学校编码：10384　　分类号：　　密级：
学号：B200423014　　UDC：

厦门大学
博 士 学 位 论 文

匹配可扩理论的若干新结果
Some New Results on Matching Extension Theory

翟 绍 辉

指导教师姓名：郭晓峰　教授
专 业 名 称：应 用 数 学
论文提交日期：2007 年 5 月
论文答辩时间：2007 年 6 月
学位授予日期：2007 年　月

答辩委员会主席：
评　　阅　　人：

2007 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“∨”）

作者签名：　　　　　　日期：　　　年　月　日

导师签名：　　　　　　日期：　　　年　月　日

摘　要

匹配理论是图论中一个重要的基础分支，它不仅对认识图的结构有重要作用，而且也广泛的应用到组合优化，理论化学等研究领域。匹配可扩理论是匹配理论中热门的研究方向，已产生了许多有价值的结论，特别是引入了 k-可扩图、n-因子临界图、(n,k,d)-图、k-圈共振图等一系列图类，这些概念的引入对进一步揭示图的结构有重要的贡献。本文主要研究了 1-可扩图中可去耳朵数的下界，图的分数匹配可扩性，奇图（阶为奇数）的匹配可扩性以及如何用最少的完美匹配覆盖图中所有边等问题。

设 G 是一个图。如果删除 G 中任意 n 个点后所得的余图有 k-匹配，并且任意的 k-匹配都可以扩充为该余图的一个亏 d-匹配，那么称 G 是一个 (n,k,d)-图 [1]。显然这一概念是 k-可扩图和 n-因子临界图的推广。k-可扩图对应的是 $(0,k,0)$-图，n-因子临界图对应的是 $(n,0,0)$-图。本文我们也称 $(0,k,1)$-图是几乎 k-可扩图。下面是本文的主要结果：

1. 改进了 Carvalho，Lucchesi 与 Murty [2] 给出的 1-可扩图中可去耳朵数的下界，证明了任意一个 1-可扩图 G 至少有 $\chi'(G)$ 个边不交的可去耳朵，其中 $\chi'(G)$ 表示图 G 的边色数；并得到了 1-可扩图中可去边的一些性质。

2. 设 G 是一个 1-可扩图，$\chi'_e(G)$ 表示覆盖 G 中所有边所需最少完美匹配的数目，称为图 G 的 excessive 指数。我们给出了 $\chi'_e(G)$ 的一个紧的上界；对任意正整数 $k \geq 3$，构造了一个图 G 使得 $\Delta(G) = 3$ 但 $\chi'_e(G) = k$；进而研究了乘积图 $G \times H$ 的 excessive 指数 $\chi'_e(G \times H)$。

3. 改进了已有的 (n,k,d)-图的刻画；给出了几乎 k-可扩图和几乎 k-可扩二部图的刻画；研究了几乎 k-可扩图与 n-因子临界图之间的关系，去边和加边对几乎 k-可扩图的影响以及平面奇图的匹配可扩性。

4. 给出了分数 k-可扩图的两个充分条件和极小分数 k-可扩图的刻画；证明了分数 k-可扩二部图与 k-可扩二部图是等价的；并研究了分数 k-可扩图与 n-因子临界图之间的关系。(关于分数 k-可扩图的概念见第五章)

关键词： 完美匹配；k-可扩图；几乎 k-可扩图

Abstract

Matching theory is an important and elementary branch of Graph Theory. It not only benefits to understand the structure of graphs but also has widely applications in combinatorial optimization and theoretical chemistry. Matching Extension Theory is a popular subject in matching theory. Many valuable results have been obtained. In particular, some new concepts and new classes of graphs were introduced, for example, k-extendable graphs, n-factor-critical graphs, (n,k,d)-graphs and k-cycle resonant graphs, etc. Clearly, the above graphs are useful to further studying the structure of graphs. In the paper, we mainly study the lower bound of removable ears of 1-extendable graphs, extendability of fractional matching of graphs, matching extension in odd graphs and excessive index of 1-extendable graphs.

