学校编号： 10384　　　　分类号＿＿＿＿＿＿密级＿＿＿＿＿＿
学　　号： 200423006　　　　UDC＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

Stein 流形局部 q- 凹楔形上 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计

Uniform Estimates of Solutions of $\bar{\partial}$-Equations on local q-Concave Wedges in Stein Manifolds

阮 世 华

指导教师姓名： 邱春晖 教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2007 年 4 月

论文答辩日期： 2007 年 　月

学位授予日期： 2007 年 　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿

评 阅 人：＿＿＿＿＿＿

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人 (签名):

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名：　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

导师签名：　　　　　　日期：　　　年　　月　　日

目　　录

Contents

摘 要

局部 q- 凹楔形是一类重要的域，被广泛的用来讨论 CR 流形，切线的 Cauchy-Riemann 方程，CR- 函数的全纯开拓，$\bar{\partial}$- 上同调理论. 对于 $q = n-1$，一个局部 q- 凹楔形就是一个逐块光滑强拟凹域和一凸域的交集，因此局部 q- 凹楔形代表了一类广泛的域. C. Laurent-Thiébaut & J. Leiterer[13] 得到了 $\mathbb{C}^n$ 中局部 q- 凹楔形上 (n, r) 型微分形式的 Cauchy-Riemann 方程并对 $\overline{\partial}$- 方程解做了一致估计. 进一步，钟同德 [16−17] 利用 Hermitian 度量和陈联络，得到了 Stein 流形局部 q- 凹楔形上 (r, s) 型微分形式的 Koppelman-Leray-Norguet 公式，同伦公式和局部 q- 凹楔形上 (r, s) 型 $\overline{\partial}$- 方程的解. 本文在 [16,17] 的基础上，利用 J. P. demailly & C. Laurent-Thiébaut[8] 的思想以及 Range-Siu[14] 的技巧，给出 Stein 流形局部 q- 凹楔形上 (r, s) 型微分形式的 $\overline{\partial}$- 方程解的一致估计.

全文分三章，其中：

第一章介绍了 Stein 流形局部 q- 凹楔形上的一些定义，基本引理，包括局部 q- 凹楔形，子流形 Γ_K，局部 q- 凹域的 Leray 映射等等.

第二章介绍了算子 M 和 H，局部 q- 凹楔形上的同伦公式以及 $\overline{\partial}$- 方程的解，其中也包括核 $\hat{H}$ 的奇性阶.

第三章对 $\overline{\partial}$- 方程的解进行一致估计，这一章是全文的重点.

关键词： Stein 流形； Hermitian 度量；局部 q- 凹楔形； $\bar{\partial}$- 方程；一致估计.

ABSTRACT

A local q-concave wedge is an important class of domains, it has been vastly used to discuss CR manifolds, tangential Cauchy-Riemann equations, holomorphic extensions of CR-functions and $\bar{\partial}$-cohomology. For q=n-1, a local q-concave wedge is simply the intersection of a piecewise smooth strictly pseudoconcave domain with a convex domain, therefore a local q-concave wedge represents a large class of domains. C. Laurent-Thiébaut & J. Leiterer[13] obtained the Cauchy-Riemann equation for (n,r) differential forms on q-concave wedges of $\mathbb{C}^n$ and uniform estimate for the $\bar{\partial}$-equation. Further, by means of the Hermitian metric and Chern connection, Tongde Zhong[16−17] obtained the Koppelman-Leray-Norguet formula, homotopy formula and the solutions of $\bar{\partial}$-equation for (r,s) differential forms on a local q-concave wedge in Stein manifolds. On the base of [16,17], by means of the ideas of J. P. Demailly & C. Laurent-Thiébaut[8] and the trick of Rang-Siu[14], the author obtains uniform mestimates of the solutions of $\bar{\partial}$-equation for (r,s) differential forms on local q-concave wedges on Stein manifolds.

The dissertation includes three chaptes:

In the first chapter, the author introduces some definitions, the basic lemma on local q-concave wedges in Stein manifolds, including local q-concave wedge, the subminifold Γ_K, a Leray map for local q-concave wedge and so on.

In the second chapter, the author introduces the operator M and H, homotopy formula for local q-concave wedges and the solutions of $\bar{\partial}$-equations, including the singularity of kernel $\hat{H}$.

