学校编号： 10384　　分类号：＿＿＿＿密级：＿＿＿＿
学　　号： 19020071152086　　UDC：＿＿＿＿＿＿＿＿

硕 士 学 位 论 文

有限群的共轭类长与群结构

On the Conjugacy Class Size of Finite Groups and Group Structure

刘　金　亮

指导教师姓名： 曾 吉 文 教授
专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2010 年 5 月
论文答辩日期： 2010 年 6 月
学位授予日期： 2010 年 　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿
评　　阅　　人：＿＿＿＿＿＿

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）。

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

目　　录

Contents

摘　　要

利用元素的性质来探讨有限群的结构是很活跃的课题. 本文主要研究元素共轭类长的算术性质对有限群结构的影响，特别是素数幂阶元的共轭类长无平方因子对有限群结构的影响.

关键词： 有限群，共轭类长，超可解，素数幂.

Abstract

Using the property of the elements to study the structure of finite groups is a very active topic.This thesis mainly incvestigate how certain artithmetical conditions on conjugacy class size of finite groups influence the group structure, especially when the conjugacy class size of the prime power elements is squarefree.

Key words: finite group; conjucacy class size; supersolvable; prime power.

第一章 引言

有限群的构造理论一直是有限群论最重要的问题之一. 研究有限群的构造理论, 有许多重要的方法. 其中, 通过元素的性质来刻画有限群的结构一直是一个活跃的课题, 有着十分丰富的内容.

在通过元素的性质来刻画有限群的结构中, 利用元素的共轭类长的算术性质来刻画有限群的结构是一个令人感兴趣的问题. 众所周知, 在有限群中, 元素的共轭类个数与群的不可约特征标个数相同, 元素的共轭类与有限群的不可约特征标之间有一种类似的相互对应的性质. 利用元素的共轭类长的算术性质来刻画有限群的结构已有一些经典的结果. R.Baer 在 [1] 中详细研究了每一个素数幂阶元素的共轭类长是素数幂的有限群并给出了这类群的刻画. Camina 则把 Baer 问题局部化, 引入了 q-Baer 群的概念, 见 [2]. Ito 在 [3] 中研究了每一个元素的共轭类长都不能同时被两个给定素数整除的群, 并得到了这类群较详细的刻画. D.Chillag 和 M.Herzog 在他们的论文 [4] 中利用有限单群的分类定理对元素的共轭类长与群结构的关系进行了相当广泛的而深刻的研究. 如在 [4] 中, D.Chillag 和 M.Herzog 讨论了每一个共轭类长都无平方因子的有限群, 证明了这类群是超可解的, 并对这类群的结构作了较为详细的刻画. J.Cossey 和王燕鸣在 [5] 中用初等方法将 D.Chillag 和 M.Herzog 的一些主要结果进行了深化和改进. Dolfi 对此课题也进行了深入的研究, 他在 [6] 和 [7] 中利用元素的共轭类长的算术条件结合图论得到了许多有意义的结果, 其中他改进了 Ito 的上述结果并得到共轭类长的算术性质和特征标次数相应的算术性质之间一个很好的关系.

这些结果大都是通过限制每一个元素的共轭类长的算术性质而得到的. 其实只通过限制每一个素数幂阶元的共轭类长的算术性质或每一个 p-正则元的共轭类长的算术性质就可以得到许多相应的结果. 如在 [8] 中, 李世荣提出: 若有限群 G 的所有素数幂阶元的共轭类长组成的集合只有两个元素, 则 G 是可解的. 刘晓蕾等在其论文 [9] 中考虑了每一个素数幂阶元的共轭类长都无平方因子的有限群, 得到这类群是超可解的, 从而

推广了 D.Chillag 和 M.Herzog 在 [4] 中得到的结果. 任永才在 [10] 和 [11] 中对有限群的每一个 p- 正则元的共轭类长的算术性质对群结构的影响作了深入的讨论，得到一些深刻的结果. 比如他得到：若有限群 G 的每一个 p- 正则元的共轭类长都不能被 p 整除，则 $G = O_p(G) \times O_{p'}(G)$.

