学校编码：10384　　分类号 ________ 密级 ________

学号：19020061151754　　UDC ________

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

鲁棒部分二次特征值配置问题的数值方法

Numerical Approaches to Robust Partial Quadratic Eigenvalue Assignment Problems

王金伟

指导教师姓名: 白正简 教授

专　业　名　称: 计算数学

论文提交日期: 2009 年 4 月

论文答辩日期: 2009 年 6 月

学位授予日期: 2009 年 7 月

答辩委员会主席: ____________

评　　阅　　人: ____________

2009 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　年　月　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　月　日

摘　　要

二阶控制系统广泛应用于大型挠性空间结构控制、地震工程、多柔体系统控制、阻尼陀螺系统和机器人控制设计以及结构动力学中的震动分析等工程领域。

本文考虑状态反馈二阶控制系统的鲁棒部分二次特征值配置。为了减小反馈矩阵范数和闭环特征值的敏感性，我们将问题转化为两个不同的无约束非线性最小化问题。对每一个无约束非线性最小化问题，我们提出了新的价值函数。通过Sylvester方程参数化，我们为所提出的价值函数推导出明确的梯度公式。然后，我们应用梯度方法求解相应的最小化问题。数值试验表明我们的方法是有效的。

关键词： 鲁棒部分二次特征值配置，二阶控制系统，Sylvester方程

Abstract

Second-order control systems arise in a remarkable variety of applications such as large flexible space structure control, earthquake engineering, the control of flexible multibody systems, the controller design for damped gyroscopic systems, robotics, and the vibration in structural dynamics.

In this thesis we consider the robust partial quadratic eigenvalue assignment problem for second-order control systems by state feedback. To reduce the feedback norms and sensitivity of the close-loop eigenvalues, we formulate the problem as two different unconstraint nonlinear minimization problems with new proposed cost functions. Explicit analytic expressions of the gradients of the cost functions are derived via the Sylvester equation-based parametrization. Then we employ gradient-based techniques to solve the minimization problems. Numerical tests are also reported to illustrate the effectiveness of the proposed approaches.

Keywords: Robust partial quadratic eigenvalue assignment, second-order control system, Sylvester equation

目　　录

第一章　引言

1.1　部分二次特征值配置问题

我们考虑如下二阶控制系统：

$$M\ddot{q}(t) + D\dot{q}(t) + Kq(t) = Bu(t). \tag{1.1}$$

这样的二阶控制系统在工程应用领域中应用广泛。这主要包括大型挠性空间结构控制、地震工程、多柔体系统控制、阻尼陀螺系统和机器人控制设计以及结构动力学中的震动分析等,见文献[1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13]。在许多应用中，$n\times n$实矩阵M, D, K分别被称为质量矩阵，阻尼矩阵和刚度矩阵，$n\times m$实矩阵B为输入矩阵（$m \le n$）。n维向量$q(t)$和$u(t)$分别代表状态向量和控制向量。本文中我们假设M, D, K均为实对称矩阵，且有M正定，K半正定，这种情形通常出现在实际应用中，见文献[14, 15, 16]。

通过变量分离$q(t) = xe^{\lambda t}$,其中$x \in \mathbb{R}^n$为待确定的常向量，λ为待定的数量，我们得到方程(1.1)的一般解，而且这样的一般解是由如下二次特征值问题的解所决定的：即求n维非零向量x和数量λ满足关系式：

$$(\lambda^2 M + \lambda D + K)x = 0. \tag{1.2}$$

记$P(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda D + K$. 矩阵多项式$P(\lambda)$称为开环二次束，$(\lambda, x)$称为$P(\lambda)$的特征对。二次特征值问题已有很多文献讨论过, 如[14]等。

在实际工程问题中，$P(\lambda)$的所有特征值中有一小部分是我们不希望出现的。例如在桥梁结构中，这一小部分对应的特征值可能会引起整个结构的共振现象，共振是我们要避免的。因此希望通过控制外力$u(t)$来改变$P(\lambda)$的特征值的结构。

取$u(t)$（称为状态反馈控制器）为如下形式：

$$u(t) = F^T\dot{q}(t) + G^T q(t),$$

其中F, G为待确定的$(n\times m)$实矩阵，称为反馈矩阵。将$u(t)$代入（1.1）,可得如下闭环系统

$$M\ddot{q}(t) + (D - BF^T)\dot{q}(t) + (K - BG^T)q(t) = 0 \tag{1.3}$$

类似（1.1）可知（1.3）由如下的矩阵束来决定

$$P_c(\lambda) = \lambda^2 M + \lambda(D - BF^T) + (K - BG^T) \tag{1.4}$$

称$P_c(\lambda)$为闭环二次束。

对于$P(\lambda)$和$P_c(\lambda)$的特征值之间的关系，我们的要求是在引入反馈矩阵F, G之后，$P_c(\lambda)$能够将$P(\lambda)$的一小部分已知的不好的特征值替换掉，同时保留原问题$P(\lambda)$的剩余绝大部分特征值不变，这一性质也被称为无溢出性[17]。这一问题称为部分二次特征值配置问题。为了研究部分二次特征值配置问题，我们先回顾一下一阶控制系统的特征值配置问题。