In the third chapter, the author obtains the uniform estimate of solutions of $\bar{\partial}$- equation and the main result of this paper.

Key words: Stein manifold; Hermitian metric; Local q-concave wedge; $\bar{\partial}$-equation; uniform estimate.

Stein 流形局部 q- 凹楔形上 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计 *

引 言

多元复分析是现代数学中最为活跃的学科之一. 一般认为, 现代数学的特点之一就是高维, 而多复变函数正是反映这一特点的方向之一. 19 世纪初, 多复分析只是单复分析的简单推广. 而到 20 世纪, 由于 Poincare, Hortogs 的发现, 决定了多复函数论与单复变函数论在很多方面有着本质的不同, 从而多复变作为一个独立研究方向获得发展.

早在 1831 年, Cauchy 发现了以其名字命名的著名的 Cauchy 积分公式, 数学家就认识到积分表示在复分析中的重要性. 自从上个世纪 70 年代 Henkin[1−2] 和 Grauert& Lieb[3] 分别得到了 $\mathbb{C}^n$ 空间中强拟凸域 $\bar{\partial}$- 方程解的积分公式后, 多复变数的积分表示方法迅速发展起来, 成为多元复分析的主要方法之一, 它的主要优点是象单变数的 Cauchy 积分公式一样便于估计.

自从 Koppelman[4] 于 1967 年得到了 $\mathbb{C}^n$ 空间中 (0, q) 型微分形式的 Koppelman 公式, 有关 $\mathbb{C}^n$ 空间中 (0, q) 型微分形式的积分表示理论已经有了很多研究 [5−7], 但复流形上的积分表示的研究则是近几年才开始的. 首先, Henkin 和 Leiterer[5] 研究了 Stein 流形上 (0, q) 型微分形式的积分表示理论, 得到了 (0, q) 型的 Koppelman 公式, Koppelman-Leray 公式和 Koppelman-Leray-Norguet 公式, 并给出了 $\bar{\partial}$- 方程的解. 接着 Demailly 和 Laurent-Thiebaut[8] 研究了 Stein 流形上 (p, q) 型微分形式的积分表示理论, 得到了 (p, q) 型的 Koppelman 和 Koppelman-Leray 公式以及 $\bar{\partial}$- 方程的解, 它和 (0, q) 型微分形式的情形有本质的区别, 这时不能象 $\mathbb{C}^n$ 空间一样采用 Euclid 度量, 因为在 Stein 流形上 (p,q) 型微分形式的积分核在 Euclid 度量下不是全纯变换下的不

* 国家自然科学基金资助项目 (项目批准号: 10571144) 和厦门大学新世纪优秀人才计划.

变量. 为了克服这个困难， Demailly 和 Laurent-Thiebaut[8] 利用 Hermitian 度量和 Chern 联络，给出了不变积分核，这是一个十分重要的思想.

一个局部 q- 凹楔形是一类重要的域. 它被 G.M.Henkin, R.A.Airapetian, C.Laurent-Thiebaut, J.Leiterer, A.Andreotti 和 H.Grauert[9−10] 广泛应用于讨论 CR 流形，切线的 Cauchy-Riemann 方程， CR- 函数的全纯开拓， $\bar{\partial}$- 上同调理论. 对于 $q = n-1$, 一个局部 q- 凹楔形是一个逐块光滑强拟凹域和一凸域的交集，因此局部 q- 凹楔形代表了一类广泛的域.

$\mathbb{C}^n$ 空间中局部 q- 凹楔形，对于光滑的情况 (∂D 光滑分段数 N=1), 1979 年 Lieb[11] 得到了 q- 凹楔形上 Cauchy-Riemann 微分方程的一致估计. 从比较特殊的情况转到一般的情况 (即 $1 \leq q \leq n-2$ 和 ∂D 光滑分段数 N 大于 1 的情况) 遇到了下面的问题： Leray 映射 (见定义 1.8) 关于 λ 不再是线性的. 这个问题首先由 Airapetjan 和 Henkin[12] 讨论. 他们注意到在关于 λ 是非线性的情况下对 λ 直接积分成为一个相当难的问题 (见 [12] 中的 1.4 节) ，从而他们提出了一个重要的想法：如果 Leray 映射关于 λ 是一个特殊有理的形式 (见 [12] 中公式 (1.4.1)) ，应用他们所谓推广的 Fantappie-Feynman 公式 (见 [12] 中命题 1.4.1) ，直接积分也是可以的. 进一步，在 [12] 中的命题 6.2.1 ，Henkin 证明的思想： 1) 构造一个上面所提到关于 λ 是特殊有理的分段形式的 Leray 映射. 2) 依靠推广的 Fantappie-Feynman 公式对 λ 直接积分. 3) 关于被积函数模的积分估计.

