学校编码：10384 分类号： 密级：

学号：17020051403018 UDC：

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

图中的若干极值问题

Some Extremal Problems in Graphs

边 红

指导教师姓名： 张福基 教授

专 业 名 称： 应 用 数 学

论文提交日期： 2008 年 5 月

论文答辩时间： 2008 年 6 月

学位授予日期： 2008 年 月

答辩委员会主席：

评 阅 人：

2008 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在 年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打“∨”）

作者签名： 日期： 年 月 日

导师签名： 日期： 年 月 日

摘　要

令 $v_1, v_2, \cdots, v_m$ 是 $\mathcal{R}^n$ 中的向量。对于 $\lambda_i \in \mathcal{R}$，$\lambda_i \geq 0$，$\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$，$v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_m v_m$ 被称为是 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 的凸组合。$\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 所有凸组合的集合就是 $\{v_1, v_2, \cdots, v_m\}$ 的一个凸包。在 $\mathcal{R}^n$ 中的有限个向量的集合 X 的凸包被称为是一个多面体，并且用 P 来表示。一个多面体 P 的顶点是多面体的零维面，并且 P 中的两个顶点 u 和 v 相邻当且仅当它们是多面体的同一个一维面中的点。一个多面体 P 的图（或者骨架）$G(P)$ 是一个图，它的顶点是多面体的顶点，并且它有一条边连接一对顶点，如果对应于多面体的这对顶点是相邻的，也就是这对顶点被多面体的一条边所连。这类图的研究已经有较长的历史。一个多面体称为是 $(0,1)$ 多面体，如果它的顶点所对应的向量的每个分量都是 0、或者 1。在 1984 年，Naddef 和 Pulleyblank 证明了如果一个 $(0,1)$ 多面体的骨架 $G(P)$ 是一个二部图，那么 $G(P)$ 是一个超立方体；如果 $G(P)$ 是非二部图，那么 $G(P)$ 是哈密顿连通的。这类 $(0,1)$ 多面体包含很多著名的多面体，如：匹配多面体、拟阵基多面体、稳定集多面体和置换多面体。我们研究了完美匹配多面体的若干极值问题。

人们对具有完美匹配的图已经做过大量的研究，其最基本的结果是在 1947 年，Tutte 所给出的对具有完美匹配的图的一个刻画。最近，为了研究具有完美匹配的图的 Tutte 集（或者 barrier）和极端集，Bauer，Broersma，Morgana 和 Schmeichel 提出了一种新的图运算被称为 D-图，并且得到了很多有趣的性质。图 G 的水平是一个最小的整数 $k \geq 0$ 使得 $D^{k+1}(G) \cong D^k(G)$，这里取 $D^0(G) = G$。我们主要研究了若干图类的水平，并且给出了几类特殊图类的 D-图的刻画。在匹配理论中，完美匹配的计数也是匹配理论的一个重要的研究方向。我们研究了几类多边形 Cacti 链的匹配和独立集，并且确定了关于 k-匹配和 k-独立集的多边形 Cacti 链的极值链。Wiener 数是理论化学研究中的一个重要参数，我们研究了树状多联苯的 Wiener 数。

这篇论文分为六章。在第一章，我们首先介绍了图和匹配的一些相关定义和概念。其次，我们概述了匹配理论新近的一些主要结果和发展现状。第三，我们概述了 Wiener 数的理论背景及其主要结果。在这章的最后，我们列举了本文的主要研究成果。

在第二章，我们给出了完美匹配图是二部图的二部图的刻画。得到了这类图关于边的一个紧的上界，并且构造了达到此上界的极值图类。

在第三章，我们给出了完美匹配图是二部图的非二部图的刻画。得到了这类图关于边的一个紧的上界，并且构造了达到此上界的极值图类。

在第四章，我们首先研究了基本图的水平，并且证明了对于任意一个非二部图的基本图，它的 $D^2(G)$ 是一个完全图。此外，我们还给出了饱和图的 D-图的刻画，对于非二部图的情形给出了一个例子。第二，根据二部图的典型分解，我们给出了二部图的 D-图的精确构造，并分别给出了 $level = 0$ 和 $level = 1$ 的二部图的刻画。最后，我们给出了 $level = 0$ 的具有唯一完美匹配的饱和图的 D-图的刻画以及这类图的边数的一个紧的上界。

