

学校编号: 10384

分类号 _____ 密级 _____

学 号: 19120081152754

UDC _____

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

卡氏积图的 Pfaffian 性及完美匹配计数

The Pfaffian property and enumeration of
perfect matchings for some Cartesian product
graphs

李 超

指导教师姓名: 张莲珠教授

专业名称: 应用数学

论文提交日期: 2011 年 5 月

论文答辩日期: 2011 年 6 月

学位授予日期: 2011 年 7 月

答辩委员会主席: _____

评 阅 人: _____

2011 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密()，在 年解密后适用本授权书。

2、不保密()。

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名: 日期: 年 月 日

导师签名: 日期: 年 月 日

目 录

中文摘要	i
英文摘要	ii
第 1 章 引言	1
1.1 Pfaffian 定向的一些基本概念和记号	2
1.2 图的 Pfaffian 性研究的若干结果	4
1.3 本文主要结果	6
第 2 章 图 $T \times P_{2m}$ 的 Pfaffian 性判定	8
第 3 章 图 $T \times P_{2m+1}$ 的 Pfaffian 性判定	14
第 4 章 图 $T \times C_n$ 的 Pfaffian 性判定	17
第 5 章 图 $K_{1,t} \times P_{2m}$ 和 $K_{1,t} \times C_{2m}$ 的完美匹配计数	21
参考文献	26
致 谢	29

Contents

Abstract(in Chinese).....	i
Abstract(in English).....	ii
Chapter 1 Introduction	1
1.1 Terminologies, notations and Pfaffian orientation	2
1.2 Some known results on Pfaffian orientation	4
1.3 Main results of this paper.....	6
Chapter 2 The Pfaffian property of the Cartesian product graph $T \times P_{2m}$	8
Chapter 3 The Pfaffian property of the Cartesian product graph $T \times P_{2m+1}$	14
Chapter 4 The Pfaffian property of the Cartesian product graph $T \times C_n$	17
Chapter 5 The enumeration of perfect matchings for graphs $K_{1,t} \times P_{2m}$ and $K_{1,t} \times C_{2m}$	21
References.....	26
Acknowledgement	29

摘要

完美匹配计数问题是匹配理论的一个重要研究内容。L. Valiant 在 1979 年证明了，一个图（即使是二部图）的完美匹配计数是 NP-hard 问题。如果图 G 有一个 Pfaffian 定向，就可以在多项式的时间内计算出 G 的完美匹配个数，所以讨论图的 Pfaffian 定向具有非常重要的意义。然而，判断一个图是否具有 Pfaffian 定向也不是那么容易的。

晏卫根和张福基在文《 Enumeration of perfect matchings of type of Cartesian products of graphs 》中讨论了树与顶点数小于 5 的路的卡氏积图和树与 4 圈的卡氏积图。给出了这些图类的 Pfaffian 定向并算出了它们的完美匹配数的显示表达式。对于树与顶点大于 4 的路的卡氏积图是否存在 Pfaffian 定向却还是一个未知的问题。

本文针对这个问题，研究了树 T 与顶点数为 n 的路 P_n 的卡氏积图 $T \times P_n$ 的 Pfaffian 性。证明了：当 $n = 2m$ ， $T \times P_n$ 有 Pfaffian 定向当且仅当 $m < 3$ ，或者 T 是路图，或者 T 是星图； $n = 2m + 1(m \geq 2)$ 时，若顶点数大于等于 6 的树 T 含有完美匹配并且 T 不是路，则图 $P_n \times T$ 不是 Pfaffian 图。此外，我们给出了星图 $K_{1,t}$ 与路 P_{2m} 的卡氏积图 $K_{1,t} \times P_n$ 的一个 Pfaffian 定向，并算出它们的完美匹配数 $PM(K_{1,t} \times P_n)$ 的显式表达式： $PM = \prod_{k=1}^n \alpha_k^{t-1}(t - \alpha_k^2)$ ，其中 $\alpha_k = 2i \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ， $n = 2m \geq 6$ 。最后在上述工作的基础上进一步的得出树与圈的卡氏积图 $T \times C_n$ 的 Pfaffian 定向情况。

关键词：完美匹配；Pfaffian 定向；卡氏积图；树

Abstract

The enumeration of perfect matchings for a graph is one of important topics of the matching Theory. In 1979, L. Valiant proved that the enumeration of perfect matchings for a graph (even if it is a bipartite graph) is NP-hard. But, if a graph G has a Pfaffian orientation, then the number of its perfect matchings can be calculated in a polynomial time. However, it is not easy to answer that if a general graph has a Pfaffian orientation.