Christine Laurent-Thiébaut 和 Jürgen Leiterer[10,13] 对 Henkin 技巧做了修改：不找特殊形式的 Leray 映射，而是利用 Range & Siu[14], W. Fischer 和 Lieb[15] 构造的推广获得一个 Leray 映射，并证明了在某种狭义意义下，这个 Leray 映射就是上面所提到的特殊有理形式. 他们于 1992 年给出了 $\mathbb{C}^n$ 空间局部 q- 凹楔形上 (n, r) 型微分形式的积分公式，同伦公式并利用一个与推广的 Fantappie-Feynman 公式接近的辅助不等式给出了 $\bar{\partial}$- 方程解的一致估计. 随后 1998 年，钟同德 [16−17] 利用 Hermitian 度量和 Chern 联络，以及 Henkin 技巧构建 Stein 流形局部 q- 凹楔形的 Leray 映射和不变积分核，从而给出了一个新的，不依赖于边界积分的 Koppelman-Leray-Norguet 公式，同伦公式

以及 $\bar{\partial}-$ 方程的解.

本文的目的是应用 Demailly 和 Laurent-Thiebaut[8] 的思想，利用 Hermitian 度量和 Chern 联络， m- 型算子，一个辅助不等式， λ- 自由式以及 Range-Siu 技巧对 Stein 流形上的局部 q- 凹楔形的 $\bar{\partial}$- 方程解进行一致估计.

第一章，简单介绍一下 Stein 流形局部 q- 凹楔形上的有关定义， q- 结构， q- 凹楔形的定义， Leray 映射，子流形 Γ_K 等基本定义和基本引理以及一些符号.

第二章，给出了支撑函数 Φ 和 Φ^* ，利用 Hermitian 度量和陈联络，通过 Leray 映射 ψ 构造不变积分核，用区域的积分代替边界积分，得到了 Stein 流形局部 q- 凹楔形上新的，不涉及边界积分的 Koppelman-Leray-Norguet 公式，同伦公式以及 $\bar{\partial}$- 方程的解.

第三章, 对 $\bar{\partial}$- 方程的解进行一致估计. 本文主要是对积分 H' 一致估计. 利用局部化技巧证明了 H' 算子是有限个 $m(m \geq 0)$ 型算子之和. 接着利用一个辅助不等式， λ- 自由式来估计 m 型算子，然后应用 Range-Siu[14] 技巧得到 $\bar{\partial}$- 方程的解的一致估计. 这是本文的主要结果.

第一章 Stein 流形 q- 凹楔形上有关定义和基本引理

在这一章里，我们首先介绍 Stein 流形 q- 凹楔形上的有关定义和基本引理，为后面的定理和估计作准备.

§1.1 Stein 流形

定义 1.1[5−6] 设 X 是一复 n 维的复流形， $\vartheta=\vartheta(X)$ 为 X 上的全纯函数. X 称为 Stein 流形，如果它满足下列三个条件：

(i) X 是全纯凸的，即对 X 中任一紧集 K,

$$\widehat{K}_{\vartheta}=\left\{z\in X:|f(z)|\leq\sup_{K}|f|,\forall f\in\vartheta(X)\right\}$$

也是 X 中的紧集;

(ii) X 中的全纯函数可分离 X 上的点，即对于任意的 $z,w\in X,z\neq w$, 存在 $f\in\vartheta(X)$, 使得 $f(z)\neq f(w)$;

(iii) X 上的全纯函数可给出 X 的局部坐标，即对于任意的 $z\in X$, 存在 $f_1,\cdots,f_n\in\vartheta(X)$, $(f_1,\cdots,f_n)$ 是 z 的一个邻域的局部坐标.

