学校编号： 10384　　　　　　　　　　分类号 ________ 密级 ________

学号： B200423007　　　　　　　　　　UDO ________

厦 门 大 学

博 士 学 位 论 文

退化抛物方程的若干问题

Problems About the Nonlinear Degenerate Parabolic Equation

张 丽 琴

指导教师姓名： 赵 俊 宁 教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2007 年 4 月

论文答辩日期： 2007 年 月

学位授予日期： 2007 年 月

答辩委员会主席： ________

评 阅 人： ________

2007 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文， 是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果， 均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文产生的权利和责任。

声明人 (签名)：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（ ），在　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（ ）

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名：　　　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　　　日期：　　年　月　日

中文摘要

本文讨论了非线性退化抛物方程的几个问题，全文分为三部分.

第一章讨论下面非线性奇异抛物方程的初边值问题重整化解的存在性及惟一性

$$b(u)_t - \mathrm{div}(a(u, \nabla u)) = H(u)(f + \mathrm{div}g)$$

这里 $f \in L^1(Q)$， $g \in (L^{p'}(Q))^N$， $p' = \frac{p}{p-1}$， $a(u, \nabla u)$ 对 $|\nabla u|$ 满足 $p-1$ 次增长条件和单调性条件. 此类问题来源于化学反应扩散问题. 一般地，这类方程不存在弱解，原因是 $a(u, \nabla u)$ 不属于 $(L^1_{loc})^N$ 且由于 $g \in (L^{p'}(Q))^N$， $H(u)(f + \mathrm{div}g)$ 的意义不明确. 为了克服这些困难，我们在本章利用重整化解的理论讨论比通常弱解更弱的解的存在性，即重整化解的存在性. 重整化解的概念是 Lions 和 Di Perna 在研究 Boltzmann 方程中提出的，后来被应用到一类非线性抛物方程. 本章的贡献在于利用重整化解的理论和技巧克服了由 $H(u)(f + \mathrm{div}g)$ 项带来的困难，证明了其重整化解的存在与惟一性.

第二章是研究 p-Laplace 方程

$$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$$

和带有的吸收项的 p-Laplace 方程

$$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - u^q$$

Cauchy 问题和 Dirichlet 问题弱解 $u_p(x,t)$ 当 $p \to \infty$ 时的渐近极限性质. 对于 Cauchy 问题， Evans[21] 对初值 $u_0(x)$ 具有紧支集情形讨论了弱解的渐近极限，明确给出弱解 $u_p(x,t)$ 当 $p \to \infty$ 时的渐近极限；当初值 $u_0(x)$ 不具有紧支集时，易青和赵俊宁教授 [34] 证明了存在 $\{u_p\}$ 的子列 $\{u_{p_j}\}$ 和函数 $u_\infty \in C(\mathbb{R}^N)$, 使得对任意紧集 $G \subset Q_T$ 有

$$\lim_{j\to\infty} u_{p_j}(x,t) = u_\infty(x)$$

在 G 上一致成立. 在本章，我们改进了上述结果，对 Cauchy 问题和 Dirichelet 问题证明了解序列 $\{u_p\}$ 极限的唯一性，从而给出解序列的整体渐进性质，即：

$$\lim_{p\to\infty} u_p(x,t) = u_\infty(x)$$

在 R^N 的任何紧集 G 上一致成立.

第三章首先对 $L^1_{loc}(R^N)$ 初值和强非线性热源的 p-Laplace 方程

$$u_t = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-1}u$$

的 Cauchy 问题讨论解的局部存在性. 证明了当 $\sup_{x\in R^N}(\int_{B_\rho(x)}|u_0(y)|^h dy)^{1/h} < \infty$, 其中当 $q < p-1+\frac{p}{N}$ 时, $h=1$, 当 $q > p-1+\frac{p}{N}$ 时, $h > \frac{N}{p}(q-p+1)$, 则所论问题存在局部解.