W. Yan and F. Zhang [Enumeration of perfect matchings of type of Cartesian products of graphs, Advances in Appl. Math. 32(2004)] discuss the cartesian product graph of the trees and the paths or the circles. They gave Pfaffian orientations for those graphs and enumerate their perfect matchings.

In this paper, we concentrate on the question whether there is a Pfaffian orientation of the cartesian product of the tree T and the path P_n with $n(n \geq 5)$ vertices, and obtain that if $n = 2m$, the graph $T \times P_n$ is Pfaffian if and only $m < 3$, or T is a path, or T is a star; When $n = 2m+1(m \geq 2)$, the tree T with a perfect matching and is not a path, then the graph $P_n \times T$ is not a Pfaffian graph where $n \geq 6$. And obtained the number of perfect matchings of Cartesian product graph $K_{1,t} \times P_n$, $PM(K_{1,t} \times P_n) = \prod_{k=1}^n \alpha_k^{t-1}(t - \alpha_k^2)$ where $\alpha_k = 2i \cos \frac{k\pi}{n+1}$, $n = 2m \geq 6$. Basis on the above results, we discuss the question whether there is a Pfaffian orientation of the cartesian product of the tree T and the circle C_n with $n(n \geq 5)$ vertices.

Key words: perfect matching, Pfaffian orientation, Cartesian graph, tree.

第 1 章 引言

图的匹配理论是图论的重要组成部分， L. Lovász 和 M. Plummer 的《匹配理论》 [5] 奠定了匹配理论研究的基础。图的完美匹配计数问题是匹配理论的一个重要研究内容， L. Valiant [14] 在 1979 年证明了，一个图（即使是二部图）的完美匹配计数是 NP-hard 问题。物理学家 Kasteleyn [7] , Fisher [3] , Temperley [12] , 为了解决统计力学中一个非常有名的问题 - Dimer 问题（平面四格子图的完美匹配计数问题）而提出的。Kasteleyn [8] 证明了所有的平面图都是 Pfaffian 的。Robin Thomas [13] 在 2006 年世界数学家大会上做了图的 Pfaffian 定向的综述报告。如果图 G 有一个 Pfaffian 定向，就可以在多项式时间内计算出图 G 的完美匹配个数，所以研究一个图是否是 Pfaffian 的具有重要的意义。

虽然判定一个图是否有 Pfaffian 定向有很多等价的条件 [5] , 但是判定一个图是否是 Pfaffian 也不那么容易的。对于一些特殊图类， Fisher 和 Temperley 在文献 [3] , [12] 用 Pfaffian 法对平面网格上的二聚体问题进行了统计力学方面的研究。晏卫根和张福基在文献 [16] , [18] , [22] 中证明了一些图类是 Pfaffian 图的 Pfaffian 性并给出了其完美匹配数。

图的完美匹配数作为一个很重要的拓扑指标已经在多个领域得到应用。图的完美匹配在量子化学中化学家称之为 Kekulé 结构，在统计物理上称之为 Dimer 构形。二十世纪三十年代，化学家和物理学家首先对图的完美匹配计数进行了一定的研究，虽然他们的目的不尽相同，前者是为了研究芳香烃，后者为了创立液态理论（ [13] , [12] ）。晏卫根等在文献 [19] 中讨论了柱面与环面图上的 Dimer 问题。完美匹配的计数还被应用到估计共振能量和 $\pi-$ 电子能量，计算鲍林键级等（ [7] , [12] , [15] ），所以图的完美匹配在量子化学与统计物理上有着十分重要的应用。

