学校编码：10384　　　　分类号_______密级______
学号：19020091152274　　　　UDC_______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

多资产价格泡沫与Black-Scholes方程

Multi-asset Price Bubble and Black-Scholes Equation

王艳培

指导教师姓名：　刘 继 春 教授

专 业 名 称：　应 用 数 学

论文提交日期：　2012 年 5 月

论文答辩时间：　2012 年 6 月

学位授予日期：　2012 年 　月

答辩委员会主席：___________

评　　阅　　人：___________

2012 年 　月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

在过去的几十年中，金融证券和衍生品的交易增长速度非常惊人，交易者对于数学工具的应用也已经相当的娴熟。交易过程中，资产的过高定价导致的泡沫和冲击也常常给投资者带来负面的影响。Jarrow，Protter 和 Shimbo (2010)用局部鞅理论研究了连续时间下的资产价格泡沫，严格区分了资产的基本价格和市场价格的不同。并指出市场在满足无套利(No Free Lunch Vanishing Risk，NFLVR)和无优势(No Dominance，ND)条件下，资产价格泡沫可以分为三种类型：一致可积鞅、非一致可积鞅和严格局部鞅。最后给出了衍生品的价格泡沫的性质。

在金融数学中，计算期权价格有两种方法：一是将期权价格看成是风险中性期望价值，另一个是通过求解Black-Scholes方程来得到。在标准的Black-Scholes模型中，股票价格过程服从一个几何布朗运动，相应的B-S方程可以保证有唯一解。然而，Cox，Hobson(2005)证明了当标的资产的折现价格在风险中性测度下是严格局部鞅时，期权定价理论中一些标准结果不再成立，例如：买卖平价关系不一定成立；Black-Scholes方程可以有多个解。Ekström，Tysk(2009)给出了带泡沫的市场的期权定价理论：由风险中性期望值给出的期权价格是相应Black-Scholes方程的经典解。

本文主要研究的是多资产的期权模型。对于多资产的期权，期权价值是由几个标的资产价格的随机性决定的，且标的资产不一定独立，则相应的多维Black-Scholes期权方程中会包含二阶交叉项。我们证明了，在满足一定的边界条件时，期权价格的随机表示也是多维B-S方程的经典解。

关键词：局部鞅，泡沫，经典解

Abstract

In recent years,there have seen a spectacular growth in the trading of financial securities and derivatives,and a spectacular growth in the sophistication of the mathematical tools used by traders.The bubbles and crashes where over-pricing was followed by market corrections,often caused serious negative effect for investors in the transaction.Jarrow，Protter and Shimbo defined fundamental prices and market prices carefully,rigorously clarifying the distinction and studied the asset price bubbles in continuous times by using the theory of local martingale. They showed, under the conditions of No Free Lunch Vanishing Risk(NFLVR) and No Dominance(ND),that asset price bubbles could be decomposed into three types: a uniformly integrable martingale, a local martingale but not a uniformly integrable martingale and a strict local martingale. Then they considered the properties of bubbles in derivative securities written on the risky asset.

In financial mathematics there are two main approaches to the calculation of option prices.Either the price of an option is viewed as a risk-neutral expected value,or it is obtained by solving the Black-Scholes partial differential equation. In the standard Black-Scholes models, the stock price processes follow a standard Brown motion, which guaranteed the unique solution of the corresponding Black-Scholes equation. However, Cox，Hobson(2005) considered markets where the underlying asset, when discounted, followed a strict local martingale under the risk-neutral probability measure, many standard results in option pricing theory failed. For example, put-call parity does not hold, the Black-Scholes equation can have multiple solutions. Ekström, Tysk(2009) showed that the option price, given as a risk-neutral expected value, was the classical solution of the corresponding Black-Scholes equation.

The aim of our article is to study the option models which are multi-variate. For the multi-variate options, the option value is determined by the stochastic behaviors of several underlying asset price and the correlation coefficients between the stochastic quantities. Unlike the usual type equations,the multi-dimensional Black-Scholes option equation contains second order cross derivative terms. We show, when satisfying some boundary conditions, that the option price, given as a risk-neutral expected value, was the classical solution of the corresponding multi-dimensional Black-Scholes equation.