定义 1.2[5−6] 复切丛和复余切丛及其范数

设 X 是一个复 n 维的复流形，令 $\left\{(U_j,h_j)\right\}$ 是 X 的全纯坐标卡. 设 $U_j\subset\subset X$. 令 $G_{ij}(z):=J_{h_i\circ h_j^{-1}}(z),z\in U_i\cap U_j$, 这里 $J_{h_i\circ h_j^{-1}}(z)$ 是 $h_i\circ h_j^{-1}$ 在 z 的 Jacobi 矩阵. 那么在 $U_i\cap U_j\cap U_k$, 有 $G_{ij}G_{jk}=G_{ik}$. 由过渡函数 G_{ij} 定义 X 上的全纯向量丛用 $T(X)$ 表示，称作 X 上的复切丛. 由过渡函数 $(G_{ij}^t)^{-1}$ 定义 X 上的全纯向量丛用 $T^*(X)$ 表示，称作 X 上的复余切丛，这里 $(G_{ij})^t$ 是 G_{ij} 的转置. $T(X)$ 和 $T^*(X)$ 在 $z\in X$ 的纤维用 $T_z(X)$ 和 $T_z^*(X)$ 表示. $T(X)$ 和 $T^*(X)$ 关于投影 $X\times X\longrightarrow X,(z,\zeta)\longrightarrow z$ 的拉回分别记为 $\widetilde{T}(X\times X)$ 和 $\widetilde{T}^*(X\times X)$.

$T(X)$ 的全纯截面记为 $S(z,\zeta)$, 即有

$$S(z,\zeta):X\times X\longrightarrow\widetilde{T}(X\times X).$$

选择 X 的一组局部有限开覆盖 $\left\{U_j\right\}$, 使得对每一 j, 有一组全纯坐标 $h_j : U_j \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 以及一全纯平凡化 $P_j : T(X)|_{U_j} \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^n$. 其次, 命 $\{\chi_j\}$ 为一从属于 $\left\{U_j\right\}$ 的 C^∞ 单位分解. 那么每一 $T(X)$ 值形成 $S(z,\zeta)$ 在集合 $D \subseteq X$ 上可以和一向量组 $\left\{S^{(j)}\right\}$ 等同, 其中向量组 $\left\{S^{(j)}\right\}$ 由在 $h_j\Big(U_j \cap D\Big) \subseteq \mathbb{C}^n$ 上的 $S_r^{(j)}$ 全纯函数的向量 $S^{(j)} = \left(S_1^{(j)}, \cdots, S_n^{(j)}\right)$ 所构成的. 定义 $S(z,\zeta)$ 的范数为

$$\Big\|S(z,\zeta)\Big\| := \sum_j \chi_j(z) \sum_{r=1}^{n} \big\|S_r^{(j)}(h_j(z))\big\|, \quad z \in D.$$

其中 $\Big\|S_r^{(j)}(h_j(z))\Big\|$ 是系数为 $S_r^{(j)}(h_j(z))$ 的向量的欧氏长度.

下面的基本引理可参见文献 [5] 中的引理 4.2.4.

引理 1.1[5] 设 X 是一个复 n 维的 Stein 流形, $T(X)$ 是 X 上的复切丛. 再假设 X 是一个更大 Stein 流形上相对紧开集. 那么存在一个全纯映射 $S : X \times X \longrightarrow T(X)$ 和 $X \times X$ 上的全纯函数 ϕ 满足以下条件:

(i) 对于任意的 $z, \zeta \in X$, $S(z,\zeta) \in T_z(X)$(即 $S(z,\zeta)$ 是丛 $T(X)$ 关于映射 $X \times X \ni (z,\zeta) \longrightarrow z \in X$ 的拉回上的截面).

(ii) 对任意固定的 $z \in X$, $S(z,z) = 0$, 从 X 到 $T_z(X)$ 的映射 $S(z,\zeta)$ 在 $\zeta = z$ 的邻域上是双全纯的.

(iii) 对任意的 $z \in X$, $\phi(z,z) = 1$.

(iv) 如果 F_S 是由 S 生成的 ${}_{X\times X}{}^{\vartheta}$ 的解析子层, 那么 $\phi \in F_S\Big((X \times X) \setminus \{(z,z) : z \in X\}\Big)$.

(v) 存在一个整数 $\aleph \geq 0$ 使得 $T(X)$ 中对于任意的范数 $\|\cdot\|$, 函数 $\phi^{\aleph}\|S\|^{-2}$ 在 $(X \times X) \setminus \big\{(z,z) : z \in X\big\}$ 是 $C^{(2)}$ 的.

