学校编号：10384　　　　　　　　　　　　分类号______ 密级______

学号：200323024　　　　　　　　　　　　　　　　　UDC______

厦 门 大 学

硕 士 学 位 论 文

Jacobi 阵和酉 Hessenberg 阵的逆特征值问题

Inverse Eigenvalue Problems for

Jacobi and Unitary Hessenberg Matrices

李　凤

指导教师姓名：林　鹭　副教授

专 业 名 称：计　算　数　学

论文提交日期：２００６年５月

论文答辩日期：２００６年　月

学位授予日期：２００６年　月

答辩委员会主席：____________

评　　阅　　人：____________

2006 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其他个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的责任。

声明人(签名)：李 凤

2006 年 5 月 30 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非营利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密( )，在 年解密后适用本授权书。

2、不保密( )

(请在以上相应括号内打“√”)

作者签名：李凤 日期：2006 年 5 月 30 日

导师签名： 林鹭 日期：2006 年 5 月 30 日

目　录

中文摘要 …… I

英文摘要 …… .II

第一章　引言 …… 1

第二章　Jacobi 阵的逆特征值问题 …… . 6

2.1　Jacobi 阵特征值问题的基本性质 …… 6

2.2　Jacobi 阵的逆特征值问题 …… 10

2.3　算法及数值例子 …… 13

第三章　酉 Hessenberg 阵的逆特征值问题 …… 16

3.1　不可约的酉 Hessenberg 阵及其特征值的基本性质 …… 16

3.2　第一类逆特征值问题 …… .22

3.3　第二类逆特征值问题 …… .25

参考文献 …… 28

致谢 …… 31

Contents

Chinese Abstract……………………………………………….……..I

English Abstract……………………………………..……….. .II

Chapter 1 Introduction…………………………………………...…1

Chapter 2 Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices……..6

2.1 Properties of eigenvalues for Jacobi matrices……………………………... 6
2.2 Inverse eigenvalue problems for Jacobi matrices………………………….10
2.3 Algorithm and numerical examples……………………………………...13

Chapter 3 Inverse eigenvalue problems for unitary Hessenberg matrices……………………………………………………...…16

3.1 Irreducibale unitary Hessenberg matrices and properties of their eigenvalues…………………………………………………………………16
3.2 The first kind of inverse eigenvalue problem for unitary Hessenbergmatrices………………………………………………………….22
3.3 The second kind of inverse eigenvalue problem for unitary Hessenberg matrices…………………………………………………………………….25

References…………………………………………………………28

Acknowledge………………………………………………………...31

摘　要

结构矩阵的逆特征值问题来源于许多研究领域，如固体力学、粒子物理、结构设计、系统参数识别等。一般而言，它研究的主要内容包括问题的可解性(必要或/和充分条件)、计算的适定性(解的存在性、唯一性和稳定性)、数值方法以及问题的实用性等方面。

本文主要讨论了两类结构矩阵的逆特征值问题。首先给出的是一类Jacobi阵的逆特征值问题，即给定三组实数：一组是Jacobi阵的n个特征值，一组是只修改了最后一个对角元的它的前k阶顺序主子阵的特征值，最后一组是修改了第一个对角元的后$n-k$阶余子阵的特征值，用这些给定的特征值来确定相应的Jacobi矩阵。文中首先讨论了这三组特征值之间的交错(隔离)关系，接着确定了该逆问题有解的充要条件，并论证了其解的唯一性问题，最后给出了相应的数值算法；本文第二个问题解决的是一类不可约的酉Hessenberg阵的逆特征值问题：即一个不可约的酉Hessenberg阵可以由它的特征值、它的前k阶秩一修正的顺序主子阵的特征值以及它的后$n-k$阶余子阵的秩一修正阵的特征值来确定，文中最后讨论了唯一性和相应的算法。

本文的创新之处在于提出一类新的结构矩阵的逆特征值问题，证明的基本技巧是用分而治之方法，将矩阵分解为两个阶数低的小矩阵，通过研究它们的特征值和原矩阵的特征值之间的交错关系，从中找出特征值与特征向量之间的关系，而最终构造出原来的矩阵。

关键词： Jacobi阵；酉Hessenberg阵；逆特征值问题

Abstract

Structured inverse eigenvalue problems(SIEP) arise in a variety of applications. For example, solid mechanics, particle physics, mechanism design, system identification and so on. Generally speaking, the research of SIEP is concentrated on the following problems: the theory of solvability(necessary or/and sufficient conditions), the practice of computability(existence, uniqueness and stability), the analysis of sensitivity and the reality of applicability.