For a graph G, if when deleting any n vertices from G the remaining subgraph of G contains a k-matching and each k-matching of the subgraph can be extended to a defect-d-matching of the subgraph, then G is called a (n,k,d)-graph. Liu and Yu [1] at the first time introduced the concept which is a generalization of k-extendable graphs and n-factor-critical graphs. Clearly, each k-extendable graph is $(0,k,0)$-graph and each n-factor-critical graph is $(n,0,0)$-graph. In the paper, we also call $(0,k,1)$-graph is near k-extendable graph. The main contributions of the paper are as follows:

1. We improve the lower bound for the number of removable ears of 1-extendable graphs which is obtained by Carvalho, Lucchesi and Murty in [2], and prove each 1-extendable graph G has at least $\chi'(G)$ edge-disjoint removable ears, where $\chi'(G)$ denotes the edge-chromatic number of G. In addition, we obtain some properties of removable edges of 1-extendable graphs.

2. Let G be a 1-extendable graph and $\chi'_e(G) = \min\{|\mathscr{M}| : \mathscr{M}$ is a set of perfect matchings of G and $\bigcup_{M\in\mathscr{M}} M = E(G)\}$. We give a tight upper bound of $\chi'_e(G)$. For any positive integer $k \geq 3$, we can construct a graph such that $\Delta(G) = 3$ and $\chi'_e(G) = k$, where k may be enough large. In addition, we consider the excessive

index of the Cartesian product of two graphs.

3. We improve the characterization of (n, k, d)-graphs, characterize near k-extendable graphs and near k-extendable bipartite graphs, and consider the relation of near k-extendable graphs and n-factor-critical graphs. In addition, we also consider the impact of adding or deleting an edge to near k-extendable graphs and study matching extension of planar odd graphs.

4. We obtain two sufficient conditions of fractional k-extendable graphs, characterize minimally fractional k-extendable graphs, and prove that a bipartite graph G is fractional k-extendable if and only if G is k-extendable graph. In addition, we consider the relation of fractional k-extendable graphs and n-factor-critical graphs. (For the concept of fractional k-extendable graphs, the reader is referred to Chapter 5)

Key Words: Perfect Matching; k-extendable Graphs; Near k-extendable Graphs

目　录

Contents

第一章 序 言

§1.1 匹配可扩理论的一些研究背景

对于一个图 G，用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。如果 G 有偶（奇）数个顶点，则称 G 是偶（奇）图。假设 S 是 $V(G)$ 的一个子集，记 $c_o(G-S)$ 为 $G-S$ 中所有奇分支的数目。记 $N_G(S)$ 为 $G-S$ 中所有与 S 中至少一个点相邻的点集。如果没有特别说明，我们用 $N(S)$ 代替 $N_G(S)$。假设 M 是 $E(G)$ 的子集，如果 M 中任意两条边都没有公共端点，则称 M 是 G 的一个匹配；如果 $|M|=k$，则称 M 是 G 中的 k-匹配。特别的，如果 G 中没有匹配 M' 使得 $|M'|>|M|$，则称 M 是 G 中的最大匹配。假定 d 是一个非负整数，G 中的一个匹配 M 称为是亏 d-匹配如果 M 恰好饱和 G 中 $|V(G)|-d$ 个顶点，特别的，如果 $d=0$ 或 1，则称 M 分别是 G 中的完美匹配和几乎完美匹配。设 H 是图 G 中一个圈，如果 $G-V(H)$ 有完美匹配，则称 H 是 G 中的好圈。显然，奇图中的好圈是奇圈。

如果没有特别说明，本文仅考虑有限的连通简单图。对于在本文中出现但没有定义的符号和术语请参阅 [3-6]。

匹配理论作为图论的一个基础分支已有一百多年的研究历史，它的提出与某些实际应用问题有关。随着研究的不断深入，它不但自身发展成为图论的一个内容丰富的重要分支，而且也广泛应用到其它数学分支，如组合优化，化学图论，数学建模等。Lovász 和 Plummer 在其匹配理论专著 [5] 对此作了详细介绍。