注: 引理中假设: “ X 为一更大的 Stein 流形的相对紧开子集” 可以不要, 引理照样成立.

以下我们假定 $\Big\{(U_j, h_j)\Big\}$ 是 X 的全纯坐标卡集使得对所有的 j, $U_j \subset\subset X$. 如果 D 是 X 中的开集, 则记 $T(X)$ 和 $T^*(X)$ 在 D 上的限制为 $T(D)$ 和 $T^*(D)$. 根据定义 1.2, 现在固定全纯平凡化 $P_j : T(U_j) \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^n$ 和

$P_j^*: T^*(U_j) \longrightarrow U_j \times \mathbb{C}^n$ 使得

$$\Big(z, \big(G_{ij}(z)\big)\zeta\Big) = P_i \circ P_j^{-1}(z,\zeta), \qquad \Big(z, \big((G_{ij}^t)^{-1}(z)\big)\zeta\Big) = P_i^* \circ (P_j^*)^{-1}(z,\zeta),$$

$$z \in U_i \cap U_j, \zeta \in \mathbb{C}^n.$$

如果 $z \in U_j$ 和 $a \in T_z(X)(a \in T_z^*(X))$, 那么具有 $P_j(a) = (z, a_j)(P_j^*(a) = (z, a_j))$ 的向量 $a_j \in \mathbb{C}^n$ 称为 a 关于 $\Big\{(U_j, h_j)\Big\}$ 的表示. 如果 $z \in U_i \cap U_j$, $a \in T_z(X)$, $b \in T_z^*(X)$ 且 a_i, a_j, b_i, b_j 分别为 a, b 关于 (U_i, h_i) 和 (U_j, h_j) 的表示，那么有

$$a_i = G_{ij}(z) a_j, \qquad b_i = (G_{ij}^t)^{-1}(z) b_j.$$

因此，下述定义是正确的.

定义 1.3[5−6] 如果 $z \in X$, $a \in T_z(X)$ 和 $b \in T_z^*(X)$, 则可任意选择一 j 使 $z \in U_j$ 并定义

$$\langle b, a\rangle := \langle b_j, a_j\rangle,$$

其中 b_j 和 a_j 是 b 和 a 关于 (U_j, h_j) 的表示.

命 $v = (v_1, \cdots, v_n)$ 和 $u = (u_1, \cdots, u_n)$ 为 $C^{(1)}$– 流形 X 上的复 $C^{(1)}$– 函数. 定义

$$\langle v, u\rangle = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n,$$

$$\omega(u) = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n,$$

$$\omega'(v) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} v_j \bigwedge_{s \neq j} dv_s.$$

如果 ζ 表示 X 上的变量而函数 v_j 和 u_j 还依赖于其他变量，则记为 ω_ζ, ω'_ζ 和 Ω_ζ. 如果 v_j 和 u_j 中的独立变量不止一个，则这些独立变量都要标出.

现在命 $D \subseteq X$ 为一开集， Y 为一实的 $C^{(1)}$– 流形，并命 $a: D \times Y \longrightarrow T(X)$ 和 $b: D \times Y \longrightarrow T^*(X)$ 为 $C^{(1)}$– 映射，使得对所有的 $(z, y) \in D \times Y$ 有 $a(z, y) \in T_z(X)$ 和 $b(z, y) \in T_z^*(X)$. 命 $a_j: (D \cap U_j) \times Y \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 和 $b_j: (D \cap U_j) \times Y \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 为 a 和 b 关于 (U_j, h_j) 的表示. 则

$$\omega'_y(b_i(z,y)) \wedge \omega_y(a_i(z,y)) = \omega'_y(b_j(z,y)) \wedge \omega_y(a_j(z,y)), \quad z \in D \cap U_i \cap U_j, y \in Y.$$