在第五章，我们考虑了几类多边形 Cacti 链，并研究了他们的匹配和独立集，明确给出了这几类多边形 Cacti 链的匹配和独立集多项式的递推式以及若干特殊值的亏 d-匹配数。另外，我们确定了关于 k-匹配和 k-独立集的多边形 Cacti 链的极值链。最后，我们明确给出具有 n 个多边形的星形多边形 Cacti 链的匹配和独立集多项式。

在最后一章，我们确定了所有具有 h 个六边形的最大和最小 Wiener 数的多联苯链和具有最大 Wiener 数的树状多联苯系统，并给出了极值多联苯链的 Wiener 数的明确计算公式。

关键词： 极值图；匹配；Wiener 数

Abstract

In 1984, Naddef and Pulleyblank introduced the (0,1)-polytope and showed that if the graph $G(P)$ of a (0,1)-polytope is bipartite graph, then $G(P)$ is a hypercube; if $G(P)$ is non-bipartite graph, then $G(P)$ is hamilton connected. The class of (0,1)-polytope includes many well-known classes of polytope, such as: matching polytope, matorid basis polytope, stable set polytope and permutation polytope. Now, we study some extremal problems of perfect matching polytope.

In the case that G has a perfect matching, extensive work has been done on the graph, in which the basic result is that in 1947, Tutte give a characterization of a graph G with perfect matchings. Recently, in order to investigate Tutte sets (or barrier) and extreme sets of graph G with perfect matchings, a new graph operator called the D-graph $D(G)$ of graph G was introduced by Bauer, Broersma, Morgana, and Schmeichel, many interesting properties are obtained. The level of a graph G is defined to be the smallest integer $k \geq 0$ such that $D^{k+1}(G) \cong D^k(G)$, taking $D^0(G) = G$. We consider the *level* of some kinds of graphs, and give the characterization of the D-graph $D(G)$ for some special graphs. The numeration of perfect matchings is also one of main focus of matching theory. We consider some classes of chain polygonal cacti and study their matchings and independent sets. Wiener index is an important topological index in theoretical chemistry, we study Wiener indices of some polyphenyl systems.

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, we introduce some definitions and notations about graphs and matching theory. Then we summarize recent main results and investigation progresses about matching theory, perfect matching graph, D-graph, and Wiener index. In the end of this chapter, the main results of this thesis are listed.

In Chapter 2, we characterize the bipartite graphs whose graph of perfect matching polytope is bipartite graph. A sharp upper bound of the number of lines for this type of graphs is obtained, and the extremal graphs are constructed.

In Chapter 3, we characterize the non-bipartite graphs G whose graph of

perfect matching polytope is bipartite. A sharp upper bound of the number of lines for this type of graphs is obtained, and the extremal graphs are constructed.

In Chapter 4, we first explore the level of elementary graphs, and show that for any non-bipartite elementary graph whose $D^2(G)$ is a complete graph. Moreover, we also give the characterization of the D-graph $D(G)$ of the saturated graph G. Secondly, according to a canonical decomposition of arbitrary bipartite graphs, we give the explicit construction of the D-graph for bipartite graph with perfect matchings, and also give the characterization of a bipartite graph G with $level(G) = 0$ and $level(G) = 1$, respectively. Finally, we characterize the saturated graph G having unique perfect matching with $level(G) = 0$ and give the sharp upper bound of the number of lines of the D-graph $D(G)$ of the graphs with unique perfect matching.

In Chapter 5, we consider some classes of chain polygonal cacti and study their matchings and independent sets . Explicit recurrences are derived for their matching and independence polynomials and the number of defect-d matchings for some values of d. We also determine the extremal chain polygonal cacti with respect to the number of matchings and of independent sets.

In the last chapter, we determine the polyphenyl chains with minimum and maximum Wiener indices among all the polyphenyl chains with h hexagons, and the tree-like polyphenyl system with maximum Wiener index. Moreover, explicit formulae for Wiener indices of extremal polyphenyl chains are obtained.