1.1 Pfaffian 定向的一些基本概念和记号

一个图 G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \varphi_G)$ ，其中 $V(G)$ 是非空的顶点集， $E(G)$ 是不与 $V(G)$ 相交的边集，而 φ_G 是关联函数，它使 G 的每条边对应于 G 的无序顶点对（不必相异）。一个无环也无重边的图称为简单图。若 e 是一条边，而 u 和 v 是使得 $\varphi_G(e) = (u, v)$ ，则称 e 连接 u 和 v ，边 e 与顶点 u 和 v 相关联， u 和 v 称为 e 的端点。若两条边在 G 中没有共同的端点，则称这两条边不相邻。 G 的一条途径是指有限非空序列 $W = v_0e_1v_1e_2\dots e_kv_k (k \geq 1)$ ，它的项交替地为顶点和边，称 v_0, v_k 为途径 W 的起点和终点， W 是从 v_0 到 v_k 的一条途径。在简单图中，途径 W 可由顶点序列 $v_0v_1\dots v_k$ 所确定，若途径 W 中的顶点互不相同，则称 W 是一条路。记具有 n 个顶点的路为 P_n 。若途径 W 起点和终点为同一顶点，则称途径 W 为一个圈，具有 n 个顶点的圈记为圈长为 n 的圈 C_n 。若把图 G 的某条边用一条路代替，则我们称此操作为把边剖分。若剖分图 G 的某条边得到图 H ，则称图 H 是 G 的剖分图。若每条边用来代替原来边的路都是偶数个顶点的路，则称 H 是 G 的偶剖分。在图 G 中，如果在两个顶点 u 和 v 间存在一条从 u 到 v 的路 P ，则称 u 和 v 为连通的。不含圈的图称为无圈图，连通的无圈图称为树，记为 T 。设 H 是一个图，如果 $V(H) \subseteq V(G)$ 且 $E(H) \subseteq E(G)$ ，则称 H 是 G 的子图。

设 G 是一个含有 n 的顶点的图，用 $1, 2, \dots, n$ 对每个顶点赋予一个标号，得到的图称为标号图。若给图 G 的每条边确定一个方向，则称所得到的图为定向图，此时给定的方向称为图 G 的一个定向。如果 u, v 是 G 的顶点，则用 uv 表示关联 u 和 v 的边，若 G 是定向图时，则 uv 表示方向从 u 到 v 的方向边。

设 M 是 $E(G)$ 的一个子集，若 M 中的任意两条边在 G 中都不相邻，则称 M 为 G 的匹配；若顶点 v 为匹配 M 中某条边的端点，则称 v 被 M

饱和。若 G 的每个顶点均被 M 饱和，则称 M 为 G 的一组完美匹配。由此可知，若一个图有完美匹配，则它的顶点数必然为偶数。

设 G 是一个标号图， D 是图 G 的一个定向， $M = u_1v_1, u_2v_2, \dots, u_kv_k$ 是 G 的一个完美匹配，定义完美匹配 M 在 D 下的符号为 $sgn_D(M)$ ，定义它与排列 P

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \dots & 2k-1 & 2k \\ u_1 & v_1 & u_2 & v_2 \dots & u_k & v_k \end{pmatrix} \quad (1.1)$$

的符号一致，即 $sgn(M) = sgn(P)$ 。若存在 G 的一个定向 D 使得 G 中所有完美匹配的符号一致，则称定向 D 是图 G 的一个 Pfaffian 定向。由完美匹配符号的定义可知边 u_iv_i 在排列 P 下的顺序是不影响完美匹配 M 的符号的。本文中用 $PM(G)$ 表示图 G 的所有完美匹配个数。