因此有下述定义

定义 1.4[5−6] 如果 $D \subseteq X$ 为一开集， Y 为一实的 $C^{(1)}$– 流形， $a: D \times Y \longrightarrow T(X)$ 和 $b: D \times Y \longrightarrow T^*(X)$ 为 $C^{(1)}$– 映射，使得对所有的 $(z,y) \in D \times Y$ 有 $a(z,y) \in T_z(X)$ 和 $b(z,y) \in T_z^*(X)$. 命 $a_j : (D \cap U_j) \times Y \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 和 $b_j : (D \cap U_j) \times Y \longrightarrow \mathbb{C}^n$ 为 a 和 b 关于 (U_j, h_j) 的表示. 则可任意选择一 j 使 $z \in D \cap U_j$ 并定义在 $D \times Y$ 上的连续微分形式 $\omega_y'(b(z,y)) \wedge \omega_y(a(z,y))$

$$\omega_y'(b(z,y)) \wedge \omega_y(a(z,y)) = \omega_y'(b_j(z,y)) \wedge \omega_y(a_j(z,y)), \quad z \in D \cap U_j, y \in Y.$$

下面我们引进下述有关 $\bar{S}(z,\zeta)$ 的定义.

定义 1.5[5−6] 引进一保持纤维的 C^∞– 映射

$$\sigma : T(X) \longrightarrow T^*(X)$$

它相应于 $\mathbb{C}^n$ 中的映射 $z \longmapsto \bar{z}$, 使得满足下列条件：对所有 $a \in T(X)$, $\langle \sigma a, a \rangle \geq 0$ 并且映射

$$\|a\|_\sigma := (\langle \sigma a, a \rangle)^{\frac{1}{2}}, \qquad a \in T(X)$$

在 $T(X)$ 的每一纤维上定义一范数. 这样的映射 σ 可以按下述方式定义：如果 $z \in U_j$, $a \in T_z(X)$ 且 a_j 是 a 关于 (U_j, h_j) 的表示，则记 $\sigma_j a$ 为 $T_z^*(X)$ 中的向量，它关于 (U_j, h_j) 的表示为 $\bar{a}_j$. 选择一从属于 U_j 的 C^∞– 单位分解 χ_j 并定义

$$\sigma a := \sum_j \chi_j(z) \sigma_j a, \quad a \in T_z(X), z \in X.$$

并记 $\bar{S}(z,\zeta) := \sigma S(z,\zeta)$.(这样 $\bar{S}(z,\zeta)$ 就可以替代 $\mathbb{C}^n$ 中的映射 $\bar{\zeta} - \bar{z}$.)

§1.2 预备知识

记 $P(N)$ 为对整数 $1 \leq k_1, \ldots, k_l \leq N$ 的所有有序集 $K = (k_1, \ldots, k_l)$ 的集合， $P'(N)$ 为对整数 $1 \leq k_1, \ldots, k_l \leq N$ 的每一个严格增加的所有有序集 $K = (k_1, \ldots, k_l)$ 的集合.

记 $J=(j_1,\ldots,j_l), 1\le l<\infty$, 为对整数 $0\le j_1<\cdots<j_l$ 的有序集，用 Δ_J 表示所有 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}$ 序列的单形，其中 $0\le\lambda_j\le 1$, 使得 $j\notin J$ 时， $\lambda_j=0$, 且 $\sum\lambda_j=1$. 当 $l\ge 2$, 以形式 $\mathrm{d}\lambda_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{j_l}$ 定义 Δ_J 的方向. 单点集的定向是 $+1$.

进一步用 Δ_{J*} 表示所有 $\{\lambda_j\}_{j=0}^{\infty}\cup\{\lambda_*\}$ 序列的单形, 其中 $0\le\lambda_j\le 1, 0\le\lambda_*\le 1$ 使得 $j\notin J$ 时，$\lambda_j=0$, 且 $\sum_{j=0}^{\infty}\lambda_j+\lambda_*=1$. 以形式 $\mathrm{d}\lambda_{j_2}\wedge\cdots\wedge\mathrm{d}\lambda_{j_l}\wedge\mathrm{d}\lambda_*$ 定义 Δ_{J*} 的方向.

定义 1.6[13,16]

$$定义\ \overset{o}{\chi}=\begin{cases}0 & 0\le\lambda\le\frac{1}{4},\\ \\ 1 & \frac{1}{2}\le\lambda\le 1.\end{cases}$$

表示 $[0,1]\to[0,1]$ 的一固定 C^{∞} 函数.