本文也是循着这样的思路，主要通过有限群 G 每一个素数幂阶元的共轭类长的算术性质来刻画群的结构。在第二章中，我们考虑了每一个素数幂阶元的共轭类长都无平方因子的有限群 G，利用刘晓蕾的上述结果推广了 D.Chillag 和 M.Herzog 在 [4] 中得到的一个定理，我们得到：

定理 **2.8**: 设 G 为有限群且 $F(G)$ 为素数幂阶群，若 G 的每一个素数幂阶元的共轭类长均无平方因子，则 $G/F(G)$ 循环且其阶无平方因子.

相应的我们还得到了一个推论；

推论 **2.9**: 设 G 是有限群且 $F(G)$ 为素数幂阶群，若 G 的每一个素数幂阶元的共轭类长为 1，某个素数或两个不同素数的乘积，则 $|G/F(G)|$ 也为 1，某个素数或两个不同素数的乘积.

由定理 2.8 我们还推广了陈波等在 [12] 中的一个主要定理，得到：

定理 **2.14**: 设 G 为 π- 超可解群且 $\pi \subseteq \pi(G).\forall p \in \pi$, 若 G 的每一个素数阶元的共轭类长都无 p^2 因子，则

(1)$G/F_\pi(G)$ 交换；

(2) $\forall p \in \pi$, 若 P 是 G 的 *sylow* p- 子群，则 $|P'| = 1$ 或 p.

若更进一步假设 $F(G)$ 为素数幂阶群，则有：

(3)$\forall p \in \pi$, $|G/F_\pi(G)|$ 无 p^2 因子.

同时我们还对 [12] 中的另一个定理也作了相应的推广，得到：

定理 **2.20** 设有限群 G 的每一个素数幂阶元的共轭类长无 p^2 因子且 G 为极小非 p- 超可解群，则：

(1)$\Phi(G) = 1$;

(2)$G = MF(G)$, 其中 M 是 G 的极大子群， $F(G)$ 是 G 的唯一极小正规子群， 并且有 $M \cap F(G) = 1$ 且 $O_p(M) = 1$; $F_p(G) = O_p(G) = F(G)$ 是初

等交换 p- 群且 $|G:M|=|F(G)|=p^n, n\geqslant 2$;

(3)M 无非平凡的正规于 G 的子群且 M 的正规子群不能是素数幂阶的循环群;

(4) 若 K 是 M 的极小正规子群且 $|K|=q^m$, 则 $q<p$.

在第三章中我们考虑了共轭类长的其它一些算术性质对群结构的影响，首先我们得到：

定理 **3.6**: 设 G 是有限 PC- 群，若 G 的每一个素数幂阶元的共轭类长都不被 8 整除，则 G 超可解.

这个定理推广了 [13] 中的定理 2. 在这一章中我们还考虑了对群的 π-元共轭类长作限制，得到下列结果：

定理 **3.9**: 设 G 是有限群，设 $\pi\subseteq\pi(G)$， G 的每一个素数幂阶 π- 元的共轭类长都为素数幂，则 G 是 π- 可分群.

第二章 素数幂阶元的共轭类长无平方因子的群

本文研究的群均为有限群，所使用的符号均是标准的，可参看 [16]. $\pi(G)$ 表示 $|G|$ 所有素因子构成的集合. $cl(G)$ 表示幂零群 G 的幂零类长, $dl(G)$ 表示可解群 G 的导长.

引理 **2.1**[4] 设 G 是一个有限群, $N \trianglelefteq G$, $x \in N$, $y \in G$, 则
(1)$|x^N| \mid |x^G|$
(2)$|(yN)^{G/N}| \mid |y^G|$

证明: (1) 容易得

$$|x^N| = |N : C_N(x)| = |N : N \cap C_G(x)|$$

$$= |NC_G(x) : C_G(x)| \mid |G : C_G(x)| = |x^G|$$

(2) 因为 $C_G(y)N/N \leqslant C_{G/N}(yN)$, 故

$$|(yN)^{G/N}| = |G/N : C_{G/N}(yN)| \mid |G/N : C_G(y)N/N|$$

$$= |G : C_G(y)N| \mid |G : C_G(y)| = |y^G|$$

引理证毕.