In this paper, two kinds of structure inverse eigenvalue problems are discussed. Firstly, an inverse eigenvalue problem for Jacobi matrices is presented: we could construct the Jacobi matrix T if we know the spectral data: the eigenvalues of T and the eigenvalues of $\widehat{T}_1$ and of $\widehat{T}_2$, where $\widehat{T}_1$ is different to the $k \times k$ leading principal submatrix of T only at the (k,k) position, while $\widehat{T}_2$ is different to the $(n-k)\times(n-k)$ remain submatrix only at the $(1,1)$ position. And the sufficient and necessary conditions are obtained and the uniqueness of T is discussed and an algorithm for solving the inverse problem is provided. The other kind of structure inverse eigenvalue problem is for unitary Hessenberg matrices with positive subdiagonal elements. That is, a unitary Hessenberg matrices with positive subdiagonal elements can be constructed when its eigenvalues and the eigenvalues of $\widehat{H}_{11}$ and $\widehat{H}_{22}$ are known. Here $\widehat{H}_{11}$ and $\widehat{H}_{22}$ are rank-one modifications of $k \times k$ leading principal submatrix of H and of its $(n-k)\times(n-k)$ remain submatrix respectively. In the end, the uniqueness of H and an algorithm is obtained.

In this paper, we put forward a new kind of inverse problem. And we make use of the divide and conquer method for the eigenvalue problems to divide the matrix into two partitions. By discussing the separate relations between these given eigenvalues, we construct the eigenvectors from the given eigenvalues and present relevant algorithms for solving these inverse problems.

Key words: Jacobi matrices; unitary Hessenberg matrices; inverse eigenvalue problems

第一章　引言

在数值代数领域，结构矩阵的特征值问题探讨的是给定一类具有一定特点的矩阵，通过直接法、迭代法等方法求出它们的特征值和特征向量；反之，由预先给定的特征值或特征向量来构造出满足一定结构(或类型)的矩阵的问题，我们称之为结构矩阵的逆特征值问题(特征值反问题)。

结构矩阵的逆特征值问题来源非常广泛，它不仅来源于对数学物理逆问题的离散化，而且来自固体力学、粒子物理、量子力学、机构设计、系统参数识别、自动控制等诸多领域。在这些领域中，由于系统的动态行为经常被系统所蕴含的固有频率和标准模式所控制，因此系统中谱的信息就被继承下来。而我们往往期望的是能够从它们的动态行为来确定原来的物理系统，从而产生了逆特征值问题。又因为一般的物理系统要服从一些可行性的限制，所以逆特征值问题通常指的是构造具有一定结构的矩阵。一般而言，结构矩阵的逆特征值问题所研究的主要内容包括问题的可解性(必要或/和充分条件)、计算的适定性(问题解的存在性、唯一性和稳定性)、数值方法以及问题的实用性等方面。

本文讨论的第一个问题是大家熟悉的Jacobi矩阵(即次对角元为正数的对称三对角矩阵)的一类逆特征值问题。由于Jacobi矩阵自身结构具有非常好的性质，所以这类矩阵的逆特征值问题比其它的逆问题发展的更加成熟与完善。最早提出Jacobi阵的逆特征值问题的是H.Hochstadt[1]，O. H. Hald在[2]中严格证明了此问题：Jacobi阵可以被它的所有特征值和其前$n-1$阶顺序主子阵的特征值来唯一确定。文献[3]又提出了一类逆问题: 给定两组实数$\{\lambda_i\}_{i=1}^n$和$\{\mu_i\}_{i=1}^n$，构造了n阶Jacobi阵$J_n, \widetilde{J}_n$，使得$\lambda(J_n) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$，$\lambda(\widetilde{J}_n) = \{\mu_i\}_{i=1}^n$，其中$J_n$和$\widetilde{J}_n$除了在$(n,n)$位置的元素外，其余元素均相同。一些其他的Jacobi逆问题和数值算法也被相继提出或解决，如参见文献[4-10]等。文献[11]、[12]对Jacobi逆特征值问题的发展过程进行了总结。2003年蒋尔雄教授在[13]中提出了一类新的Jacobi矩阵的逆特征值问题：一个Jacobi阵可以由它的所有特征值和它的前$k-1$阶顺序主子阵的

特征值和后$n-k$阶顺序主子阵来确定(这里$1\le k\le n$)，并讨论了唯一性及给出了相应的数值算法。根据蒋老师对逆问题的提法，本文讨论了下面的一类逆问题。定义n阶Jacobi阵：

$$T=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & & & 0\\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1}\\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}T_{11} & T_{12}\\ T_{12}^T & T_{22}\end{bmatrix} \tag{1.1}$$

其中$\beta_i>0, i=1,2,\cdots,n-1$，且

$$T_{11}=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & & & 0\\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{k-1}\\ 0 & & & \beta_{k-1} & \alpha_k\end{bmatrix},\quad T_{22}=\begin{bmatrix}\alpha_{k+1} & \beta_{k+1} & & & 0\\ \beta_{k+1} & \alpha_{k+2} & \beta_{k+2} & & \\ & \beta_{k+2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1}\\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix}.$$