匹配理论早期的研究工作主要集中在如何判定一个图是否存在着完美匹配。Petersen 在这方面做了先驱性的工作，他在 1891 年的一篇论文中首先证明了任意连通无割边的 3-正则图都有完美匹配。

特别的对于二部图，Hall 给出了存在完美匹配的一个充分必要条件：

定理 1.1.1 [5] (Hall). 一个二部图 $G=(A,B)$ 有完美匹配当且仅当
（1）$|A|=|B|$；
（2）对任意 $X\subseteq A$，都有 $|N(X)|\geq|X|$ 成立。

后来，Tutte 在 1947 年给出了判定一个图是否存在完美匹配的一个充分必要条件：

定理 1.1.2 [5] (Tutte). 一个图 G 有完美匹配当且仅当对任意 $S \subseteq V(G)$，都有 $c_o(G-S) \leq |S|$ 成立。

上述 Tutte 定理也给出了一个没有完美匹配图的刻画，即只需要在任意一个没有完美匹配的图 G 中找到一个点集 S 使得 $G-S$ 中至少有 $|S|+1$ 个奇分支，也称这样的点集 S 为 Tutte 集。但实际上这个 Tutte 集不容易找到。后来 Callai 与 Edmonds [5] 分别给出了所谓的 Canonical 分解，即 Callai-Edmonds 结构定理。在引出这个定理之前，首先我们回忆以下定义。

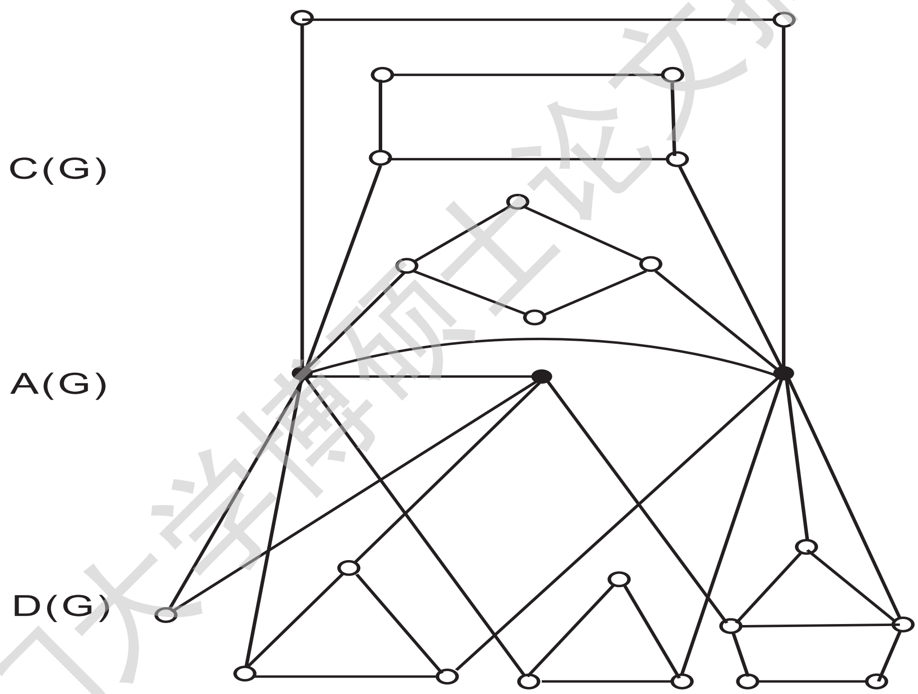

Figure 1: Gallai-Edmonds 结构图

假设 G 是一个图，$D(G)$ 表示 G 中所有至少被 G 中一个最大匹配未饱和的顶点所组成的集合，$A(G)$ 是表示 $V(G)-D(G)$ 中至少与 $D(G)$ 中一个顶点相邻的顶点集合，$C(G)=V(G)-D(G)-A(G)$ (如 Figure 1 所示)。记 $\nu(G)$ 表示 G 中最大匹配的边的数目，$G[S]$ 表示由 $S \subset V(G)$ 所导出的子图。一个二部图 $G=(A,B)$ 称为有正盈余（对于 A）如果对任意 $\emptyset \neq X \subset A$ 都有 $|N(X)|>|X|$ 成立。