设 G 是一个图， $V(G)$ 是 G 的顶点集，把 $V(G)$ 分为两部分，记为 X ， Y ，若边集 $E(G)$ 中的每条边都有一个端点在 X 中，另一个在 Y 中，则称图 G 为二部图， X 和 Y 称为 G 的顶点划分。划分 X 和 Y 中的顶点数分别记为 $|X|$ ， $|Y|$ 。则由完美匹配的定义可知，二部图若有完美匹配，则必有图的顶点划分 $|X| = |Y|$ 。由定义可知，树 T 是二部图。定义顶点划分只有一个顶点在 X 中，其余顶点在 Y 中的 $t+1$ 个顶点的树称为星图，记为 $K_{1,t}$ 。设 C 是图 G 的一个圈， M 是 G 的一个完美匹配，如果圈 C 中的边在 M 和 $E(G) \setminus M$ 中交替出现，则称 C 为 M -交错圈。如果 C 是图 G 的一个圈，且图 $G \setminus V(C)$ 有完美匹配，则称 C 是一个好圈，其中 $G \setminus V(C)$ 表示从 G 中删去 C 中所有顶点后的子图。一般地，设 H 是图 G 的一个子图，如果 $G \setminus V(H)$ 有完美匹配，则称图 H 是 G 的一个好子图。

设 G 是一个图， D 是图 G 的一个定向， C 是 G 的一个偶长圈，如果 C 在定向 D 下沿着顺时针（或逆时针）方向包含奇数条边，则称 C 是奇定

向的。设 D 是图 G 的任意一个定向，得到定向图 G_e ，则 G_e 的邻接矩阵定义如下： $A(G_e) = (a_{ij})_{n \times n}$ ，

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G_e); \\ -1, & v_j v_i \in E(G_e); \\ 0, & \text{其它.} \end{cases}$$

如果 G 是一个简单图， v 是图 G 的一个二度点，同时收缩 v 点关联的两条边，使得两个关联点和 v 点收缩为一点的操作，称为对顶点 v 的双收缩。如果图 H 可以由图 G 的一个好子图通过不断地对二度点进行双收缩得到，则称图 H 是图 G 的一个匹配 minor。

两个图 G 和 H 的卡氏积记为 $G \times H$ ，其顶点集 $V(G \times H) = V(G) \times V(H)$ 能够使得顶点 (x, u) 与 (y, v) 在图 $G \times H$ 中相邻当且仅当 $x = y$ 并且 u 和 v 在图 H 中相邻，或者 $u = v$ 且 x 和 y 在 G 中相邻（其中 x, y 是图 G 的顶点， u, v 是图 H 的顶点）。

1.2 图的 Pfaffian 性研究的若干结果

由第一节中我们知道一个图 G 的完美匹配符号 $sgn(M)$ 与排列 P 的符号一致，若存在 G 的一个定向 D 使得 G 中所有完美匹配的符号一致，则我们称图 G 有 Pfaffian 定向。所以当图 G 是 Pfaffian 的，由凯莱定理我们就能够利用定向图 G_e 的斜邻接矩阵的行列式来计算图 G 的完美匹配数。

引理 1.1 [5] 设 D 是图 G 的一个 Pfaffian 定向，得到定向图 G_e ，那么 $[P_m(G)]^2 = \det(A(G_e))$ ，这里 $A(G_e)$ 是 G_e 的邻接矩阵， $\det(A(G_e))$ 是 $A(G_e)$ 的行列式。

由上面的引理可知，对于一个图，只要我们能判定出它是 Pfaffian 的就可以在多项式的时间内计算出其完美匹配数，L. Lovász 和 M. Plummer 在 [5] 给出判定一个图 G 有 Pfaffian 定向的几个等价条件：

引理 1.2 [5] 设 G 是有偶数个顶点的简单图, D 是图 G 的一个定向, 那么下面三个条件等价:

- (1) D 是图 G 的一个 Pfaffian 定向;
- (2) G 中每一个偶长的好圈在 D 下都是奇定向的;
- (3) 如果 G 有一个完美匹配, 那么对某个完美匹配 M , 所有的 M -交错圈在 D 下都是奇定向的。

虽然判定一个图是 Pfaffian 有很多等价的条件, 但是这些条件应用起来却不是那么容易。Kasteleyn 在研究平面图的完美匹配计数问题时, 证明了平面图的 Pfaffian 性。

