学校编码：**10384** 分类号______密级______

学号：**19020070153855** **UDC**______

厦门大学

博 士 学 位 论 文

Mutation函子的不动点子范畴

Subcategories of fixed points of mutations

唐 丽 丹

指导教师姓名： 林 亚 南 教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2010 年 04 月

论文答辩时间： 2010 年 06 月

学位授予日期： 2010 年 月

答辩委员会主席：__________

评 阅 人：__________

2010 年 04 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘　要

1987年, A. N. Gorodentsev-A. N. Rudakov引入射影空间例外向量丛mutation这一几何工具, 借助mutation方法他们成功地对射影平面例外向量丛进行了分类. 同年, W. Geigle-H. Lenzing将mutation的几何思想应用到代数的具有管子结构的导出范畴中, 使得mutation这一几何概念被广泛地应用于代数领域中. 本学位论文致力于研究三角范畴关于例外对象的mutation函子的不动点子范畴, tubular mutation的不动点子范畴. 全文共分五章.

第一章对与本学位论文相关的研究背景及发展动态做简单介绍, 并概述本文的主要工作.

第二章介绍预备知识, 给出与本文相关的概念及基本性质, 为后面的工作提供理论基础.

第三章研究三角范畴关于例外对象的mutation函子的不动点子范畴. 我们刻画了三角范畴关于例外对象的左(右)mutation函子的不动点子范畴, 研究了其基本性质, 并具体考虑了亏格为1的权投射直线凝聚层的导出范畴关于例外对象左(右)mutation的不动点子范畴, 证明了此左(右)mutation的不动点子范畴是某遗传代数的导出范畴. 接着探讨了左(右)mutation的不动点子范畴的K_0群、三角范畴维数与原范畴的关系. 最后, 由左(右)mutation的不动点子范畴构造出一个三角范畴的右(左)recollement, 证明了左(右)mutation 的不动点子范畴保持recollement.

第四章研究Abel范畴与亏格为1的权投射线上凝聚层的导出范畴的tubular mutation的不动点子范畴. 我们刻画了满足Serre对偶的Abel范畴的tubular mutation的不动点子范畴, 并通过权投射线的例子说明Abel范畴的tubular mutation的不动点子范畴未必是原范畴的Serre子范畴. 接着通过亏格为1的权投射线$\mathbb{X}$凝聚层的导出范畴上tubular mutation的精细刻画及其slope的对应关系, 确定出$D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$上tubular mutation函子的不动点子范畴, 证明了此不动点子范畴是存在AR-三角的三角范畴并具体描述了其AR-箭图. 最后, 完全刻画了与$D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$关于结构层$\mathcal{O}$的AR-轨道的左tubular mutation满足辫子群关系的左tubular mutation.

第五章研究$\widetilde{A}_{n-1}$型根范畴关于口子模的mutation函子的不动点子范畴以及它们对应的李代数之间的关系. 我们证明了$\widetilde{A}_{n-1}$型根范畴关于口子模的mutation函子的不动点子范畴三角等价于$\widetilde{A}_{n-2}$型根范畴, 进而说明了$\widetilde{A}_{n-2}$型仿射Kac-Moody李代数$\mathcal{G}'(\widetilde{A}_{n-2})$是$\widetilde{A}_{n-1}$型仿射Kac-Moody李代数$\mathcal{G}'(\widetilde{A}_{n-1})$的子代数.

关键词：三角范畴; 权投射线; 关于例外对象的mutation; tubular mutation; 不动点子范畴; recollement

Abstract

The notion of mutation by an exceptional bundle was introduced by A. N. Gorodentsev and A. N. Rudakov in order to classify vector bundles on the projective plane. Using this central geometrical technique, they determined all the exceptional objects on projective plane. In the same year, W. Geigle and H. Lenzing applied this geometrical idea to the algebraic derived category whose AR-quiver is consisted of tubes, which stimulated the developments of tubular mutation in the field of algebra. This dissertation concentrates on mutation by an exceptional object, tubular mutation and their invariant theory, which includes five chapters.