本章还对具有特殊扩散系数的 p-Laplace 方程

$$\frac{u_t}{|\, x\,|^{\alpha}} - \triangle_p u = \lambda\frac{u^{p-1}}{|\, x\,|^{p}} \qquad (*)$$

讨论了解的整体存在性及解的性质. 得到结果如下：设 $1<p<N$, $\lambda>0$, $0<\alpha<N$, $u_0(x)\in L^\infty(\Omega)$, 在 Ω 上 $u_0(x)\geq 0$. 并记 $\lambda_{N,p}=((N-p)/p)^p$.

定理 1　若 $u_0\in W^{1,p}(\Omega)$, $\lambda<\lambda_{N,p}$, 对任意 $1<p<N$, 则问题 $(*)$ 存在整体解.

定理 2　若 $\lambda>\lambda_{N,p}$, $1<p<\min(\frac{2N}{N+2-\alpha},2)$, 则问题 $(*)$ 存在整体解.

定理 3　若 $\lambda<\lambda_{N,p}$, $\frac{2N}{N+2-\alpha}<p<2$, 则存在有限时间 T^* 依赖于 $N,p,\lambda,|\Omega|$ ，使得问题 $(*)$ 的解 $u(x,t)$ 有,

$$u(\cdot,t)\equiv 0, \quad \forall\ t>T^*$$

定理 4　若 $\lambda\leq\mu_{N,p}$, $1<p<\min(\frac{2N}{N+2-\alpha},2)$, 其中 $\mu_{N,p}=\lambda_{N,p}(s-1)(\frac{p}{p+s-2})^p$, $s=\frac{(N-\alpha)(2-p)}{p-\alpha}>2$, 则存在有限时间 T^* 依赖于 $N,p,\lambda,|\Omega|$ ，使得问题 (*) 的解 $u(x,t)$ 有,

$$u(\cdot,t)\equiv 0, \quad \forall\ t>T^*.$$

关键词：退化抛物方程；重整化解；渐近极限；整体存在性.

Abstract

In this paper we study some nonlinear degenerate parabolic equations.

In the first chapter,we discuss the existence and uniqueness of renormalized solutions for a class of degenerate parabolic equations

$$b(u)_t - \mathrm{div}(a(u, \nabla u)) = H(u)(f + \mathrm{div} g),$$

where $f \in L^1(Q)$, $g \in (L^{p'}(Q))^N$, $p' = \frac{p}{p-1}$, $a(u, \nabla u)$ satisfies $p-1$ powers increasing conditions for$|\nabla u|$. These problems are motivated by control problems arising in chemical reactions. Under these assumptions, this problem does not admit, in general, a weak solution, since the fields $a(u, \nabla u)$ do not belong to $(L^1_{loc})^N$ and the meaning of the term $H(u)(f + divg)$ is not clear. To overcome this difficulty, we use in this paper the framework of renormalized solutions. This notion was introduced by Lions and Di Perna for the study of Boltzmann equation. And many people applies this notion to evolution problems in fluid mechanics. In this paper, we first give a suitable formulation of the problem to overcome the difficulty that the term $H(u)(f + \mathrm{div} g)$ brings , then the existence and uniquess of weak solution are proved.

In the second chapter, we discuss the asymptotic behavior of the solution to the p-Laplacian equation

$$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u)$$

and the p-Laplacian equation with absorption

$$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2} \nabla u) - u^q$$

for the Cauchy problem and the Dirichlet initial-boundary value problem as $p \to \infty$. For the Cauchy problem, when the initial value $u_0(x)$ has compact support, the same problem has been studied by Evans et al.[21], where some refined results are obtained. For the case, when the initial value $u_0(x)$ has no compact support, the following result was proved in [34], there exists a subsequence $\{u_{p_j}\}$ of $\{u_p\}$ and a function $u_\infty \in C(R^N)$,

such that for any compact set $G \subset Q_T$

$$\lim_{j\to\infty} u_{p_j}(x,t) = u_\infty(x) \qquad uniformly \ \ on \ \ G.$$

In this chapter, we improve the above results and study Dirichlet problem. We proved the the asymptotic limit of the solution is uniquess and obtained the results:

$$\lim_{p\to\infty} u_p(x,t) = u_\infty(x) \qquad uniformly \ \ on \ \ G.$$

The third chapter is devoted firstly to the local existence of the solution to the Cauchy problem of the p-Laplacian equation with strongly nonlinear sources when the initial value $u_0(x) \in L^1_{loc}(R^N)$,

$$u_t = \mathrm{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) + |u|^{q-1}u.$$

We proved when

$$\sup_{x\in R^N}\Big(\int_{B_\rho(x)} |u_0(y)|^h dy\Big)^{1/h} < \infty,$$

as $q < p-1+\frac{p}{N}$, $h=1$, as $q > p-1+\frac{p}{N}$, $h > \frac{N}{p}(q-p+1)$, the solution to the Cauchy problem exists localy .