Key Words: local martingale, bubbles, classical solution

目　录

第一章　引言

1.1 研究背景

在过去的几十年中，金融证券和衍生品的交易增长速度非常惊人，交易者对于数学工具的应用也已经相当的娴熟。在交易过程中，资产的过高定价导致的泡沫和冲击也常常给投资者带来负面的影响。那么，什么是资产价格泡沫呢？

尽管大多数学者和实务界人士均承认泡沫的存在，但学术界目前对资产价格泡沫尚未给出严格的定义。美国经济学会前会长Charles Kindleberger(1978) 将泡沫描述为："'泡沫状态'这个词，随便一点说，就是一种或一系列资产在一个连续过程中陡然涨价，开始的价格上升会使人们产生出还会继续涨价的预期，于是又吸引了新的买主，这些人一般只是想通过买卖牟取利润，而对这些资产本身的使用和产生盈利的能力是不感兴趣的。随着涨价常常是预期的逆转，接着就是价格的暴跌，最后以金融危机告终。通常，'繁荣'的时间要比泡沫状态长些，价格、生产和利润的上升也比较温和一些，以后也许接着就是以暴跌（或恐慌）的形式出现危机，或者以繁荣逐渐消退告终而不发生危机。"

从资本市场的现实看，资产价格泡沫并不是新现象，历史上发生过很多泡沫投机事件，其中最为著名的有：1634年到1637年的荷兰郁金香狂热、1720年的法国劳氏体系崩溃事件、英国南海泡沫事件、1920年美国佛罗里达土地泡沫投机事件和1929年股市的崩溃。每一次资产价格泡沫破灭产生的危机都是重大的。

1.2 研究进展

理论上讲，资产的市场价格与基本价格的差异产生了资产价格泡沫，研究泡沫存在的形式与运行机制对金融市场有着非常重要的作用。泡沫经济现象由来已久，关于泡沫的理论研究也一直在进行。许多学者从不同的角度对资产价格泡沫问题进行研究，取得了很多令人深受启发的研究成果。在均衡经济中，价格泡沫的存在和不存在的充分条件已经得到了广泛研究。Tirole(1982) 和 Santo，Woodford(1997)指出：泡沫在有限时间理

性预期模型中不存在。但如果交易者目光短浅(Tirole，1982)、市场上有非理性的交易者(De Long，1990)、市场是一个有理性交易者的无限时间域经济(Tirole，1985；O'Connell 和 Zeldes，1988；Weil，1990)、理性交易者有不同的信仰以及套利者不能同步交易(Abreu 和 Brunnermeier，2003)或交易者受到卖空、买空的限制(Santos 和 Woodford，1997；Scheinkman 和 Xiong，2003b)，市场有可能产生泡沫。在这些模型中，虽然有不同的原因，但套利者都不能从中赢利和排除价格泡沫。泡沫均衡和太阳黑子均衡有很多相同的特征，即仅仅因为交易者自身的信仰，外生的不确定性因素会影响资源的配置(Cass 和 Shell，1983；Balasko，Cass 和 Shell，1995)。事实上，在泡沫经济中，自身的信仰通常使得交易者期望以更高的价格将资产卖给另一个交易者(Harrison 和 Kreps，1978；Scheinkman 和 Xiong，2003b)。

均衡模型给经济赋予了一个本质的框架，特别是投资者最优理论和总供给等于总需求的市场出清机制。人们在无套利条件(No Free Lunch with Vanishing Risk，NFLVR)的限制下，运用数理金融的方法和工具研究了资产价格泡沫，主要有Loewenstein 和 Willard (2000)，Cox 和 Hobson(2005)，Heston，Loewenstein和Willard(2007)。这些文章主要研究了在有限交易时间经济市场下，满足无套利条件(NFLVR)的资产价格泡沫的特征和衍生证券的定价等问题。然而，这些资产价格泡沫的理论违反了经典期权定价的理论，特别是买卖平价关系。这可能是在满足无套利条件(NFLVR)的经济结构中缺少了其他限制条件，才产生了这些违反经典理论的资产价格泡沫。为了与经典理论保持一致，我们需要在无套利条件(NFLVR)的基础上附加更强的限制条件。