In the first chapter, we give a brief introduction of the background and recent developments related to this dissertation, and make a systemic exposition of our main results.

In the second chapter, we recall some concepts and properties which are closely related to this dissertation, which give a necessary preparation for the following chapters.

In the third chapter, we study the subcategory of fixed points of mutation by an exceptional object. Firstly, we give an equivalent description of the subcategory. In particular, we prove that the subcategory of mutation in the derived category of coherent sheaves on a weighted projective line with genus one is isomorphic to the derived category of a hereditary algebra. Then we discuss the relationship between the subcategory and the original triangulated category from the perspective of K-theory, dimension of triangulated category and so on. Finally, we construct a left (right) recollement by right (left) mutation and prove that recollement is preserved under that action of mutation.

In the fourth chapter, we study the subcategory of fixed points of tubular mutation. Firstly, we consider the subcategory of fixed points of tubular mutation in abelian category. We give an equivalent description and point out that the subcategory may not be a Serre subcategory of the original category via an example of weighted projective line. Then we characterize how tubular mutation work on indecomposable objects in $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$. By the above fine characterization, we determine the subcategory of fixed points of tubular mutation in $D^b(\mathrm{coh}(\mathbb{X}))$ and prove that the subcategory is a triangulated category having AR-triangles. Finally, we show which left tubular mutations satisfy braid relation with the left tubular mutation via the τ-orbit of the structure sheaf $\mathcal{O}$.

In the fifth chapter, we study the subcategory of fixed points of mutation on root category with type $\widetilde{A}_{n-1}$ and the corresponding Lie algebra. We prove that the subcategory of fixed points of left (or right) mutation by E_i^1 on root category $\mathcal{R}(n)$ is equivalent to the root category $\mathcal{R}(n-1)$. Using this equivalence, we show that the affine Kac-Moody algebra of type $\widetilde{A}_{n-2}$ is isomorphic to a subalgebra of the Kac-Moody algebra of type $\widetilde{A}_{n-1}$.

Key Words: triangulated category; weighted projective line; mutation by an exceptional object; tubular mutation; subcategory of fixed points; recollement

目　录

Contents

第一章　引　言

1.1 研究背景

1.1.1 三角范畴

作为代数表示论研究的一个重要工具, 导出范畴及三角范畴理论体系的起源可追溯到A. Grothendieck. 1958年在国际数学家大会的报告中, 为了陈述代数几何中的广义Serre对偶定理, A. Grothendick首先引入了导出范畴的概念[1]. 后来, 他的学生J. L. Verdier将导出范畴的内在性质抽象公理化提出三角范畴的概念并发展了局部化理论[2]. 近年来, 导出范畴及三角范畴理论被成功地应用到数学和物理等众多领域, 产生了一系列深刻的结果.

有限维代数的导出范畴理论是由D. Happel首先创立的[3, 4]. 他提出了三角范畴的Auslander-Reiten理论[4, 5]; 与C. M. Ringel合作完全刻画了遗传代数和tubular代数的导出范畴的结构[4, 6]; 证明了有限维代数的导出范畴可嵌入到其重复代数模范畴的稳定范畴中, 进一步地, 说明了有限维代数的导出范畴三角等价于其重复代数模范畴的稳定范畴的充要条件是其整体维数有限[4, 5]. J. Rickard借助倾斜复形给出环上导出范畴之间等价的刻画, 即导出范畴层面上的Morita定理, 现称为Rickard定理[7]. 随后, B. Keller引入并研究了微分分次范畴及其上的导出范畴, 这使得D. Happel和J. Rickard的结果证明变得更加简单易懂[8, 9].