In this chapter, we also discuss the global existence of the solution to the Dirichlet initial-boundary value problem of the p-Laplacian equation with particular coefficient

$$\frac{u_t}{|\ x\ |^\alpha} - \triangle_p u = \lambda\frac{u^{p-1}}{|\ x\ |^p}.$$

The following results we obtained . Let $1 < p < N$, $\lambda > 0$, $0 < \alpha < N$, $u_0(x) \in L^\infty(\Omega)$, on Ω , $u_0(x) \geq 0$. Denote $\lambda_{N,p} = ((N-p)/p)^p$.

Theorem 1 Let $u_0 \in W^{1,p}(\Omega)$, $\lambda < \lambda_{N,p}$, for any $1 < p < N$, then the problem $(*)$ exists a global solution.

Theorem 2 Let $\lambda > \lambda_{N,p}$, $1 < p < \min(\frac{2N}{N+2-\alpha}, 2)$, then the problem $(*)$ exists a global solution.

Theorem 3 Let $\lambda < \lambda_{N,p}$, $\frac{2N}{N+2-\alpha} < p < 2$, there exists a finite time T^*, depending only upon $N, p, \lambda, |\Omega|$, such that the solution $u(x,t)$ of the problem $(*)$,

$$u(\cdot,t) \equiv 0, \qquad \forall\ t > T^*$$

Theorem 4 Let $\lambda \le \mu_{N,p}$, $1 < p < \min(\frac{2N}{N+2-\alpha}, 2)$, $\alpha < p$, where $\mu_{N,p} = \lambda_{N,p}(s-1)(\frac{p}{p+s-2})^p$, $s = \frac{(N-\alpha)(2-p)}{p-\alpha} > 2$, there exists a finite time T^*, depending only upon $N, p, \lambda, |\Omega|$, such that the solution $u(x,t)$ of the problem $(*)$,

$$u(\cdot,t) \equiv 0, \quad \forall\ t > T^*.$$

Key Words ： **Degenerate parabolic equation ; Renormalized solutions ; Asymptotic behavior; Global existence .**

目录

Contents

第一章 一类奇异抛物方程重整化解的存在性及惟一性

§ 1.1 问题与结论

本章考虑下列非线性问题：

$$b(u)_t-\operatorname{div}(a(u,\nabla u))=H(u)(f+\operatorname{div}g),\qquad (x,t)\in Q, \tag{1.1.1}$$

$$u(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{1.1.2}$$

$$u(x,0)=u_0(x),\qquad x\in\Omega, \tag{1.1.3}$$

其中 $Q=\Omega\times(0,T)$, Ω 是 $\mathbb{R}^N$ 上的有界域并且假设

(H_1) $b(s)\in C^1(R)$ 是严格递增函数且满足正则条件 $b(0)=0$;

(H_2) $a(r,\xi):R\times\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}^N$ 是连续向量，对 $1<p<\infty,\ \alpha>0$ 且 $\forall\,\xi,\nu\in\mathbb{R}^N$

$$a(r,\xi)\xi\geq\alpha|\xi|^p,\qquad a(r,0)=0\ ,$$

$$(a(r,\xi)-a(r,\nu))(\xi-\nu)\geq 0\ ,$$

$$|a(r,\xi)|\leq C(|r|)(2+|\xi|^{p-1}),\quad C(r):R^+\to R^+\ \text{非减};$$

(H_3) $H'\in C_0(R),\quad \forall s\in R$;

(H_4) $f\in L^1(Q),\ \ g\in(L^{p'}(Q))^N,\ \ p'=\frac{p}{p-1}$.