这个引理是利用有限群 G 的阶作归纳的基础.

引理 **2.2**[9] 设 G 是有限群, p 是 $|G|$ 的一个素因子，使得：如果 q 是 $|G|$ 的一个素因子, 那么 q 不整除 $p-1$, 若 G 的素数幂阶元的共轭类长均不被 p^2 整除, 则 G 是一个可解的 p- 幂零群, 且若 $P \in Syl_p(G)$, 则 $|P'| = 1$ 或 p.

引理 **2.3** [9] 设 G 是一个有限群，如果对 G 的每一个素数幂阶元 x , $|x^G|$ 均无平方因子，则 G 超可解.

证明: 假设定理结论不真，取 G 为极小阶反例.

根据引理 2.2 得 G 可解，再根据引理 2.1，定理的条件对商群遗传，则可得 G 有唯一极小正规子群 N, 且 $\Phi(G)=1$, G/N 超可解. 因此 $F(G)=C_G(N)=N$, 可设 N 是阶初等交换 p- 群，这里 p 是一个素数，令 $|N|=P^k$, 则当然有 $k>1$, 取 M/N 是 G/N 的一个极小正规子群，那么由于 G/N 超可解，$|M/N|$ 可设为素数 q, 假设 $q=p$, 那么 $M\leqslant O_p(G)\leqslant F(G)=N$, 矛盾．因而 $q\neq p$，由 Schur-Zassenhaus 定理，得 $M=\langle x\rangle N$, 其中 $|\langle x\rangle|=q$，如果存在 $u\in N$, $u\neq 1$ 使得 $u\in C_G(x)$, 则由于 N 是交换群，有 $u\in Z(M)$. 又因为 $Z(M)$ 特征于 M, $M\trianglelefteq G$, 所以 $Z(M)\trianglelefteq G$, 于是 $N\leqslant Z(M)$ 且 $M=\langle x\rangle\times N$, 因此 $\langle x\rangle$ 特征于 M，进而 $\langle x\rangle\trianglelefteq G$, 由 N 的极小性得 $N=\langle x\rangle$, 但这矛盾于 $q\neq p$. 因而有 $C_M(x)=\langle x\rangle$, 这表明

$$|x^M|=|M:\ C_M(x)|=|M:\ \langle x\rangle|=|N|.$$

又 $p^2\mid |x^M|$, $M\trianglelefteq G$, 故由引理 2.1 得 $p^2||x^G|$, 矛盾．引理证毕.

引理 **2.4**[14] 若 G 是有限群，$\Phi(G)=1$, 则 $F(G)$ 交换且可由 G 的所有可解极小正规子群生成.

引理 **2.5**[15] 设有限交换群 H 忠实地作用于有限群 B 上且 $(|H|,|B|)=1$, 则存在 $b\in B$, 使得 $C_H(b)=1$.

引理 **2.6**[9] 设 G 是有限群，设 $A\trianglelefteq G$, $B\trianglelefteq G$ 且 $G=AB$. 若对 $A\cup B$ 的每一个素数阶元 x, $|x^G|$ 均无平方因子，则 G 超可解.

下面我们来看 D.Chillag 和 M.Herzog 在他们经典论文中的一个结果：

定理 **2.7**[4] 设 G 为有限群, 若 G 的每一个元素的共轭类长均无平方因子，则 $G/F(G)$ 循环且其阶无平方因子.

若限制群 G 的 $Fitting$ 子群 $F(G)$ 为素数幂阶群，我们可以得到上述定理的一个推广，即

定理 **2.8**: 设 G 为有限群且 $F(G)$ 为素数幂阶群，若 G 的每一个素数

幂阶元的共轭类长均无平方因子，则 $G/F(G)$ 循环且其阶无平方因子.