定理 1.1.3 [5] (Callai-Edmonds 结构定理). 假设 G 是一个图，$D(G)$、$A(G)$ 和 $C(G)$ 如上所定义，则有以下条件成立。

（1） $D(G)$ 的导出子图的每个分支都是因子临界的；

（2） $C(G)$ 所导出的子图有完美匹配；

（3） 删去 $C(G)$ 中所有顶点和 $A(G)$ 所生成的边，并且分别收缩 $D(G)$ 的导出子图的每个分支为一个顶点，则所得到的新图是二部图并且有正盈余 (对于 A)；

（4） G 的最大匹配包含 $D(G)$ 中每个分支的几乎完美匹配，$C(G)$ 中每个分支的完美匹配和饱和 $A(G)$ 中所有顶点与 $D(G)$ 中不同分支的匹配；

（5） $\nu(G) = \frac{1}{2}(|V(G)| - c(D(G)) + |A(G)|)$，这里 $c(D(G))$ 表示由 $D(G)$ 所导出子图的分支数目。

以上定理解决了如何判定一个图是否存在完美匹配和没有完美匹配的图的结构，然而它还不足以刻画（没）有完美匹配且有特定性质的图的结构。为此，人们陆续引入了各种图类，如 1-可扩图 (也称匹配覆盖图)、因子临界图、双临界图。 Lovász 和 Plummer 在专著 [5] 中介绍了这些图类的性质及其构造方法。自 1980 年以来，匹配可扩理论得到了迅速的发展，至此已有许多新的图类被引入, 例如 k-可扩图、n-因子临界图、(n,k,d)-图、k-圈共振图等。

以下我们列举一些在匹配可扩理论中较重要的图类及其主要性质。

1. k-可扩图 (k-extendable graphs)

假设 G 是一个偶图，k 是非负整数且 $2k \leq |V(G)| - 2$。如果 G 中有 k-匹配并且任意 k-匹配都可以扩充为 G 的一个完美匹配，则称 G 是 k-可扩图 [7]。特别的，0-可扩图指具有完美匹配的图。这一概念是由 Plummer 在 1980 年首先引入，至此已有许多更深入的研究 [7-35]，特别的，对于 1-可扩图的研究成果可参阅 [2,5,36-46]。

k-可扩图的研究始于对 1-可扩图的研究，而 1-可扩图有许多良好的性质，例如：

定理 1.1.4 [5]. 若 G 是一个 1-可扩图，e_1, e_2 是 G 的任意两条边, 则 e_1, e_2

在 G 的一个好圈上。

Hetyei 证明了基本二部图就是 1-可扩图，并且刻画了 1-可扩二部图的结构:

定理 1.1.5 [5] (Hetyei). G 是一个 1-可扩二部图当且仅当 $G = e + P_1 + P_2 + ... + P_r$, 这里 e 是一条边，而每个 P_i 都是一条奇长路, 且 P_i 的两个端点分别在二部图 $e + P_1 + P_2 + ... + P_{i-1}$ 的二分类中。

Hetyei 形象的称路 P_i 为耳朵, 而称以上分解为 1-可扩二部图 G 的一个耳朵分解。后来，Lovász 与 Plummer [5] 利用类似概念，刻画出一般 1-可扩图的结构，即双耳朵定理 (见第二章的定理 2.1.6)。

为了寻找具有完美匹配图中完美匹配数的下界和决定匹配多面体的维数，Lovász [43]，Lovász 与 Plummer [5] 和 Edmonds, Lovász 与 Pulleyblank [47] 得到了 brick 分解 (brick decomposition) 和紧割分解 (tight cut decomposition)，即任意一个具有完美匹配的图，通过 brick 分解或紧割分解都可以分解成唯一的一些 bricks 和 braces (2-可扩二部图)。Lovász [43] 证明了 2-可扩图或者是 brick 或者是 brace。对于 brick，Carvalho，Lucchesi 与 Murty [40] 给出了构造 brick 的方法，Mccaig [48] 给出了 brace 的构造方法。