一般地，在这些假设下，问题 (1.1.1)-(1.1.3) 不存在弱解，原因是 $a(u,\nabla u)$ 不属于 $(L^1_{loc})^N$ 且由于 $g\in(L^{p'}(Q))^N$, $H(u)(f+\operatorname{div}g)$ 的意义不明确. 为了克服这些困难，我们在本章使用重整化解的理论. 此概念 Lions 和 Di Perna 在文 [30] 研究 Boltzmann 方程中提出. Lions 在文 [26] 应用此理论研究流体动力学的扩散问题. 至于抛物问题 (1.1.1)-(1.1.3) 当 $H(u)=1,\ g=0$, 或 $b(s)=s,\ H(s)=1$ 情况已在文 [16, 11, 4] 中利用重整化解的理论讨论其弱解的存在与唯一性. 另外，具有 $H(u)\mu$ 测度项的非线性椭圆问题由 Murat 和 Porretta [8, 19] 考虑，此类问题来源于化学反应扩散模型.

在本章，首先给出方程 (1.1.1) 的类似于文 [4] 重整化解的定义，再证明其弱解的存在性.

§ 1.2 重整化解的定义及主要结果

一般地，对 $k>0$, 定义函数 T_k

$$T_k(v)=\begin{cases} k, & v\ge k,\\ v, & |v|\le k,\\ -k, & v\le -k.\end{cases}$$

定义 1.2.1 设 $(H_1)-(H_4)$ 成立，可测函数 u 称为 (1.1.1)-(1.1.3) 的重整化解，如果 u 满足：

$$b(u)\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega)), \tag{1.2.1}$$

$$T_k(u)\in\ L^p(0,T;W_0^{1,p}(\Omega)),\quad \forall k>0, \tag{1.2.2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\{(x,t)\in Q,n\le|u(x,t)|\le n+1\}} a(u,\nabla u)\nabla u\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0, \tag{1.2.3}$$

对所有 $h\in C_0^1(R)$, $\xi\in C_0^1(Q)$,

$$\int_Q\xi_t\int_0^u h(r)db(r)-\int_Q a(u,\nabla u)\nabla(h(u)\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_Q H(u)fh(u)\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$+\int_Q\left(H'(u)h(u)+H(u)h'(u)\right)Du\cdot g\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \tag{1.2.4}$$

此外，

$$b(u)\,|_{t=0}\,=b(u_0). \tag{1.2.5}$$

注 1.2.1 在 (1.2.4) 中的每一项都有意义．事实上， (1.2.4) 的第一项的意义为

$$\left|\int_0^u h(r)db(r)\right|\le|h|_\infty|b(u)|$$

且 $b(u)\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. 其第二项及 (1.2.4) 式右边的第二项的意义为

$$\int_Q a(u,\nabla u)\nabla(h(u)\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_{Q\cap\{|u|\le k\}}a(u,\nabla T_k(u))\nabla(h(T_k(u))\xi)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

$$\int_Q\left(H'(u)h(u)+H(u)h'(u)\right)Dug\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q\left(H'(u)h(u)+H(u)h'(u)\right)DT_k(u)\cdot g\xi\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 $k>0$, 使得 $\mathrm{supp}\ h\subset[-k,k]$.

定理 1.2.1 设 $u_0:\Omega\to R$ 可测且 $v_0=b(u_0)\in L^1(\Omega)$. 假设 $(H_1)-(H_4)$ 成立，则存在一函数 u 满足 $v=b(u)\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$ 是 (1.1.1)-(1.1.3) 的一重整化解.

定理 1.2.2 设定理 1 的假设成立且 $b(r)=r,\ H'(s)\ge 0,\ f\ge 0,\ g=0$, 并设对每一常数 $k>0$ 及 $|s|,|s'|\le k$, 存在 $E_k(x,t)\in L^{p'}(Q),\ F_k\ge 0$ 使得

$$|a(s,\xi)-a(s',\xi)|\le |s-s'|\left(E_k(x,t)+F_k|\xi|^P\right). \tag{1.2.6}$$

则 (1.1.1)-(1.1.3) 的重整化解唯一.