证明: 设 G 是极小阶反例. 由引理 2.3 得 G 是超可解的，从而 G' 是幂零群. 又 $G' \trianglelefteq G$, 可得 $G' \leqslant F(G)$, 故 $G/F(G)$ 交换. 若证明了 $|G/F(G)|$ 无平方因子，则 $G/F(G)$ 循环. 故只需证 $|G/F(G)|$ 无平方因子.

由于 $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$, 若 $\Phi(G) > 1$, 则由引理 2.1 和 G 为极小阶反例知

$$|G/\Phi(G) : F(G/\Phi(G))| = |G/\Phi(G) : F(G)/\Phi(G)| = |G/F(G)|$$

无平方因子，矛盾. 从而有 $\Phi(G) = 1$, 再由引理 2.4 得 $F(G)$ 交换.

因为 G 是极小阶反例，$|G/F(G)|$ 不能是素数阶群. 又 $G/F(G)$ 交换，故 $F(G)$ 不是 G 的极大子群，从而存在 $H \trianglelefteq G$, H 为 G 的极大子群，使得 $F(G) < H < G$ 且 $|G : H| = |G/F(G) : H/F(G)| = p$, p 为某一素数. 又 $F(H)$ 特征于 H, $H \trianglelefteq G$, 得 $F(H) \trianglelefteq G$, 故 $F(H) \leqslant F(G)$. 而 $F(G) \leqslant H$, 当然有 $F(G) \leqslant F(H)$. 故 $F(H) = F(G)$.

因为 $H \trianglelefteq G$, 由 G 是极小阶反例知 $|H/F(H)| = |H/F(G)|$ 无平方因子. 假设另有一素数 $q \neq p$, $q \mid |G/F(G)|$, 则类似上面的讨论，我们可以找到 $L \trianglelefteq G, L$ 为 G 的极大子群，使得 $F(G) < L < G, F(L) = F(G)$, $|G : L| = q$ 且 $|L/F(L)| = |L/F(G)|$ 无平方因子. 从而

$$|G/F(G)| = p|H/F(G)| = q|L/F(G)|$$

我们得到 $|G/F(G)|$ 无平方因子，矛盾. 即不存在另一素数 $q \neq p$, 使得 $q \mid |G/F(G)|$, 故可得 $G/F(G)$ 为 p- 群. 假设 $F(G)$ 为 p- 群，则 G 为 p- 群，从而 G 幂零，有 $G = F(G)$, 矛盾. 故 $F(G)$ 为 p'- 群，因为 $|H/F(G)|$ 无平方因子且 $H/F(G) \leqslant G/F(G)$, 得 $|H/F(G)| = p$, 所以 $|G/F(G)| = p|H/F(G)| = p^2$, 又因为 $F(G)$ 交换，由引理 2.3: 存在 $A \leqslant G$, 使得 $G = F(G)A$, 其中 $F(G) \cap A = 1$, $|A| = p^2$.

由 $|A| = p^2$ 知 A 交换，现在令交换 p- 群 A 作用在交换 p'- 群 $F(G)$ 上，由于 G 可解，有 $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$, 而 $F(G) \cap A = 1$, 故 $C_A(F(G)) = 1$ ，这

就是说 A 在 $F(G)$ 上的作用是忠实作用，由引理 2.5 可得：存在 $y \in F(G)$，使得 $C_A(y)=1$，从而 $C_G(y)=F(G)C_A(y)=F(G)$，故

$$|y^G| = |G : C_G(y)| = |G : F(G)| = |A| = p^2$$

最终矛盾．定理证毕．

推论 **2.9**: 设 G 是有限群且 $F(G)$ 为素数幂阶群，若 G 的每一个素数幂阶元的共轭类长为 1，某个素数或两个不同素数的乘积，则 $|G/F(G)|$ 也为 1，某个素数或两个不同素数的乘积．