Key Words: extremal graph; matching; Wiener index

目　录

Contents

第一章　序　言

§1.1　基本定义和符号

对于一个图 G，用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集。我们用 $\delta(G)$ 和 $\triangle(G)$ 分别代表图 G 中的最小度和最大度。图 G 的一个顶点子集 X 称为图 G 的一个独立集，如果 X 中的任意两个点都不相邻。满足此条件的最大阶数的子集 X 称为图 G 的最大独立集。对于图 G 的一个顶点 u ，我们用 $G-u$ 表示由点集 $V(G)-\{u\}$ 所导出的子图。对于图 G 的一条边 $e\in E(G)$ ，我们用 $G-e$ 表示由图 G 删去边 e 所得到的图，而 $G\backslash e$ 表示由图 G 除去 e 的端点后所得到的图。因此，$G\backslash e=G-\{u,v\}$，这里 $e=\{u,v\}$。一个点 u 和 G 中所有与点 u 相邻的点的并记为 $N[u]$。

$d_G(u,v)$ 表示简单图 G 中任意两点 $u,v\in V(G)$ 之间的距离，也就是，在图 G 中连接这两点之间的最短路的边数。一个顶点 $v\in V(G)$，$d_G(v)$ 表示顶点 v 和 G 中所有其它顶点之间的距离之和。P_n 代表图 G 中含有 n 个点的路。

图 G 的一个匹配是一个边的集合 M ，使得 G 的每一个顶点最多和 M 中的一条边关联。一个匹配 M 称为完美匹配。如果图 G 的每一个顶点恰好和 M 中的一条边关联。我们用 $P_M[x,y]$ 表示图 G 的一条连接 x 和 y 的 M－交错路，其中 x 和 y 都是 M 所饱和的。同样地，我们用 $P_M(x,y)$ 来表示图 G 中连接 x 和 y 的 M－交错路，其中 x 和 y 都是 M 非饱和的， $P_M[x,y)$ 和 $P_M(x,y]$ 两种 M－交错路可以类似的定义，其中 $P_M(x,y)$ 也称为是图 G 的一条 M－增广路。一个具有完美匹配的图被称为1一可因子化图。图 G 中恰好有一个点没有被 M 所饱和的匹配被称为图 G 的一个几乎完美匹配。

令 M 是图 G 的一个完美匹配。如果对于所有 $[a,a']\in M$ 的边和所有图 G 中的路 $P_M(x,a)$, $P_M(a',y)$ （不一定不相交），这里 x, a, a', y 都不相同，或者 $[x,y]\in M$ 或者 (x,y) 是图 $G-M$ 中的边，此时我们称图 G 是边闭的；如果我们总是有或者 $[x,y]\in M$ 或者图 G 中有一条路 $P_M(x,y)$，我们称图 G 是路闭的；如果我们总是有或者 $[x,y]\in M$ 或者图 G 中有一条迹 $W_M(x,y)$，我们称图 G 是迹闭的。图 G 的一条边被称为允许的，如果它位于图 G 的某个完美匹配中，否则被称为禁止的。图 G 的一条边称为固定边，如果它属于图 G 的所

有完美匹配（被称为允许固定边）或者不属于图 G 任何完美匹配（被称为禁止边）。图 G 的其余边被称为非固定边。

一个1－可因子化图 G 是基本图，如果它的所有允许边构成一个连通子图。一个连通1－可因子化图被称为是1－可扩图，如果它的所有边都是允许边（1－可扩图在有些文献中也被称为是匹配覆盖图）。很明显，每个1－可扩图是基本图。注意到在一般情况下，反过来是不成立的。然而对于连通二部图来说，1－可扩图和基本图是等价的（见文 [1] 中的定理4.1.1）。

令 $\omega_\circ(G)$ 表示图 G 的奇分支的个数。图 G 的亏量被定义为 $def(G) = max_{X\subseteq V(G)}\{\omega_\circ(G-X)-|X|\}$ ，这就等于没有被图 G 的任何最大匹配所饱和的点的个数。一个子集 $X \subseteq V(G)$ 被称为图 G 的 $Tutte$ 集（或者 $barrier$ 集），如果 $def(G) = \omega_\circ(G-X)-|X|$ ；并且 X 被称为极端集，如果 $def(G-X) = def(G)+|X|$ 。

如果没有特别说明，本文仅考虑有限的连通简单图。对于在本文中出现但没有定义的符号和术语请参阅 [1, 2, 3, 4, 5]。

§1.2 匹配理论的一些研究背景

匹配理论作为图论的一个基础分支已有一百多年的研究历史，它的提出与某些实际应用问题有关。随着研究的不断深入，它不但自身发展成为图论的一个内容丰富的重要分支，而且也广泛应用到其它数学分支，如组合优化，化学图论，数学建模等。Lovász 和 Plummer 在其匹配理论专著 [1] 中对此作了详细介绍。