§ 1.3 定理 1.2.1 的证明

对 $\varepsilon>0$, 考虑下列 $f,\ g,\ u_0$ 的逼近函数

$$f_\varepsilon,\ g_\varepsilon\in C^1(\overline{Q}),\quad u_{0\varepsilon}(x)\in C^1(\overline{\Omega})$$

$$\text{在}\ \ L^1(Q)\ \text{中}\ \ f_\varepsilon\to f,\qquad \text{在}\ \ (L^{p'}(Q))^N\ \text{中}\ \ g_\varepsilon\to g, \tag{1.3.1}$$

$$\text{在}\ \ L^1(Q)\ \text{中}\ \ b(u_{0\varepsilon})\to b(u_0),\ \text{并且在}\ Q\ \text{中几乎处处收敛}. \tag{1.3.2}$$

不失一般性，可设 $a,\ b$ 是适当光滑且使得下列问题具有古典解 u_ε,

$$b(u_\varepsilon)_t-\mathrm{div}(a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon))=H(u_\varepsilon)(f_\varepsilon+\mathrm{div}g_\varepsilon),\qquad (x,t)\in Q, \tag{1.3.3}$$

$$u_\varepsilon(x,t)=0,\qquad (x,t)\in\partial\Omega\times(0,T), \tag{1.3.4}$$

$$u_\varepsilon(x,0)=u_{0\varepsilon}(x),\qquad x\in\Omega, \tag{1.3.5}$$

否则可利用逼近过程以得到结果.

式 (1.3.3) 的两边乘以 $T_k(u_\varepsilon)$, $k>0$ 并在 Q 上积分，得

$$\begin{aligned}&\int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(x,T)}T_k(s)b'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_Q a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla T_k(u_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ =&\int_Q H(u_\varepsilon)T_k(u_\varepsilon)(f_\varepsilon+\mathrm{div}g_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega\int_0^{u_{0\varepsilon}(x)}T_k(s)b'(s)ds\mathrm{d}x.\end{aligned} \tag{1.3.6}$$

由于 $(H_1)-(H_4)$, 对 $k>0$ 有 $\mathrm{supp}H'(s)\subset(-k,k)$,

$$a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla T_k(u_\varepsilon)=a(u_\varepsilon,\nabla T_k(u_\varepsilon))\nabla T_k(u_\varepsilon)\ge\alpha|\nabla T_k(u_\epsilon)|^p,$$

$$\int_Q H(u_\varepsilon)T_k(u_\varepsilon)\mathrm{div}g_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_Q(H'(u_\varepsilon)T_k(u_\varepsilon)+H(u_\varepsilon))DT_k(u_\varepsilon)\cdot g_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

由 (1.3.6) 式及 Young 不等式

$$\int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(x,T)} T_k(s)b'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{2}\int_Q|\nabla T_k(u_\varepsilon)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\le C(k)+k|b(u_0)|_{L^1(\Omega)},\qquad(1.3.7)$$

其中 $C(k)$ 是与 ε 无关的常数.

对任意 $M>0$, 设 S_M 是 C^∞ 增函数且使得当 $|r|\le\frac{M}{2}, S_M(r)=r$; 当 $|r|\ge M, S_M(r)=Msng(r)$.

下证明对任意 M, 序列 $S_M(b(u_\varepsilon))$ 满足

$$S_M(b(u_\varepsilon))\text{于}L^p(0,T:W^{1,p}(\Omega))\text{一致有界}\qquad(1.3.8)$$

且

$$\frac{\partial S_M(b(u_\varepsilon))}{\partial t}\text{于}L^1(Q)+L^{p'}(0,T:W^{-1,p'}(\Omega))\text{一致有界}.\qquad(1.3.9)$$

当 (1.3.8) 式及 (1.3.9) 式成立，由 Aubin 引理 ([13], 引理 4) 可推得对任意 $M>1$, $S_M(b(u_\epsilon))$ 在 $L^2(Q)$ 意义下紧.