设整数 $N\ge 1, K=(k_1,...,k_l)\in P'(N,*)$. 当 $\lambda\in\Delta_{0K},\lambda_0\ne 1$ 时，记 $\overset{o}{\lambda}$ 为 Δ_K 中由

$$\overset{o}{\lambda}_{k_v}=\frac{\lambda_{k_v}}{1-\lambda_0},(v=1,...,l)$$

定义的点；当 $\lambda\in\Delta_{K*},\lambda_*\ne 1$ 时，记 $\overset{*}{\lambda}$ 为 Δ_K 中由

$$\overset{*}{\lambda}_{k_v}=\frac{\lambda_{k_v}}{1-\lambda_*},(v=1,...,l)$$

定义的点；当 $\lambda\in\Delta_{0K*}$, $\lambda_0\ne 1$, 置 $\overset{o}{\lambda}_*=\frac{\lambda_*}{1-\lambda_0}$, 则当 $\lambda_*\ne 1$ 时，记 $\overset{o*}{\lambda}$ 为 Δ_K 中由

$$\overset{o*}{\lambda}_{k_v}=\frac{\overset{*}{\lambda}_{k_v}}{1-\lambda_0}$$

定义的点.

定义 1.7[16] 设 X 是一个 Stein 流形，域 $D\subset\subset X$. D 称为是 $C^{(k)}$ 交集 $(k=1,2,\ldots,\infty)$, 如果存在 $\overline{D}$ 的一邻域 $U_{\overline{D}}$ 和 $U_{\overline{D}}$ 邻域中有限个实 $C^{(k)}$ 函数 $\rho_1,...,\rho_N,\rho_*$, 满足

(i) $D=\{z\in U_{\overline{D}}:\rho_j(z)<0, j=1,...,N,*\}$

(ii) 对所有指标集 $(k_1,...,k_l) \in P'(N,*)$ 及使 $\rho_{k_1}(z) = \cdots = \rho_{k_l}(z) = 0$ 的 $z \in \partial D$, $\mathrm{d}\rho_{k_1}(z) \wedge \cdots \wedge \mathrm{d}\rho_{k_l}(z) \neq 0$.

这时，集合 $(U_{\overline{D}}, \rho_1, ..., \rho_N, \rho_*)$ 称为 D 的一 $C^{(k)}$ 标架.

设 $D \subset\subset X$ 为一 $C^{(1)}$ 交集， $(U_{\overline{D}}, \rho_1, ..., \rho_N, \rho_*)$ 为 D 的标架. 那么对 $K = (k_1,...,k_l) \in P(N,*)$, 置 $S_k = \{z \in \partial D : \rho_k(z) = 0\}$, 定义：

$$S_K = \begin{cases} S_{k_1} \cap \cdots \cap S_{k_l}, & \text{如果} k_1,...,k_l \text{互不相同}, \\ \emptyset, & \text{否则}. \end{cases}$$

选择 S_K 的定向，使得

$$\partial D = \sum_{j=1}^{N} S_j + S_*,$$

$$\partial S_K = \sum_{j=1}^{N} S_{Kj} + S_{K*}.$$

其中 S_K 的定向关于 K 的分量是斜对称的.

定义 1.8[16] 命 $D \subset\subset X$ 为 $C^{(1)}$ 交集, $(U_{\overline{D}}, \rho_1, ..., \rho_N, \rho_*)$ 为 D 的标架. D 的 Leray 映射，或者更精确地说对标架 $(U_{\overline{D}}, \rho_1, ..., \rho_N, \rho_*)$ 的 Leray 映射定义为一映射 ψ, 它联系于每一 $K \in P'(N,*)$, 对 $(z,\zeta,\lambda) \in D \times S_K \times \Delta_K$ 定义的 $\mathbb{C}^n$- 值映射

$$\psi_K(z,\zeta,\lambda) = (\psi_K^1(z,\zeta,\lambda), \cdots, \psi_K^n(z,\zeta,\lambda))$$

使得对 $S(z,\zeta) \in T_z(X)$

$$\langle \psi_K(z,\zeta,\lambda), S(z,\zeta) \rangle = 1.$$

定义 1.9[13,16] 设 f 是域 $D \subset\subset X$ 上的微分形式，则记 $\|f\|$, $z \in D$ 为 f 在 z 点的 Hermitian 范数.

记 $C_*^0(D)$ 表示 D 上连续形式的集合. 令

$$\|f\|_0 = \|f\|_{0,D} = \sup_{z \in D} \|f(z)\|, \qquad f \in C_*^0(D).$$