k-可扩图是 1-可扩图的概念推广，以下是 Plummer 在 [7,25] 得到的一些 k-可扩图的基本性质。

定理 1.1.6 [7]. 若 G 是一个 k-可扩图，则图 G 也是一个 $(k-1)$-可扩图，这里 $k \geq 1$。

定理 1.1.7 [7]. 若 G 是一个 k-可扩图，那么 G 是 $(k+1)$-连通的。

定理 1.1.8 [25]. 设 $G = (A, B)$ 是连通的二部图。假定 k 是正整数且有 $2k \leq |V(G)| - 2$，那么下面三个条件等价。

（1）G 是 k-可扩图;

（2）$|A| = |B|$ 且对任意 $\emptyset \neq X \subset A$ 满足 $|X| \leq |A| - k$，都有 $|N(X)| \geq |X| + k$ 成立;

（3）对任意 $u_1, \ldots, u_k \in A$ 和任意 $w_1, \ldots, w_k \in B$，$G' = G - u_1 - \cdots - u_k - w_1 - \cdots - w_k$ 有完美匹配。

Yu [49]，Lou [20] 和 Chen [50] 分别给出如下关于 k-可扩图的 Tutte 型刻画:

定理 1.1.9 [49]. 一个图 G 是 k-可扩图 ($k \geq 1$) 当且仅当对 $V(G)$ 的任意子集 S，以下两个条件均成立。
（1）$c_o(G-S) \leq |S|$；
（2）若 $c_o(G-S) = |S| - 2k$ ($0 \leq k \leq n-1$) 成立，则有 $F(S) \leq k$，这里 $F(S)$ 表示图 $G[S]$ 的最大匹配包含的边数。

定理 1.1.10 [20]. 一个图 G 是 k-可扩图当且仅当对 $V(G)$ 的任意子集 S，都有不等式 $c_o(G-S) \leq |S| - 2d$ 成立，其中 $d = \min\{ind(S),\ k\}$，$ind(S)$ 表示图 $G[S]$ 的最大匹配包含的边数。

定理 1.1.11 [50]. 设 $k \geq 1$，则一个图 G 是 k-可扩图当且仅当对任意 $S \subseteq V(G)$ 满足 $G[S]$ 包含 k-匹配，都有不等式 $c_o(G-S) \leq |S| - 2k$ 成立。

然而上述刻画均非结构性刻画，对于 k-可扩图 ($k \geq 2$) 的构造，上面提到过的 Mccaig [48] 给出了 brace 的构造方法，另外，Zhang 等在文章 [51] 给出了 k-可扩二部图的构造。但是关于 k-可扩图更多的构造，人们还知之甚少。近期关于 k-可扩图的研究主要是分别从必要性和充分性两个方面加以研究 (见 [7,12-16,20,24-34,50])。

例如，Ananchuen 和 Caccetta [14] 利用图的最小度得到如下 k-可扩图的一个必要条件：

定理 1.1.12 [14]. 设 G 是一个有 $2n$ 个顶点的 k-可扩图, $1 \leq k \leq n-1$，则 $k+1 \leq \delta(G) \leq n$ 或者 $\delta(G) \geq 2k+1$。

而利用图的坚韧度 (toughness) 和结合数 (binding number)，Plummer [32] 和 Chen [50] 分别得到如下 k-可扩图的充分条件：

定理 1.1.13 [32]. 设 G 是一个具有偶数个顶点的图，且 $|V(G)| = 2n \geq 2k+2$。若 $tough(G) > k$，则 G 是 k-可扩图。

定理 1.1.14 [50]. 假设 G 是一个具有偶数个顶点的图，那么 G 是 k-可扩的一个充分条件是 $bind(G) > \max\left\{k, \frac{(7k+13)}{12}\right\}$。

2. n-因子临界图 (n-factor-critical graphs)