现证明 (1.3.8) 式及 (1.3.9) 式. 如果 $|b(u_\varepsilon)|>M$, $S'_M(b(u_\varepsilon))=0$, 得

$$DS_M(b(u_\varepsilon))=S'_M(b(u_\varepsilon))b'(u_\varepsilon)DT_{K_M}(u_\varepsilon),$$

其中 $K_M=max\{-b^{-1}(-M),b^{-1}(M)\}$. 由此及 (1.3.7) 可证得 (1.3.8).

为证 (1.3.9) 式， (1.3.3) 式乘以 $S'_M(b(u_\varepsilon))$ 得

$$\frac{\partial S_M(b(u_\varepsilon))}{\partial t}=\mathrm{div}(S'_M(b(u_\varepsilon)))a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon))-S''_M(b(u_\varepsilon)))b'(u_\varepsilon)a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla T_{K_M}u_\varepsilon$$

$$+S'_M(b(u_\varepsilon)))H(u_\varepsilon)f_\varepsilon+\mathrm{div}(g_\varepsilon S'_M(b(u_\varepsilon)))H(u_\varepsilon))-g_\varepsilon\cdot DT_{K_M}(u_\varepsilon)(S'_M(b(u_\varepsilon))H(u_\varepsilon))'.$$

这可推得 (1.3.9) 式. 由 (H_2) 及 (1.3.7) 式得

$$a(T_k(u_\varepsilon),\nabla T_k(u_\varepsilon))\ \text{于}(L^{p'}(Q))^N\text{一致有界}.\qquad(1.3.10)$$

为了证明 (1.2.3), 对任意整数 $n\ge1$, 考虑 Lipschitz 连续函数 θ_n,

$$\theta_n(r)=T_{n+1}(r)-T_n(r)=\begin{cases}0, & |r|\le n,\\(|r|-n)\mathrm{sgn}(r), & n\le|r|\le n+1,\\\mathrm{sgn}(r), & |r|\ge n+1.\end{cases}$$

注意到对任意 $n\geq 1$, $0\leq|\theta_n|\leq 1$, 且对任意 r, 当 $n\to\infty$, $\theta_n(r)\to 0$.

用 $\theta_n(u_\varepsilon)$ 乘 (1.3.3) 式的两边并在 Q 上积分，得

$$\int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(x,t)}b'(s)\theta_n(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x+\int_Q a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla\theta_n(u_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$=\int_Q H(u_\varepsilon)\theta_n(u_\varepsilon)(f_\varepsilon+\mathrm{div}g_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega\int_0^{u_{0\varepsilon}(x)}\theta_n(s)b'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x. \tag{1.3.11}$$

因

$$\int_Q a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla\theta_n(u_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\geq\alpha\int_Q|\nabla\theta_n(u_\varepsilon)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

且

$$\int_Q H(u_\varepsilon)\theta_n(u_\varepsilon)\mathrm{div}g_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_Q H'(u_\varepsilon)\theta_n(u_\varepsilon)DT_k(u_\varepsilon)\cdot g_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_Q H(u_\varepsilon)\nabla\theta(u_\varepsilon)\cdot g_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

其中 $\mathrm{supp}H'\subset[-k,k]$. 由 (H_3), Young 不等式及 (1.3.7), 可推得

$$\int_Q a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla\theta_n(u_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq C, \tag{1.3.12}$$

$$\int_Q|\nabla\theta_n(u_\varepsilon)|^p\mathrm{d}x\mathrm{d}t\leq C, \tag{1.3.13}$$

其中 C 与 ε,n 无关.

上述估计意味着存在一子列，仍记为 u_ε, 使得当 $\varepsilon\to 0$, 对任意 $k>0$, $n\geq 1$,

$$\text{在 } Q\text{上},\qquad u_\varepsilon \text{ 几乎处处收敛于 } u, \tag{1.3.14}$$

$$\text{在 } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))\text{上},\quad \theta_n(u_\varepsilon) \text{ 弱收敛于 } \theta_n(u), \tag{1.3.15}$$

$$\text{在 } L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))\text{上},\quad T_k(u_\varepsilon) \text{ 弱收敛于 } T_k(u), \tag{1.3.16}$$

$$\text{在 } (L^{p'}(Q))^N\text{上},\quad a\left(T_k(u_\varepsilon),\nabla T_k(u_\varepsilon)\right) \text{ 弱收敛于 } \sigma_k, \tag{1.3.17}$$

其中 $\sigma_k\in(L^{p'}(Q))^N$.