许多在实际应用中的问题都可以直接转化成研究图的某种匹配（或者赋权匹配）问题。最常见的如：劳动市场中的人员分配问题（或者最优人员分配问题）等。还有一些实际问题虽然不能直接转化成求图的匹配问题，但是却可以借助匹配理论的知识来加以解决。比如：图论中的最著名的中国邮递员问题，它可以通过先解决一些最短路问题，然后再解决某种最小赋权匹配问题的方法得以解决；而在图论中另一个著名的旅行推销商问题（它的特殊情形就是所谓的哈密顿圈问题）中，推销员满足条件的一个环游就相当于对应图中的一个 2-因子，而图的 2-因子是图的完美匹配的一种自然推广，并且事实上， 2-因子问

题可以被转化成寻找图的完美匹配问题。从这个观点上来看，匹配理论作为旅行推销商问题的一个基石可以看作是它的一个松弛。

事实上，在过去的 100年左右，匹配理论在许多新的和更一般的组合方法的发展中起了一个催化作用。虽然在匹配理论发展的历史轨迹中，一些著名的人物如：Euler、Kirchhoff 和 Tait 等都曾出现过。但是我们主要介绍匹配理论中的两个主要先驱者：丹麦的 Petersen 和匈牙利的 König。Petersen 早期主要是从事正则图的研究，而 König 主要是集中于二部图的研究。

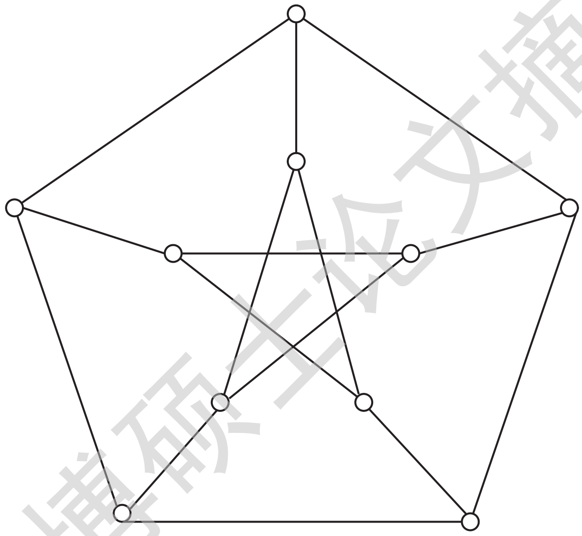

图 1.1 Petersen 图

Petersen 曾在 1981 年的一篇文章中证明了，任何一个偶度正则的图都能分解成边不交的 2-因子的并。这个结果与 Euler 的一个著名问题：Königsberg Bridge 问题（1736）密切相关。在同一篇文章中，他还证明了任意一个不超过两条割边的连通 3-正则图都有完美匹配。Petersen 对于这个 3-正则图的分解定理的证明先后连续被 Brahana (1917-18), Errera (1922) 和 Frink (1925-26) 等人进一步简化，后来他的研究工作被 Bäbler (1938, 1952, 1954), Gallai (1950) 和 Belck (1950) 等人推广到其它正则图，并且这方面的研究工作在随后 Tutte 的研究工作中达到了顶峰。Petersen 与图论中最著名的猜想：“四色猜想”也有很大关系。Cayley 和 Kempe 曾观察出：为了证明四色猜想在一般情况下是正确的，

那么只需要证明它对于 3-正则平面图是成立的即可。Tait 在随后的一系列文章（1878－1880a, 1878-1880b, 1880）中从事了这个问题的研究。他观察到一个 3-正则平面地图的区域用四种颜色着色，就等价于地图的 3-边着色。他声称如果一个三正则图是多面体的，那么它就可以分解成三个边不交的完美匹配。后来，Steinitz （1922）证明了多面体就恰恰意味着 3-连通，并且是可平面的。

Petersen 在 1898 年的第二篇文章中对 Tait 关于 3-正则图的评论作出了回应。他在这篇文章中，对图论界所做的最大贡献就是提出了一个 3-正则无割边的非平面图，这个图现在被称为“Petersen 图”（如图 1.1 所示），它或许是现有的图中最著名的一个图。