引理 1.3 [8] (Kasteleyn's Theorem) 每个平面图都有一个 Pfaffian 定向, 此定向可在多项式时间内找到。

Little 推广了 Kasteleyn 的结果, 在文 [4] 中给出了关于二部图的 Pfaffian 性的判定条件。

引理 1.4 [4][16] 一个二部图有一个 Pfaffian 定向当且仅当它没有同构于 $K_{3,3}$ 的匹配 minor。

引理 1.5 [4][16] 设 G 是 Pfaffian 的, H 是 G 的一个好子图, 那么图 H 也是 Pfaffian 的。

晏卫根和张福基在文 [16] 中, 讨论了某一类图的 Pfaffian 性, 并给出了图类中 Pfaffian 图的完美匹配数的计算方法和显示表达式。

引理 1.6 [16] 若 C_4 表示一个 4 长圈, T 是任意一棵树, 那么 $C_4 \times T$ 是 Pfaffian 的, 并且 $PM(C_4 \times T) = \Pi(2 + \alpha^2)$ 这里 α 取遍树 T 的邻接矩阵的所有特征值。

引理 1.7 [16] 若 T 是任意一棵树, 那么 $P_4 \times T$ 是 Pfaffian 的, 并且 $PM(P_4 \times T) = \Pi(1 + 3\alpha^2 + \alpha^4)$ 这里 α 取遍树 T 的邻接矩阵的所有非负特征值。

引理 1.8 [16] 若 T 是一棵有完美匹配的树, 那么 $P_3 \times T$ 是 Pfaffian 的, 并且 $PM(P_3 \times T) = \Pi(2 + \alpha^2)$ 这里 α 取遍树 T 的邻接矩阵的所有正特征值。

1.3 本文主要结果

晏卫根和张福基在文 [16] 中讨论了树与顶点数小于 5 的路的卡氏积图和树与 4 圈的卡氏积图, 给出了这些图类的 Pfaffian 定向并算出了它们的完美匹配数的显示表达式, 对于树与顶点大于 4 的路的卡氏积图是否存在 Pfaffian 定向却还是一个未知的问题。

本文针对这个问题, 研究了树 T 与顶点数为 $n(n > 4)$ 的路 P_n 的卡氏积图 $T \times P_n$ 的 Pfaffian 性。下面给出本文的主要结果:

当路 P_n 的顶点数为大于 6 的偶数时, 有以下结果:

定理 2.1 设 T 是一棵树, $P_{2m}(m \geq 3)$ 是顶点数为 $2m$ 的路。如果 T 不是路图也不是星图, 则卡氏积图 $T \times P_{2m}$ 不是 Pfaffian 图。

定理 2.2 设 P_n 是的顶点数 $n = 2m(m \geq 3)$ 的路, T 是一棵树。若树 T 为星图 $K_{1,t}$, 则卡氏积图 $K_{1,t} \times P_n$ 是 Pfaffian 图。

综合定理 2.2 和 2.3 的结论我们很容易得到下面的定理:

定理 2.3 设路 P_n 是顶点数为 $n = 2m$ 的路, T 是一棵树。则卡氏积图 $T \times P_n$ 是 Pfaffian 的当且仅当 $m < 3$, 或者 T 是路图, 或者 T 是星图。

当路 P_n 的顶点数为大于 5 的奇数时, 有结果:

定理 3.1 设路 P_n 的顶点数 $n = 2m + 1(m \geq 2)$ 。若含有完美匹配的树 T 不是路, 并且其顶点数为大于等于 6, 则图 $P_n \times T$ 不是 Pfaffian 图。

因为路 P_n 是 C_n 的子图, 由圈 C_n 特点和前面的讨论, 我们可以得到有关图 $T \times C_n$ 的 Pfaffian 性判定结果。

定理 4.1 当 C_n 是长为 $n = 2m(m \geq 3)$ 的圈, T 是一棵树, 如果 T 不

是路图也不是星图，则卡氏积图 $T \times C_{2m}$ 不是 Pfaffian 图。

定理 4.2 当 C_n 是长为 $n = 2m (m \geq 3)$ 的圈，星图与圈 C_{2m} 的卡氏积图 $K_{1,t} \times C_{2m}$ 是 Pfaffian 图。