现证 $b(u)\in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$. 由 (1.3.7) 式，得

$$\int_\Omega\int_0^{u_\varepsilon(x,T)}T_k(s)b'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\leq k|b(u_0)|_{L^1(\Omega)}+C(k).$$

则

$$k\int_\Omega|b(u(x,t))|\mathrm{d}x\leq k|b(u_0)|_{L^1(\Omega)}+C(k)+Ckb(k)\mathrm{mes}\Omega.$$

且 $b(u) \in L^\infty(0,T;L^1(\Omega))$.

由 (1.3.11) 式及 (H_3), 得

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_Q a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla\theta_n(u_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$\le \overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\left(\int_Q H(u_\varepsilon)\theta_n(u_\varepsilon)(f_\varepsilon+\mathrm{div}g_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t+\int_\Omega\int_0^{u_{0\varepsilon}(x)}\theta_n(s)b'(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}x\right) \tag{1.3.18}$$

注意到

$$\int_Q H(u_\varepsilon)\theta_n(u_\varepsilon)\mathrm{div}g_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=-\int_Q(H'(u_\varepsilon)\theta(u_\varepsilon)g_\varepsilon DT_k(u_\varepsilon)+H(u_\varepsilon)\nabla\theta_n(u_\varepsilon)g_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

其中 supp $H'\subset[-k,k]$. 则

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_Q H(u_\varepsilon)\theta_n(u_\varepsilon)(f_\varepsilon+\mathrm{div}g_\varepsilon)\mathrm{d}x\mathrm{d}t=\int_Q H(u)\theta_n(u)f\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$

$$-\int_Q\theta_n(u)H'(u)\nabla T_k(u)g\mathrm{d}x\mathrm{d}t-\int_Q H(u)\nabla\theta_n(u)g\mathrm{d}x\mathrm{d}t \tag{1.3.19}$$

因为当 $n\to\infty,\theta_n(u)\to 0$ 且 $\nabla\theta_n(u)$ 弱收敛于 $L^p(0,T;W^{1,p}(\Omega))$,

$$\theta_n(u)\to 0 \qquad \text{弱收敛于 } L^p(0,T;w_0^{1,p}(\Omega)),\quad \text{当 } n\to\infty.$$

因而由 (1.3.18),(1.3.19) 及 $\nabla\theta_n(u_\varepsilon)=\chi_{\{n\le u_\varepsilon\le n+1\}}\nabla u_\epsilon$, 得

$$\lim_{n\to\infty}\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\int_{\{n\le|u_\varepsilon|\le n+1\}}a(u_\varepsilon,\nabla u_\varepsilon)\nabla u_\varepsilon\mathrm{d}x\mathrm{d}t=0. \tag{1.3.20}$$

为证 $\sigma_k=a(T_k(u),\nabla T_k(u))$, 利用 Landes [31] 的正规化方法. 如下定义 $T_k(u)$ 关于时间的正规化

$$(T_k(u))_\nu(x,t)=\nu\int_{-\infty}^t e^{\nu(s-t)}T_k(\overline{u(x,s)})\mathrm{d}s \tag{1.3.21}$$

其中当 $s>0,\overline{u(x,s)}=u(x,s)$; 当 $s\le 0,\overline{u(x,s)}=u_0(x)$. $(T_k(u))_\nu$ 具有下列性质

$$\frac{\partial(T_k(u))_\nu}{\partial t}+\nu((T_k(u))_\nu-T_k(u))=0 \ \text{ 在 } \ D', \tag{1.3.22}$$

$$(T_k(u))_\nu|_{t=0}=T_k(u_0),\qquad \text{在 } \ \Omega,$$

$$(T_k(u))_\nu\to T_k(u)\quad \text{几乎处处于 } Q,\ \text{且弱}^*\text{收敛于 } \ L^\infty(Q),$$