在研究资产价格泡沫问题时，需要附加的条件就是：无优势(No Dominance；Merton，1973)。无优势条件比无套利条件(NFLVR)更强，但比将市场限制为一个均衡市场的条件要弱。Jarrow，Protter 和 Shimbo(2006)已经研究了在无限交易时间下，满足无套利条件(NFLVR)和无优势(ND) 条件的完备市场中的资产价格泡沫。研究表明附加的“无优势”条件排除了完备市场中所有的资产价格泡沫。也就是说如果资产价格泡沫存在，那么市场必须是不完备的。所以Jarrow，Protter 和 Shimbo(2010a)在无套利条件(NFLVR)和无优势(ND) 条件的假设下，研究在不完备市场下的资产价格泡沫问题。

给定一个非负的随机价格过程$S = (S_t)_{t\geq 0}$ 和一个无风险货币市场账户$r = (r_t)_{t\geq 0}$，都定义在一个可测的带流的完备概率空间$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ 上，其

中$\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$。资产定价第一基本定理表明(Delbaen 和 Schachermayer，1994)：市场满足无套利条件(NFLVR)，当且仅当存在一个等价鞅测度Q 使得S 是一个关于$\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ 的$\sigma-$鞅。由于资产的价格过程S 非负，所以下界为零。因为任何有下界的$\mathbb{F}=(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\sigma-$鞅是一个局部鞅，因此我们仅仅需要考虑局部鞅。

为了定义资产价格泡沫，首先我们需要定义资产的基本价格。传统上，在完备市场中，基本价格为无套利价格(Harrison 和 Kreps，1978)，即在鞅测度下的资产现金流折现的期望值。但是，资产的基本价格和市场价格常常为人们所混淆。Jarrow，Protter 和 Shimbo(2010a)严格地区分了这两种价格的不同。然而，对于不完备市场，资产定价第二基本定理(Jarrow，Protter 和 Kchia，2010) 说明：市场中有许多局部鞅测度可以用来定义基本价格。用Jacod，Protter(2009) 和 Schweizer，Wissel(2008)的观点，Jarrow，Protter 和 Shimbo(2010a)选取与衍生证券市场价格一致的唯一的局部鞅测度Q。

在离散时间的经济理论(Diba 和 Grossman，1987；Weil，1990)，泡沫的现有理论表明：泡沫在模型开始后可以结束或者“破裂”，但不可以“产生”。也就是说，泡沫必须在模型一开始时就存在或者在整个模型中完全不存在。这与实际中一般的经济理念和历史经验不相符，为了解决这个问题，Jarrow，Protter 和 Shimbo(2010a)介绍了一个泡沫可以在模型开始以后产生的新理论。

Cox 和 Hobson(2005)证明了当标的资产的折现价格在风险中性测度下是严格局部鞅时，期权定价理论中一些标准结果不再成立，例如：买卖平价关系不成立，B-S方程有多个解，美式看涨期权价格大于欧式看涨期权价格。Ekström 和 Tysk(2009)给出了带泡沫的市场的期权定价理论。首先，由风险中性期望价值给出的期权价格一定是B-S方程的解且是线性增长的。然后，证明了当回报函数满足严格次线性增长时，期权价格是B-S方程的唯一解。

1.3 本文结构

本文第二章描述了资产价格泡沫的鞅定价法，第三章介绍了资产价格泡沫的B-S方程定价法，在第四章中我们参考了Janson 和 Tysk(2006)中的证明方法，证明了期权价格的随机表示是B-S方程的经典解，并给出了多资产价格泡沫的定义。最后在第五章中对所做内容进行了总结并指出一些不足。

第二章　泡沫的鞅定价法

2.1 市场价格过程

考虑无摩擦且完全竞争的市场。其中，无摩擦是指没有交易费用和交易障碍；完全竞争是指经济中的所有交易者都是价格的接受者，以至于没有一个交易者的行为能够影响市场价格。

令$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ 是带σ-流的完备概率空间，其中$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$，且满足一般的假设条件，即(1)单调递增性：$\mathcal{F}_s \subseteq \mathcal{F}_t, \forall s \leq t$；(2) 右连续性：$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t+} := \cap_{s>t}\mathcal{F}_s$。在我们的经济框架下，可交易的是一个风险资产和一个货币市场账户。记t 时刻货币市场账户的价值为：

$$B_t = \exp(\int_0^t r_u du)$$

其中，r 是一个非负的适应过程，表示无风险利率。

令τ 是一个停时，表示风险资产的终止时间；$D = (D_t)_{0\leq t<\tau}$ 是一个适应于$\mathbb{F}$ 的右连左极(càdlàg) 的半鞅过程，表示从持有风险资产的时刻起，累积的现金流过程，且$D \geq 0$；$X_\tau \in \mathcal{F}_\tau$ 表示风险资产在τ 时刻的回报或清算价值,且$X_\tau \geq 0$。$S = (S_t)_{0\leq t<\tau}$ 是一个非负的右连左极(càdlàg)半鞅，表示风险资产的市场价格。