证明: 由引理 2.3 得 G 是超可解群，$|G/F(G)|$ 无平方因子，设 G 是极小阶反例．

由于 $F(G/\Phi(G)) = F(G)/\Phi(G)$，若 $\Phi(G) > 1$，则由引理 2.1 及 G 为极小阶反例知

$$|G/\Phi(G) : F(G/\Phi(G))| = |G/\Phi(G) : F(G)/\Phi(G)| = |G/F(G)|$$

为 1，某个素数或两个不同素数的乘积，矛盾．故有 $\Phi(G) = 1$，又因为 $F(G/Z(G)) = F(G)/Z(G)$，同理可得 $Z(G) = 1$．

类似定理 2.8 的证明过程我们得到：$F(G)$ 交换，$G = F(G)A$，$F(G) \cap A = 1$，故 $A \cong G/F(G)$ 是循环群且其阶无平方因子，从而我们只需证 $|A|$ 不能被三个不同的素数整除即可．

假设 p, q, r 是不同的素数且都整除 $|A|$，令 $x, y, z \in A$ 且它们的阶分别为 p, q, r，则 $P = \langle x \rangle$，$Q = \langle y \rangle$，$R = \langle z \rangle$ 分别是 A 唯一的 $Sylow$ p- 子群，$Sylow$ q- 子群，$Sylow$ r- 子群．由 G 可解得 $C_G(F(G)) \leqslant F(G)$．故 $C_{F(G)}(x) < F(G)$，$C_{F(G)}(y) < F(G)$，$C_{F(G)}(z) < F(G)$．若 $F(G) = C_{F(G)}(x) \cup C_{F(G)}(y) \cup C_{F(G)}(z)$，则由 [23] 得 $|F(G)|$ 是偶数，又因为 G 是超可解群，所以 G 有极小正规子群 N 且 $|N| = 2$，但 $N \leqslant Z(G) = 1$，矛盾．故存在 $u \in F(G) - C_{F(G)}(x) \cup C_{F(G)}(y) \cup C_{F(G)}(z)$，因为 $F(G)$ 交换，所以 $F(G) \leqslant C_G(u)$，从而有 $C_G(u) = F(G)C_A(u)$．但 $C_A(u) \cap P = C_A(u) \cap Q = C_A(u) \cap R = 1$，故 $(|C_A(u)|, pqr) = 1$，从而有 $pqr \mid |G : C_G(u)| = |u^G|$，矛盾．推论证毕．

注: 此推论推广了 [4] 的命题 2.4.

定理 **2.10**: 设 G 是有限群且 $F(G)$ 为素数幂阶群， $A \trianglelefteq G$, $B \trianglelefteq G$, $G = AB$. 且 $F(G) \leqslant A$ 或 $F(G) \leqslant B$, 若对 $A \cup B$ 的每一个素数阶元 x, $\mid x^G \mid$ 均无平方因子，则 $G/F(G)$ 循环且其阶无平方因子.

证明: 由引理 2.1.6 得 G 是超可解群，余下证明类似定理 2.1.7. 定理证毕.

定理 **2.11**: 设 G 的每一个素数幂阶元的共轭类长均无平方因子，则 $F(G)'$ 是阶无平方因子的交换群且 $cl(F(G)) \leqslant 2$, $dl(G) \leqslant 3$.

证明: 由引理 2.7, G 是超可解的，设 $p \in Syl_p(F(G))$, 则 $P \trianglelefteq G$, 从而由引理 2.1 得 P 的每一个元的共轭类长均无平方因子，即为 1 或 p ，故 P 交换或 $\beta(P) = 1$ ，从而由 [14, p309] 得 $|P'| = 1$ 或 p ，故 P 的幂零类长 $cl(P) \leqslant 2$. 特别的， $F(G)'$ 是阶无平方因子的交换群且 $cl(F(G)) \leqslant 2$. 又由 G 是超可解的，故 G' 幂零，从而 $G' \leqslant F$, $G''' \leqslant F'' = 1$ ，即有 $dl(G) \leqslant 3$. 定理证毕.

由定理 2.8 我们可以推广 [12] 中的一个主要结果定理 1.1, 为此，我们先给出一些定义及引理.