1.2 一阶控制系统的特征值配置问题

考虑如下的一阶控制系统

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \tag{1.5}$$

其中$A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}^{n\times m}, u(t) = -Kx(t), K \in \mathbb{R}^{m\times n}, x(t) \in \mathbb{R}^n$。将 $u(t) = -Kx(t)$ 代入（1.5）可得

$$\dot{x}(t) = (A - BK)x(t). \tag{1.6}$$

系统（1.6）由矩阵束$(A - BK)$的性质来决定。标准特征值配置问题就是寻找状态反馈矩阵K，使得矩阵束$(A - BK)$ 具有给定的谱集。特征值配置问题可以分为完全配置和部分配置。完全配置问题中解K的存在性唯一性条件在文献[18]，解法见[18]，[19]，[20]，[21]，[22]，[23]等。这里我们更关心的是部分特征值配置的问题。

设$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots, \lambda_n\}$是$A$的谱集，$\{\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p\}$（$p \le n$）是自共轭的。给定$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\}$也是自共轭的集合，并且

$$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p\} \cap \{\lambda_1, \cdots, \lambda_n\} = \emptyset.$$

部分特征值配置问题即是找到$m \times n$矩阵K,使得矩阵束$(A - BK)$的谱集为

$$\{\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p, \lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots, \lambda_n\}.$$

文献[24]给出了该问题的一种解法。

1.3 鲁棒性

在一阶控制系统（1.5）的特征值配置问题中，对于给定的矩阵A, B，我们希望找到矩阵K使得矩阵$M = A - BK$具有给定的特征值集。这样的K在一定条件下存在，但不唯一，因此要选取合适的K。如果解矩阵K满足：M的特征值对于系数矩阵A, B的扰动不敏感，那么称这样的K是鲁棒的。有关一阶特征值配置问题鲁棒性的数值算法我们可以参考文献[18],[25],[26],[27],[28],[29]等。Brahma在[16]中总结了可以用来度量特征值配置问题鲁棒性的几个条件：

- M的特征矩阵X的F-范数条件数$Cond_F(X) := \|X\|_F\|X^{-1}\|_F$或者等价的$\|X\|_F^2 + \|X^{-1}\|_F^2$。
- M的特征矩阵X的酉性或正交性，$tr(I - X^H X)^2$。
- M的特征矩阵X的F-范数条件数与实际应用中最小范数的加权：

$$\frac{1}{2}(\|X\|_F^2 + \|X^{-1}\|_F^2) + \frac{1}{2}(1-\alpha)\|K\|_F^2, \quad 0 \le \alpha \le 1.$$

本文组织如下：在第二章，我们简短介绍部分二次特征值配置问题的一般解和已有鲁棒性数值方法。在第三章，我们考虑鲁棒部分二次特征值配置问题，将问题转化为两种不同的无约束非线性最小化问题，并给出了价值函数的梯度的明确表达式和相应的数值算法。在第四章，我们通过数值试验，比较了不同目标函数下解的鲁棒性。最后，在第六章，我们得出了一些结论性评价。

本文中的符号记号约定如下：

$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_{2n})$
$=P(\lambda)$的所有特征值构成的对角矩阵。

$\Lambda_1 = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)$
$=P(\lambda)$的要被替换的特征值构成的对角矩阵。

$\Lambda_2 = diag(\lambda_{p+1}, \lambda_{p+2}, \cdots, \lambda_{2n})$
$=P(\lambda)$的将要被保留的特征值构成的对角矩阵。

$\Lambda_1' = diag(\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_p)$
$=$新的特征值构成的对角矩阵。

$X = (x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$
$=P(\lambda)$的特征值对应的特征向量构成的矩阵。

$X_1 = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$
$=\Lambda_1$中特征值对应的特征向量构成的矩阵。

$X_2 = (x_{p+1}, x_{p+2}, \cdots, x_{2n})$
$=\Lambda_2$中特征值对应的特征向量构成的矩阵。

$Y_1 = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$
$=\Lambda_1'$中特征值对应的特征向量构成的矩阵。

$\|X\|_F = X$ 的Frobenius 范数。

$\Omega(A) = A$的谱集。

$tr(A) = A$的迹。

$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$分别表示全体$n$维实数，复数向量，$\mathbb{R}^{n\times m}, \mathbb{C}^{n\times m}$分别表示全体（$n\times m$）维实，复矩阵，$I$表示单位矩阵，$x^T$表示向量$x$的转置，$A^T$表示矩阵$A$的转置，$x^H$表示向量$x$的共轭转置，$A^H$表示矩阵$A$的共轭转置，$\bar{A}$表示矩阵$A$的共轭，$A^\dagger$表示矩阵$A$的Moore-Penrose广义逆, $Cond_F(A)$表示A在$F-$范数下的条件数，$vec(A)$表示把矩阵A按照列向量拉直为一个大的列向量，$A\otimes B$代表两个矩阵A和B的Kronecker积。