设W 是风险资产市场价格的财富过程，即

$$W_t = I_{\{t<\tau\}}S_t + B_t \int_0^{t\wedge\tau} \frac{1}{B_u} dD_u + X_\tau I_{\{\tau\leq t\}}$$

表示累积现金流与风险资产的市场价格的和(其中$I_{\{\cdot\}}$ 为示性函数)，在$t \geq \tau$ 时，财富过程的市场价格由股票的累积红利和清算价格组成。

2.2 无套利(NFLVR) 和 无优势(ND)

我们在有效运行的经济中考虑资产价格泡沫的存在性及其特征。有效运行的经济满足两个条件：(1)市场是无套利的(NFLVR)；(2)资产满足无优势(ND)条件。

在期权定价文献中，无套利(NFLVR)是一个标准的限制，但无套利 (NFLVR)的限制相对较弱，因为它是依据交易者个人的最优决策，而经济中所有交易者的综合行为没有限制。泡沫是市场上的一种广泛现象，也是由所有交易者的综合行为产生的，所以要求市场满足无套利(NFLVR)条件是合理的。在传统的经济模型中，资产价格满足均衡条件，即总供给等于总需求，这就需要一种特殊的市场出清机制，显然条件太强了。这里采用Merton(1973)的无优势条件。

如果在初始时刻资产A的价格小于等于资产B的价格，而资产A的回报(分红和清算价值)总是至少比资产B的回报大，或者以正概率严格大于资产B的回报，则称资产A比资产B“有优势”。可以看出，上述情况会产生简单套利交易策略，这违反了无套利条件(NFLVR)。如果一个投资者喜好更多的财富，则没有理性的交易者会在他们的最优投资组合中购买B。可以看出，一个均衡经济的必要条件是资产A的价格与B的价格必须相等。

需要注意的是，资产价格泡沫的理论严格依赖于计价单位的选择。我们一开始选择无风险货币市场账户作为计价单位，在其基础上的风险资产价格过程可能是无界的。由于货币市场账户表示经济市场中一个投资者的无风险投资，所以从经济学的角度来看这是一个适当的选择。

2.3 泡沫的定义、存在性及其特征

首先，在无套利条件(NFLVR)假设下，由资产定价第一基本定理知，存在等价概率测度Q，使得W_t/B_t 在测度 Q 下是局部鞅，其中，Q 称为等价局部鞅测度(Equivalent Local Martingale Measure，ELMM)。因为$W_t/B_t \geq 0$，则W_t/B_t是非负上鞅，所以资产价格与累积现金流之和，即$(S_t + B_t \int_0^t \frac{1}{B_u} dDu)B_t^{-1}$ 也是Q 局部鞅，且是非负上鞅。

假设市场是不完备的，由资产定价第二基本定理知，等价局部鞅测度Q 不唯一。为了定义资产的基本价格，需要确定唯一的等价局部鞅测度，我们假设市场上选择Q 作为等价局部鞅测度。因此，在Q 下，定义风险资产的基本价格为：

$$S_t^* = E_Q\left(\int_t^\tau \frac{1}{B_u} dDu + \frac{X_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau<\infty\}} \mid \mathcal{F}_t\right) B_t$$

表示持有资产到清算时刻τ 时，未来现金流的现值。

定义 2.1: (Jarrow，Protter 和 Shimbo，2010a，定义3.6) 资产价格泡沫定义为资产的市场价格与基本价格之间的差，即

$$\beta_t = S_t - S_t^*$$

则有以下事实：

(1) $(S_t + B_t\int_0^t \frac{1}{B_u}dDu)B_t^{-1}$ 是Q 局部鞅且是非负上鞅，τ 时刻的价值为$(B_\tau\int_0^\tau \frac{1}{B_u}dDu + X_\tau)$;

(2) $(S_t^* + B_t\int_0^t \frac{1}{B_u}dDu)B_t^{-1}$ 是一致可积鞅，τ 时刻的价值为$(B_\tau\int_0^\tau \frac{1}{B_u}dDu + X_\tau)$.