定义 **2.12**[12] 设 π 是素数组成的集合且 G 是 π- 可解群，如果 G 的每一个 π- 主因子都是素数阶循环群，则称 G 是 π- 超可解群.

容易看出，当 $\pi = p$ 时， π- 超可解群即为 p- 超可解群；当 $\pi = \pi(G)$ 时， π- 超可解群即为超可解群.

定义 **2.13**[12] 设 $\pi \subseteq \pi(G)$, 定义 π- 可解群 G 的正规子群 $F_\pi(G) = \cap_{p\in\pi}(F_p(G))$. 如果 G 有正规的 π'-$Hall$ 子群且 G 的 π-$Hall$ 子群是幂零群，则称 G 是 π- 幂零群.

引理 **2.14**[12] 设 $\pi \subseteq \pi(G)$ 且 G 是 π- 可解群，则 G 是 π - 幂零的充分必要条件是对于任意的 $p \in \pi$, G 是 p- 幂零的. 特别地， $F(G)$ 是 π- 幂零的.

定理 **2.15**: 设 G 为 $\pi-$ 超可解群且 $\pi \subseteq \pi(G)$, $\forall p \in \pi$, 若 G 的每一个素数阶元的共轭类长都无 p^2 因子，则

(1)$G/F_\pi(G)$ 交换;

(2) $\forall p \in \pi$, 若 P 是 G 的 $sylow$ p- 子群，则 $|P'| = 1$ 或 p.

若更进一步假设 $F(G)$ 为素数幂阶群，则有：

(3)$\forall p \in \pi$, $|G/F_\pi(G)|$ 无 p^2 因子.

证明: (1) 由于 G 是 π- 超可解群, 故对 $\forall p \in \pi, G$ 为 p- 超可解群, 从而可得 G' 为 p- 幂零群, 故 $G' \leqslant F_p(G)$, 由 p 的任意性及定义 2.12. 得 $G' \leqslant F_\pi(G)$, 故 $G/F_\pi(G)$ 交换.

(2) 设 M 是 $F_\pi(G)$ 的 π'-$Hall$ 子群, 因为 $F_\pi(G)$ 是 π- 幂零的, 所以 $M \trianglelefteq G$ 且 $F_\pi(G)/M$ 幂零，而 $PM/M \trianglelefteq F_\pi(G)/M$. 由引理 2.1.12 得 $\forall p \in \pi$, $F_\pi(G)/M$ 的每个素数幂阶元的共轭类长都无 p^2 因子，从而 PM/M 的每一个元的共轭类长为 1 或 p. 据 [19] 得 $|[PM/M, PM/M]| = |P'M/M| = |P'|$ 为 1 或 p.

(3) 假设命题对 π 中的某个素数 p 不成立，令 G 是极小阶反例，我们断言 $F_\pi(G)$ 是 π- 群. 否则我们令 M 是 $F_\pi(G)$ 的 π'-$Hall$ 子群，由引理 2.14, $F_\pi(G)$ 是 π- 幂零的，从而 $M \trianglelefteq F_\pi(G)$ 又 $F_\pi(G)$ 是 π- 可解的，所以 M 是 $F_\pi(G)$ 的特征子群，于是 M 是 G 的非平凡正规子群，故 $|G/M| < |G|$, 由引理 2.1，对 $\forall q \in \pi$, G/M 的每一个素数幂阶元的共轭类长都无 q^2 因子，又 G/M 显然是 p- 超可解的，故由 G 是极小阶反例知 $|G/M : F_\pi(G/M)|$ 无 p^2 因子.

令 $A/M = F_\pi(G/M)$, 显然有 $A \trianglelefteq G$, 由于 $F_\pi(G)$ 是 π- 幂零的，从而对于每一个 $q \in \pi$, $F_\pi(G)$ 是 q- 幂零的，于是它的商群 $F_\pi(G)/M$ 也是 q- 幂零的，因此 $F_\pi(G)/M \leqslant F_q(G/M)$, 由 q 的任意性知 $F_\pi(G)/M \leqslant F_\pi(G/M) = A/M$. 故