\rho>0}(|u_{x_0,\rho}| + |(Du)_{x_0,\rho}|) = \infty\},
\end{aligned}$$

特别地， $L^n(\mathrm{Sing}u) = 0$.

第三章　预备知识

在这章为证第二章的定理 2.1，首先叙述几个重要引理或不等式，包括 $\mathcal{A}$- 调和逼近引理和线性理论中的两个标准估计— Poincare 不等式和一个来源于 Campanato[3][4] 的结果：

引理 3.1($\mathcal{A}$- 调和逼近引理): 考虑固定的正数 λ, L 和 $n, N \in \mathbf{N}$, 且 $n \geq 2$. 若对任意给定 $\varepsilon > 0$ 的，存在具有下列性质的 $\delta = \delta(n, N, \lambda, L\varepsilon) \in (0,1]$；对任意的 $A \in Bil(R^{nN})$，满足

$$A(\nu, \nu) \geq \lambda |\nu|^2, \qquad \nu \in R^{nN}, \tag{3.1}$$

和

$$|A(\nu, \overline{\nu})| \leq L|\nu||\overline{\nu}|, \qquad \nu \in R^{nN}, \overline{\nu} \in R^{nN}, \tag{3.2}$$

对任意的 $g \in H^{1,2}(B_\rho(x_0), R^N), (\rho > 0, x_0 \in R^N)$，满足

$$\fint_{B_\rho(x_0)} |\ Dg\ |^2\ dx \leq 1 \tag{3.3}$$

和

$$\left| \fint_{B_\rho(x_0)} A(Dg, D\varphi) dx \right| \leq \delta \sup_{B_\rho(x_0)} |\ D\varphi\ | \qquad \varphi \in C_0^1(B_\rho(x_0), R^N), \tag{3.4}$$

则存在 $\mathcal{A}$- 调和函数满足

$$\fint_{B_\rho(x_0)} |\ Dh\ |^2\ dx \leq 1 \quad 和 \quad \rho^{-2} \fint_{B_\rho(x_0)} |\ h - g\ |^2\ dx \leq \varepsilon.$$

其中调和函数定义如下

定义 3.1 对于引理 3.1 中定义的 $A \in Bil(R^{nN})$，若函数 $h \in H^{1,2}(B_\rho(x_0), R^N)$ 满足

$$\int_\Omega A(Dh, D\varphi) dx = 0, \qquad \varphi \in C_0^1(\Omega, R^N).$$