可以看出，资产价格泡沫不为零等价于$(S_t + B_t\int_0^t \frac{1}{B_u}dDu)B_t^{-1}$ 是严格Q 局部鞅。正是由于严格局部鞅(泡沫)和鞅(无泡沫)之间的区别,所以把这种方法称作泡沫的鞅理论。

2.4 资产价格泡沫的性质

Jarrow，Protter 和 Shimbo(2010a)证明了资产价格泡沫的如下性质：

定理 2.1: 如果存在一个资产的价格泡沫$\beta \neq 0$，则泡沫只有下面三种情况：

(1) β 是一个局部鞅(且可能是一致可积鞅)，如果$P(\tau = \infty) > 0$;

(2) β 是一个局部鞅，但不是一致可积鞅，如果它是无界的，并且$P(\tau < \infty) = 1$;

(3) β 是在测度Q 下的严格局部鞅，如果τ 是有界停时。

定理2.1表明，资产价格可以表现出三种类型的泡沫。当资产的寿命无限，且清算时刻$\tau = \infty$ 时，存在第一类泡沫；当资产的寿命有限，但是无界时，存在第二类泡沫；当资产的寿命有界时，存在第三类泡沫。

上述定理的结论进一步扩展，可以得到资产价格泡沫的唯一分解。

定理 2.2: 资产价格S 可以表示为一个唯一的分解：

$$S = S^* + \beta = S^* + (\beta^1 + \beta^2 + \beta^3)$$

(1) β^1 是右连左极(c$\grave{a}$dl$\grave{a}$g)的非负一致可积鞅，且$\beta^1 \to X_\infty, a.s.$；

(2) β^2 是右连左极(c$\grave{a}$dl$\grave{a}$g)的非负非一致可积鞅，且$\beta^2 \to 0, a.s.$；

(3) β^3 是右连左极(c$\grave{a}$dl$\grave{a}$g)的非负上鞅(且是严格局部鞅)，满足$E\beta^3 \to 0, a.s.$ 且$\beta^3 \to 0, a.s.$ 如果τ 是有界停时。

定理2.2中的β^1，β^2，β^3 分别对应于第一，二，三类型的泡沫。由上面的理论可以直接推出下面的结论。

推论 2.1: 任何一个非零资产价格泡沫β 是严格Q 局部鞅，且具有以下性质：

(1) $\beta \geq 0$;

(2) $\beta_\tau I_{\{\tau<\infty\}} = 0$;

(3) $\forall u \geq t$,若$\beta_t = 0$,则$\beta_u = 0$;

(4) 若没有现金流，则

$$S_t = E_Q\left(\frac{S_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right) B_t + \beta_t^3 - E_Q\left(\frac{\beta_T^3}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right) B_t。$$

定理说明：

(1) 泡沫总是非负的，即资产的市场价格不会比基本价格小；

(2) 如果有限的$\tau < \infty$ 为泡沫的最后破裂时间，则泡沫必须在τ 时刻或者τ 以前破裂；

(3) 泡沫在模型开始时就存在，或者永远不存在，若存在但是破裂了，不能重新产生；

(4) 说明了为什么市场价格S 在测度Q 下不是鞅。

在给出资产价格泡沫的存在性之后，要考虑这样一个问题：资产价格泡沫的存在性如何影响衍生产品的价格？资产价格泡沫是否独立存在于衍生产品中？

2.5 衍生证券

这一部分考虑以风险资产为标的资产的衍生证券的资产价格泡沫问题。主要对欧式期权、美式期权、远期合约等衍生品进行价格泡沫问题的讨论。首先，需要对衍生品的基本价格下定义。为了简单其见，假设风险资产S 在时间$(0, T]$ 上不支付分红。T 为衍生证券的到期日，风险资产的清算时间$\tau > T$ 几

乎处处成立，衍生证券的收益为$H_T(S)$，其中H_T 是$(S_u)_{u\leq T}$ 的函数。由上可以看出，平时在衍生证券相关定义中的收益是以风险资产的市场价格为基础的，而不是以基本价格为基础的。