假设 G 是一个图，n 是一个非负整数并且满足 $0 \leq n \leq |V(G)|-2$，如果对任意 $S \subset V(G)$ 满足 $|S|=n$ 并且 $G-S$ 都有完美匹配，那么称 G 是 n-因子临界图。Favaron [52] 和 Yu [49] 分别独立的提出此概念。显然这是因子临界图 (factor-critical graphs) 和双临界图 (bicritical graphs) 概念的推广 (分别对应 $n=1$ 和 $n=2$)。

Favaron [52] 与 Yu [49] 分别给出了 n-因子临界图的一个充分必要条件。

定理 1.1.15 [49,52]. 设 n 是一个整数，G 是一个阶为 p 的图并且满足 $0 \leq n \leq p-2$ 和 $n \equiv p\ (mod\ 2)$。那么 G 是 n-因子临界的充分必要条件是对任意 $S \subset V(G)$ 且 $|S| \geq n$，都有 $c_o(G-S) \leq |S|-n$ 成立。

Favaron [52] 与 Lou [53] 分别给出下面两个基本结论：

定理 1.1.16 [52]. 任意 n-因子临界图都是 n-连通的。

定理 1.1.17 [53]. 若 G 是一个 n-因子临界图，这里 $n \geq 2$，那么 G 也是 $(n-2)$-因子临界图。

关于 n-因子临界图与图的其它参数之间的关系，文章 [52-55] 都有详细的说明。这些参数包括：度和 (degree sum)、坚韧度、结合数与图的连通度等。文章 [22] 考虑了无爪图 (claw-free graphs)、power graphs 和平面图的 n-因子临界性。另外，Favaron 与 Shi [56] 刻画了极小的 n-因子临界图。

定理 1.1.18 [56]. 假设 G 是一个 n-因子临界图。那么 G 是极小的充分必要条件是对任意 $e=uv \in E(G)$，存在 $S \subset V(G)-\{u,v\}$ 且 $|S| \geq n$ 使得 $c_o(G-S-e)=|S|-n+2$ 并且 u 和 v 分别属于 $c_o(G-S-e)$ 的两个不同奇分支中。

n-因子临界图的研究始于对因子临界图和双临界图的研究，双临界图是分解理论中的一类非常重要的图类。Lovász 与 Plummer [5] 利用基本图的双临界分解 (Bicritical decomposition) 证明了每个基本图都可通过一些 1-可扩二部图和双临界图经过一系列运算而得到。近期，Zhang 等 [51] 给出了双临界图的构造，首先我们回忆以下定义：

定义 1.1.19 [51]. 假设 X 是一个有限集合，$\mathscr{F}$ 是 X 上的一个非空子集族。那么 $(X,\mathscr{F})$ 称为是一个超图 (hypergraph)。$S \subset X$ 称为是 $\mathscr{F}$ 中的一个遍历 (transversal) 如果对任意 $F_i \in \mathscr{F}$ 都有 $S \cap F_i \neq \emptyset$ 成立。

定理 1.1.20 [51]. 一个图 G 是双临界的当且仅当对任意 $w \in V(G)$，$H = G - w$ 是因子临界的并且 $N(w) \subset V(H)$ 是 $\mathscr{D}(H)$ 的一个遍历，这里 $\mathscr{D}(H) = \{D(H-u-v):\ u, v \in V(H)$ 并且 $u \neq v\}$。

3. (n,k,d)-图

作为 k-可扩图和 n-因子临界图的推广，Liu 与 Yu [1] 引入了 (n,k,d)-图的概念。假设 G 是一个图，n, k 和 d 是三个非负整数且满足 $n+2k+d \leq |V(G)|-2$ 和 $|V(G)|$ 与 $n+d$ 有相同的奇偶性。如果当删除 G 中任意 n 个点后的余图有 k-匹配，并且任意的 k-匹配都可以扩充为该余图的一个亏 d-匹配，那么称 G 是 (n,k,d)-图。容易看出，k-可扩图恰好是 $(0,k,0)$-图，n-因子临界图恰好是 $(n,0,0)$-图。Liu 与 Yu [1] 给出了 (n,k,d)-图的刻画。

定理 1.1.21 [1].一个图 G 是 (n,k,d)-图当且仅当下面两个条件成立。

（1）对任意 $S \subseteq V(G)$ 且 $|S| \geq n$，则有 $c_o(G-S) \leq |S|-n+d$;