匹配理论的另一个研究分支主要集中于二部图。在 1912 年，德国的代数学家 Frobenius，就行列式的可约性质给出了如下结果：

定理 F-1. [6] 令 M 是一个 $n \times n$ 矩阵，满足每个分量或者是 0 或者是一个变元，并且所有分量的变元都不相同。那么 M 是这些变元的可约多项式当且仅当存在一个整数 $p, 0 \leq p \leq n$，使得 M 关于行列的一个置换，导致一个大小为 $p \times (n-p)$ 的零块矩阵。

一个 $n \times n$ 矩阵是一个双随机矩阵，如果 $2n$ 个行和列的和都有相同的值。König 在 1915 年就上述定理所说的问题用图论的语言来描述，并且根据二部图的性质，给出了这个定理的一个简化证明。他还在 1916 年的文章中证明了一个矩阵是双随机的当且仅当对应的二部图是正则的。也就是在同一篇文章中，人们首次发现了关于二部图的另一个著名定理的证明－König 边色定理。

任何图的一个有效边着色是一些整数到图 G 的边的一个分配，使得相邻两条边着不同颜色。一个有效边着色所用的最小色数称为图 G 的色数（或边色数），用 $\chi_e(G)$ 来表示。

定理 1.1.1 [7] (König Line Coloring Theorem) 对于每一个二部图 G，$\chi_e(G) = \triangle(G)$。

在 1917 年，Frobenius 借助下面的引理，又给出了定理 F-1 的一个简单证明。

引理 F-2. [8] 令 M 是一个 $n \times n$ 矩阵。假设 M 的行列式作为非零元的多项式恒等于 0。那么存在整数 $p, 0 \leq p \leq n$，使得 M 关于行列的一个置换，导

致一个大小为 $p \times (n-p+1)$ 的零块矩阵。

引理 F-2 除了它在定理 F-1 的证明中所起的作用以外，它本身也有很大意义。事实上，如果把它翻译成二部图的语言，它实际上给出了一个二部图具有完美匹配的充要条件，这就是著名的婚姻定理。

定理 1.1.2 [1](婚姻定理) 一个二部图 $G=(A,B)$ 有完美匹配当且仅当
(1) $|A|=|B|$;
(2) 对于任意 $X \subseteq a$，都有 $|N(X)| \geq |X|$ 成立.

这个定理也是二部图匹配中最著名的结果－由 Hall （1935）给出的不同代表系定理的前身。令 $S_1, S_2, \cdots, S_n$ （不一定不同）是有限集 S 的若干子集，一个 n 个不用元 $s_1, s_2, \cdots, s_n$, $s_i \in S_i$ 的集合被称为是一个不同代表元系统，简记为 SDR。

定理 1.1.3 [1] 一个子集集合 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 有 SDR 当且仅当对于每一个 $k, 0 \leq k \leq n$ ，集合 $\{S_1, S_2, \cdots, S_n\}$ 中任何 k 个子集的并的阶数至少是 k。

关于这一时期匹配理论发展的更多有趣综述，可参见 König 在 1936 年写的一本书 [9]。

在二次世界大战期间，关于匹配理论的文章出现的很少。后来在 1942 年，Rado 发表了一篇文章，他把 Hall 的定理推广到欧式空间中相互独立的不同代表系，从而建立了匹配与拟阵之间的关系。

二战过后，相继出现了影响比较大的几个结果，并且从这一时期开始，匹配理论的发展达到高潮时期。

后来，Tutte 在 1947 年给出了判定一个图是否存在完美匹配的一个充分必要条件：

定理 1.1.4 [1](Tutte). 一个图 G 有完美匹配当且仅当对任意 $S \subseteq V(G)$, 都有 $\omega_o(G-S) \leq |S|$ 成立。

上述 Tutte 定理也给出了一个没有完美匹配图的刻画，即只需要在任意一个没有完美匹配的图 G 中找到一个点集 S 使得 $G-S$ 中至少有 $|S|+1$ 个奇分支，也称这样的点集 S 为 Tutte 集。但实际上这个 Tutte 集不容易找到。

在 1964 年，Gallai 根据一个图的最大匹配给出了图 G 的典型分解理论，得