设t 时刻衍生证券H 的市场价格为$\Lambda_t(H_T(S))$，和风险资产一样，衍生证券的基本价格定义为：在局部等价鞅测度Q 下，衍生证券在到期日T 的收益的条件期望，即$E_Q\left(\frac{H_T(S)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right)B_t$。则衍生证券的资产价格泡沫$\delta_t$ 为其市场价格与基本价格之间的差，表示如下：

$$\delta_t = \Lambda_t(H_T(S)) - E_Q\left(\frac{H_T(S)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right)B_t$$

2.5.1 有界回报的证券

下面的引理在研究标准的证券合约时是很有用的。

引理 2.1: (Jarrow，Protter 和 Shimbo，2010b，引理3) 如果$H_T(S)$ 是有界回报函数，则证券的价格没有泡沫，即

$$\Lambda_t(H_T(S)) = E_Q\left(\frac{H_T(S)}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right)B_t$$

这个引理的简单应用就是无违约零息债券，无违约零息债券是在到期日T 时刻支付一美元的证券，记t时刻的市场价格为$p(t,T)$。由于零票息债券是有界清算价格的资产，所以零息债券没有价格泡沫，即

$$p(t,T) = E_Q\left(\frac{1}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right)B_t$$

当然，这个引理也可用于其它有固定收益的债券，如信用风险债券等。

2.5.2 欧式期权

对欧式衍生证券的资产价格泡沫问题进行研究时，我们主要考虑三种衍生证券：远期合约、欧式看跌期权、欧式看涨期权，假设它们都是以相同的风险资产为标的资产。每种衍生证券都是通过在到期日T 的回报函数来定义的。设执行价格为K，到期日为T 的风险资产的远期合约回报为$(S_T - K)$，记V_t 为远期在t 时刻的市场价格。设执行价格为K，到期日为T 的欧式看涨期权的回报为$(S_T - K)^+$，记C_T 为t 时刻欧式看涨期权的市场价格。最后，设执行价格

为K，到期日为T 的欧式看跌期权的回报为$(K - S_T)^+$，记P_t 为t 时刻欧式看跌期权的市场价格。同理可设V_t^*, C_t^*, P_t^* 分别是远期，看涨期权，看跌期权的基本价格。下面定理是关于衍生证券“买卖平价关系”的讨论。

定理 2.3: (Jarrow，Protter 和 Shimbo，2010b，定理4) 基本价格的买卖平价关系

$$C_t^* - P_t^* = V_t^* = S_t^* - p(t,T)K$$

注意到衍生证券基本价格的“买卖平价关系”不需要“无优势”这个条件，资本市场只需要满足无套利条件(NFLVR)。也就是说，对于衍生证券基本价格，无论资产是否有价格泡沫，“买卖平价关系”都是成立的。

下面的定理说明“买卖平价关系”对衍生证券的市场价格也成立。

定理 2.4: (Jarrow，Protter 和 Shimbo，2010b，定理5)市场价格的买卖平价关系

$$C_t - P_t = V_t = S_t - p(t,T)K$$

由于定理的证明严格依赖于无优势(ND)假设，所以如果市场仅满足无套利条件(NFLVR)，衍生证券的市场价格的“买卖平价关系”不成立。若存在，则市场必须满足无优势(ND)条件。

定理 2.5: (Jarrow，Protter 和 Shimbo，2010b，定理6) 欧式看跌期权

对所有$K \geq 0$，下式成立：

$$P_t = P_t^*$$

定理的证明过程用引理2.1。因为欧式看跌期权的回报函数以K 为上界。这说明了无论资产是否有价格泡沫，欧式看跌期权都没有泡沫。

定理 2.6: (Jarrow,Protter 和 Shimbo，2010b，定理7)欧式看涨期权

对所有$K \geq 0$，下式成立：

$$C_t - C_t^* = S_t - E_Q\left(\frac{S_T}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right) B_t = \beta_t^3 - E_Q\left(\frac{\beta_T^3}{B_T} \mid \mathcal{F}_t\right) B_t$$

因为看涨期权的到期日有限，所以如果看涨期权存在泡沫，那么一定是第三类泡沫，等于标的资产的第三类泡沫减去第三类泡沫在期权到期日剩余价值