近年来, 三角范畴及导出范畴理论更是得到长足的发展. C. M. Ringel利用他创立和发展了的Hall代数理论成功地用Dynkin型遗传代数实现了复半单李代数的正部分[10]. 彭联刚和肖杰利用遗传代数导出范畴的根范畴实现了Kac-Moody代数[11–13]; 林亚南和彭联刚利用tubular代数导出范畴的根范畴实现了D_4, E_6, E_7, E_8型的椭圆李代数[14]; 肖杰和徐帆定义了三角范畴上的Hall代数[15], 这些成果为研究李代数提供了全新的视角和有力的工具. R. Rouquier引入三角范畴维数的概念, 通过三角范畴维数这一桥梁成功地构造出Aulander表示维数超过3的一个例子, 从而使有限维数猜想更具悬念[16, 17]; 在此基础上, 陈小伍-叶郁-章璞证明了代数A的导出范畴维数为0当且仅当A是Dykin型遗传代数的多重倾斜代数[18]. I. Reiten等对cluster范畴, clster倾斜对象, cluster倾斜代数等展开了一系列的研究, 参见[19–21]等.

目前, 三角范畴及导出范畴已成为代数表示论与代数几何联系的重要工具. A.

Bondal - D. Orlov指出“导出范畴搭起了当前数学主流的桥梁, 建立了代数与几何, 交换与非交换, 局部与整体的联系”[22]. 事实上, 1978年, A. A. Beilinson和I. N. Bernstein - I. M. Gelfand - S. I. Gelfand借助导出范畴这一工具建立了射影空间与有限维代数的一个出色的联系. 他们证明了射影空间上凝聚层的导出范畴与某有限维代数确定的三角范畴是三角等价的[23, 24]. 1989年, A. I. Bondal证明了存在强例外序列的光滑流形上凝聚层的导出范畴三角等价于某有限维代数的导出范畴[25]. 从而, 从另一个角度构建起射影空间与有限维代数的的联系. 1987年, W. Geigle和H. Lenzing引入了权投射线的概念, 证明了权投射线上凝聚层导出范畴三角等价于canonical代数的导出范畴[26]. 这一创新成果架起了代数问题和几何问题的一个桥梁, 尤其使权投射线上凝聚层范畴的遗传性的优势得以发挥.

1.1.2 Mutation

代数表示论与代数几何的另一重要联系源自对射影簇上例外向量丛的系统研究. 为了对射影平面上的向量丛进行分类, J. M. Drezet和J. Le Potier于文[27]中引入例外对象这一概念, Drezet借助例外向量丛得到了更多关于模空间的具体信息[28–30]. 后来, A. L. Rudakov, A. N. Gorodentsev, B. V. Karpov等人将例外对象推广为例外序列并具体构造出射影空间$\mathbb{P}^n$, 二次曲面等的例外序列[31–35]. 受此启发, W. Crawley-Boevey 于文[36]引入箭图表示的例外序列, 研究其性质并指出辫子群B_n可迁地作用于无有向圈的箭图表示的完备例外序列集上. C. M. Ringel将此结论推广到一般的遗传Artin代数[37].

一般情况下, 要给出一个范畴中的所有例外对象是十分困难的. 为了克服这一问题, A. N. Gorodentsev, A. N. Rudakov于文[31]中正式引入射影空间例外向量丛的mutation这一几何工具. 粗略地说, 射影空间上例外向量丛的mutation指的是由一个例外向量丛E所确定的函子$\mathcal{L}_E : \mathrm{coh}\mathbb{P}^n \to \mathrm{coh}\mathbb{P}^n$, 使得例外对$(E, F)$在mutation函子作用下得到例外对$(\mathcal{L}_E F, E)$. 因此, 借助mutation函子可由已知的例外向量丛构造出另一例外向量丛. A. N. Rudakov就成功地利用mutation由例外三元组$(\mathcal{O}, \mathcal{O}(1), \mathcal{O}(2))$构造出射影平面$\mathbb{P}^2$上所有的例外向量丛[34]. 1988年, A. L. Gorodentsev将例外向量丛的mutation推广到一般簇上的层范畴上[38]. 后来, 随着三角范畴特别是导出范畴的发展, A. Bondal于文[25] 中将例外对象mutation的概念推广到一般三角k-范畴上, 使mutation这一几何概念广泛地应用于代数表示论等领域.

定义 1.1.1 [25] 设E是三角k-范畴$\mathscr{C}$中的例外对象, $F \in \mathscr{C}$. 则F关于E的