从前面的定理可知卡氏积图 $K_{1,t} \times P_n$ 和 $K_{1,t} \times C_n$ 是 Pfaffian 图，由引理 1.1 可通过一定的计算得到图的完美匹配数。

定理 5.1 图 $K_{1,t} \times P_n$ 的完美匹配数 $PM = \left(\prod_{k=1}^n \alpha_k^{t-1} (t - \alpha_k^2) \right)^{1/2}$ ，其中 $\alpha_k = 2i \cos \frac{k\pi}{n+1}$ ， $n = 2m \geq 6$ 。

定理 5.2 图 $K_{1,t} \times C_n$ 的完美匹配数 $PM = \left(\prod_{k=0}^{n-1} \alpha_k^{t-1} (t - \alpha_k)^2 \right)^{1/2}$ ，其中 $\alpha_k = \omega_k + \omega_k^{-1}$ ， $\omega_k = \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n}$ ， $n = 2m \geq 6$ 。

第2章 图 $T \times P_{2m}$ 的 Pfaffian 性判定

设树 T 的顶点集 $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$, 边集 $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_{t-1}\}$ 。

我们将 T 拷贝 n 份, 分别记作 T^1, T^2, \dots, T^n 。用 $V(T^i) = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_t^i\}$, 表示 $T^i(i = 1, 2, \dots, n)$ 的顶点集, $E(T^i) = \{e_1^i, e_2^i, \dots, e_{t-1}^i\}$ 表示 $T^i(i = 1, 2, \dots, n)$ 的边集。按上述定义的符号, 我们便可得到图 T 与 P_m 的卡氏积图 $T \times P_n$ 的顶点集 $V(T \times P_n) = V(T^1) \cup V(T^2) \cup \dots \cup V(T^n)$, 边集 $E(T \times P_n) = E(T^1) \cup E(T^2) \cup \dots \cup E(T^n) \cup E(X_T)$, 其中 $E(X_T) = \{v_j^i v_j^{i+1} \mid 1 \leq j \leq t, i = 1, 2, \dots, n-1\}$ 。显然 T 和 $T \times P_n$ 都是二部图。由引理 1.5 和 1.8 可知对于 $n = 2m(m < 3)$ 的情况, 图 $T \times P_{2m}$ 是 Pfaffian 图。下面本文讨论对于 $n = 2m(m \geq 3)$ 时, 卡氏积图 $T \times P_n$ 的 Pfaffian 性。

定理 2.1 设 T 是一棵树, $P_{2m}(m \geq 3)$ 是顶点数为 $2m$ 的路。如果 T 不是路图也不是星图, 则卡氏积图 $T \times P_{2m}$ 不是 Pfaffian 图。

证明: 设树 T 的顶点数为 t , 若 $t \leq 4$, 容易验证此时 T 不是路就是星。此时讨论树 T 的顶点数 $t > 4$, 设 T 的顶点集 $V(T) = \{v_1, v_2, \dots, v_t\}$, 边集 $E(T) = \{e_1, e_2, \dots, e_{t-1}\}$ 。因为 T 不是路也不是星, 所以 T 必包含一个子树 T_1 (T_1 是具有五个顶点, 其中一个三度点, 一个二度点和三个一度点的树)。不妨记 T_1 的顶点集 $V(T_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$, 其中 v_1 为三度点, v_2, v_4, v_5 为一度点, v_3 为二度点。由卡氏积图的定义我们便可得到图 $T_1 \times P_n(n = 2m)$ 的结构如图 2.1 所示:

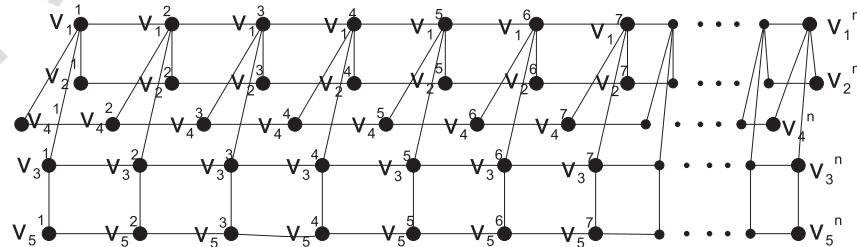


图2.1

我们记 $T_0 = T \setminus V(T_1)$ 是 T 的子图，则可将图 $T \times P_n$ 表示成由图 $T_0 \times P_n$ 和图 $T_1 \times P_n$ 通过一定的边连接而成。如图 2.2 所示：

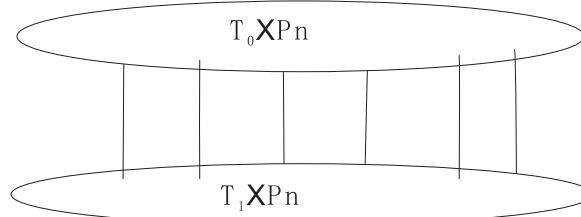


图2. 2

当 $n = 2m(m \geq 3)$ 时，由边集 $E(X_T) = \{v_j^i v_j^{i+1} \mid 1 \leq j \leq t, i = 1, 2, \dots, n-1\}$ 中的边及其顶点构成的途径 $M_j = v_j^1 v_j^2 \dots v_j^n (1 \leq j \leq t)$ 为 t 条偶数个点的路 P_{2m} 。每条路 P_{2m} 均有完美匹配饱和其路上的所有顶点，所以我们只需取每条 P_{2m} 上的完美匹配即可得到图 $T \times P_{2m}$ 的一个完美匹配 M 。下面证明图 $T_1 \times P_6$ 是图 $T \times P_{2m}$ 的一个好子图。

首先，图 $T_1 \times P_6$ 是图 $T \times P_n$ 的一个子图。而且在图 $T \times P_n \setminus V(T_1 \times P_6)$ 的边集中，由边集 $E(X_T) \setminus E(X_{T_1})$ 中的边及其边的顶点构成的途径仍为若干条偶数个点的路，故此时取这些偶数个点的路的每个完美匹配即可得到图 $T \times P_n \setminus V(T_1 \times P_6)$ 的一组完美匹配，即图 $T \times P_n \setminus V(T_1 \times P_6)$ 有完美匹配。

由定义可知，图 $T_1 \times P_6$ 是 $T \times P_n$ 的一个好子图。

由图 $T_1 \times P_6$ 的结构特点，我们将得出证明图 $T \times P_n$ 存在 $K_{3,3}$ 的匹配 minor。从图 $T_1 \times P_6$ 中可以找到一个 $K_{3,3}$ 的偶剖分，我们将其记为 H ， $\{v_1^2, v_1^4, v_2^3\}$ 和 $\{v_1^3, v_2^2, v_2^4\}$ 为 H 中的两个独立集。连接这两个独立集之间的 9 条奇长路分别为 $v_1^2 v_1^3, v_2^2 v_2^3, v_1^3 v_1^4, v_2^3 v_2^4, v_1^2 v_2^2, v_1^3 v_2^3, v_1^4 v_2^4, v_2^2 v_2^1 v_1^1 v_4^1 v_2^2 v_4^3 v_4^4 v_1^4, v_1^2 v_3^2 v_3^3 v_3^4 v_3^5 v_1^5 v_2^5 v_2^4$ 。这 9 条路在图 2.3 中分别用不同的线条表示，

Degree papers are in the "[Xiamen University Electronic Theses and Dissertations Database](#)". Full texts are available in the following ways:

1. If your library is a CALIS member libraries, please log on <http://etd.calis.edu.cn/> and submit requests online, or consult the interlibrary loan department in your library.
2. For users of non-CALIS member libraries, please mail to etd@xmu.edu.cn for delivery details.

厦门大学博硕士论文全文数据库