（2）对任意 $S \subseteq V(G)$ 且满足 $|S| \geq n+2k$ 和 $G[S]$ 含有 k-匹配，则有 $c_o(G-S) \leq |S|-n-2k+d$。

在定理 1.1.21 中，条件（1）意味着如果删掉 G 中任意 n 个点，余图有一个亏 d-匹配。但是，条件（1）太强，事实上，只需要删掉 G 中任意 n 个点，余图有 k-匹配即可。(在第四章的 §4.2 中我们将给出了 (n,k,d)-图的一个新刻画)

另外，Liu 与 Yu [1] 研究了 $(n,k,0)$-图的连通度和去边或者加边对 $(n,k,0)$-图的影响。

定理 1.1.22 [1]. 任意连通的 $(n,k,0)$-图都是 $(n+k+1)$-连通的，这里 $k \geq 1$。

定理 1.1.23 [1]. 设 G 是一个 $(n,k,0)$-图并且 $k \geq 1$, $n \geq 2$，那么对任意 $e \in E(G)$，

（1）$G-e$ 是 $(n,k-1,0)$-图；

（2）$G-e$ 是 $(n-2,k,0)$-图。

定理 1.1.24 [1]. 设 G 是一个 $(n,k,0)$-图并且 $n,k\geq 1$，那么对任意 $e\notin E(G)$，
（1）$G+e$ 是 $(n-2,k,0)$-图，如果 $n\geq 2$；
（2）$G+e$ 是 $(n,k-1,0)$-图，如果 $k\geq 1$。

定理 1.1.7 说明了任意连通的 k-可扩图都是 $(k+1)$-连通的，定理 1.1.22 说明了任意连通的 $(n,k,0)$-图都是 $(n+k+1)$-连通的。然而，当 $d\geq 1$ 时，一个连通 (n,k,d)-图的连通度可以是 1。例如，假设 $s\geq t\geq 2$ 和 $s+t+1\geq n+2k+d+2$。设 G 是由两个完全图 K_s 和 K_t 的并构成并且 K_s 和 K_t 只有一个公共点，容易验证 G 是 (n,k,d)-图但连通度为 1。这说明当 $d\geq 1$ 时，(n,k,d)-图有许多不同于 $(n,k,0)$-图的性质，因此有必要进一步去研究 (n,k,d)-图的性质，这里 $d\geq 1$。对于 $d\geq 1$ 且 $n>0$ 时，Jin 等 [57] 研究了去边或者添加边对 (n,k,d)-图的影响 (详见第四章的 §4.4)。

4. k-圈共振图 (k-cycle resonant graphs)

Guo 和 Zhang 在文献 [58] 首先提出了 k-圈共振图的概念:

定义 1.1.25 [58]. 设 G 是一个至少有 k 个不交圈的有完美匹配的连通图。若对 G 中的任意 t 个不交圈 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ (这里 $1\leq t\leq k$), $G-\bigcup_{i=1}^{t}V(C_i)$ 有完美匹配，则称 G 为 k-圈共振图。

根据以上定义， Guo 与 Zhang 在文章 [58] 中给出了 k-圈共振图及 1-圈共振六角系统的如下刻画：

定理 1.1.26 [58]. 一个至少有 k 个不交圈的 2-连通图 G 是 k-圈共振图当且仅当 G 是一个二部图，且对 G 的任意 t 个不交圈 $C_1,C_2,\cdots,C_t$ $(1\leq t\leq k)$，$G-\bigcup_{i=1}^{t}V(C_i)$ 不含奇分支。

定理 1.1.27 [58]. 一个六角系统 H 是 1-圈共振图当且仅当 H 是一个树状六角系统。

特别的，对于平面 1-圈共振图与平面 2-圈共振图，Guo 和 Zhang 在文章 [59] 中分别给出了新的刻画。后来，Guo, Zhang, Xu 和 Zhao [60-63] 给出了平面 1-圈共振图与平面 2-圈共振图的构造和分解方法，并且得到了判断一个 2-连