记

$$\widehat{T}_1=\begin{bmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & & & 0\\ \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & & \\ & \beta_2 & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{k-1}\\ 0 & & & \beta_{k-1} & \widehat{\alpha_k}\end{bmatrix}, \tag{1.2}$$

$$\widehat{T}_2=\begin{bmatrix}\widehat{\alpha}_{k+1} & \beta_{k+1} & & & 0\\ \beta_{k+1} & \alpha_{k+2} & \beta_{k+2} & & \\ & \beta_{k+2} & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1}\\ 0 & & & \beta_{n-1} & \alpha_n\end{bmatrix}, \tag{1.3}$$

其中$1\le k\le n$，且规定当$k=n$时，$\widehat{T}_2=0$。注意这里的$\widehat{T}_1$，$\widehat{T}_2$与T_{11}和T_{22}只是在最后一个对角元和第一个对角元不同。本文考虑的是：能否根据$\widehat{T}_1$，$\widehat{T}_2$的特征值和T的特征值来构造Jacobi阵T呢？仔细观察不难发现，当$k=n$时，这个问题是与文献[3]中提出的逆问题是一致的，因此我们的问题可以看成是这个问题的推广。鉴于此，此文我们假设$1\le k<n$。

本文讨论的另外一个问题是关于次对角元是正数的酉Hessenberg矩阵(即不可约的酉Hessenberg矩阵)的一类逆特征值问题。对这类矩阵的讨论大多出现在数字信号过程中的频率估计的程序(例如:Pisarenko方法[14]和复正弦建模的方法[15])、谐波恢复问题、雷达与声波导航等诸多领域。由于这类矩阵无论从其结构特点还是从其特征多项式与正交多项式的紧密联系上，或者从求其特征值的有效算法等方面都与Jacobi矩阵非常相似，所以对它的逆问题的讨论大多是在与Jacobi阵的对比中完成的。迄今为止，关于次对角元是正数的酉Hessenberg矩阵的逆特征值问题，已经讨论过两类。文献[16]讨论了一类逆特征值问题，即不可约的酉Hessenberg阵可以由它的特征值和它的秩一修正阵的特征值来唯一确定。此问题的相应的算法的讨论出现在文献[16-18]中。另一类问题出现在文献[19]中，主要研究的是由它的特征值和其前$n-1$阶顺序主子阵的秩一修正阵的特征值来唯一构造不可约酉Hessenberg阵的方法。值得注意的是这里对前$n-1$阶顺序主子阵的最后一列的修正是为了保证它的酉的性质及其根的相互交错的性质。相似于上面讨论的Jacobi阵逆特征值问题本文提出了另一类不可约的酉Hessenberg阵的逆特征值问题：如果H是不可约的酉Hessenberg阵，做如下分块：

$$H = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix}, \tag{1.4}$$

其中H_{11}是H的前k阶的顺序主子阵，H_{22}是其$(n-k)$阶余子阵。我们的问题是：将H_{11}和H_{22}做相应的修改使其变成酉阵，是否也可由他们的特征值和H的特征值构造出矩阵H呢？值得注意的是，当$k=n$时，此问题与[16]中的逆问题是一致的，所以我们的问题也可以看成是其的推广。所以此文对此问题的研究中我们假设$1 \le k < n$。

本文的主要结构是这样的：第二章首先证明了T、$\widehat{T}_1$和$\widehat{T}_2$的特征值之间的交错关系，然后讨论了Jacobi阵T可以由它的特征值以及$\widehat{T}_1$和$\widehat{T}_2$的特征值的确定的充分必要条件，最后给出了数值算法和数值例子；第三章先利用H的特点，对H_{11}和H_{22}进行秩一修正，进而得到它们的特征值之间的交错关系，最终解决了一类不可约的酉Hessenberg阵的逆特征值问题并提出相应的算法。

最后，我们先给出本文将要用到的一些记号、基本性质和引理。

记号:

$\mathrm{R}^{n\times m}$: $n\times m$阶实矩阵集合；

$\mathrm{OR}^{n\times n}$: $n\times n$阶正交矩阵的集合；

$\mathrm{C}^{n\times m}$：$n\times m$阶复矩阵集合；

$\mathrm{UC}^{n\times n}$: $n\times n$阶酉矩阵的集合；

I_k: k阶单位阵；

e_k: 除第k个元素为1外，其余元素全为0的n元列向量$(k=1,2,\cdots n)$；

ε_k: k元列向量，除第k个元素为1外，其余元素均为0；

ε_1: $n-k$元列向量，除第1个元素为1外，其余元素均为0；

A^T: 矩阵A的转置；

H^*: 矩阵H的共轭转置；

J_m: m阶反对角单位阵，即若$J=(\zeta_{ij})_{m\times m}$，则其中

$$\zeta_{ij}=\begin{cases}1, & \text{如果 } i=m+1-j;\\ 0, & \text{否则}\end{cases}$$

$\lambda(A)$：矩阵A的谱集；

$\chi(A)$: 矩阵A的特征多项式，即$\chi(A)=\det(A-\lambda I)$；

$\mathcal{H}_n$：阶数为n的不可约的酉(上)Hessenberg阵全体；

性质1.1[11] n阶Jacobi阵的特征值一定是n个不同的实数。

性质1.2[20] 不可约的酉Hessenberg阵的特征值的模都是1；并且它们的几何重数至多为1。

引理1.1[11] 设A是n阶实对称矩阵，如果有正交矩阵Q，使得$Q^TAQ=T$是一个Jacobi阵，那么正交阵Q和T完全由给定的矩阵A和Q的最后一列或第一列所唯一确定。

引理1.2[21] 令$H\in\mathcal{H}_n$是不可约的酉Hessenberg阵，那么对它的前k阶顺序主子阵的最后一列进行修正，使其变为酉阵。那么由修正后的顺序主子阵的任两个特征值在单位圆上形成的区间必包含一个H 的特征值。

引理1.3[22,19] 令$\Lambda=diag(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$ 是一个酉对角阵，其中$\lambda_i(i=1,2,\cdots,n)$互不相同。如果$u_1=[\xi_i]_{i=1}^n\in\mathrm{C}^n$ 是一个单位向量，并且每一

个元素均不为零。那么存在唯一的酉矩阵U 和唯一的酉Hessenberg阵$H \in \mathcal{H}_n$，使得$Ue_1 = u_1$, 并且$\Lambda U = UH$。

第二章 Jacobi阵的逆特征值问题

§ 2.1 Jacobi阵特征值的基本性质

设n阶Jacobi阵T如(1.1)定义，且它的谱分解为:

$$T = W^T \Lambda W,$$

其中$W \in \mathrm{OR}^{n\times n}$，$\Lambda = diag(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$，这里$\lambda_i \in \lambda(T), i = 1, 2, \cdots, n$。由性质1.1，不妨设

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n.$$

若$\widehat{T}_1$和$\widehat{T}_2$如(1.2)和(1.3)所定义，结合(1.1)，则如果

$$T = \begin{bmatrix} \widehat{T}_1 & 0 \\ 0 & \widehat{T}_2 \end{bmatrix} + \theta\beta_k \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ \theta^{-1}\varepsilon_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_k^T \ , \theta^{-1}\varepsilon_1^T \end{bmatrix}, \tag{2.1}$$

那么通过简单计算即可知

$$\widehat{\alpha}_k = \alpha_k - \theta\beta_k, \quad \widehat{\alpha}_{k+1} = \alpha_{k+1} - \theta^{-1}\beta_k. \tag{2.2}$$

设$\widehat{T}_1$和$\widehat{T}_2$的谱分解分别为

$$\widehat{T}_1 = Q_1^T D_1 Q_1, \qquad \widehat{T}_2 = Q_2^T D_2 Q_2, \tag{2.3}$$

其中$Q_1 \in \mathrm{OR}^{k\times k}$，$Q_2 \in \mathrm{OR}^{(n-k)\times(n-k)}$，$D_1 = diag(d_1, d_2, \cdots, d_k)$，$D_2 = diag(d_{k+1}, d_{k+2}, \cdots, d_n)$，$\lambda(\widehat{T}_1) = \{d_1, \cdots, d_k\}$，$\lambda(\widehat{T}_2) = \{d_{k+1}, \cdots, d_n\}$。定义如下列向量

$$z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)^T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_k \\ \theta^{-1}\varepsilon_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_1\varepsilon_k \\ \theta^{-1}Q_2\varepsilon_1 \end{bmatrix}. \tag{2.4}$$

把(2.3)和(2.4)代入(2.1)中，得到

$$T = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}^T \{ \begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} + \rho z z^T \} \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = Q^T(D + \rho z z^T)Q,$$

其中$\rho = \theta\beta_k, Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$。而由于$Q \in \mathrm{OR}^{n\times n}$，故矩阵$T$与$D + \rho z z^T$具有相同的的特征值。因此矩阵$T$ 的特征多项式为

$$\chi(T) = \det(T - \lambda I) = \det(D + \rho z z^T - \lambda I)$$

$$= \det(D-\lambda I)(1+\rho z^T(D-\lambda I)^{-1}z). \tag{2.5}$$

以上的这种讨论在分而治之法求Jacobi矩阵的特征值问题时经常会用到(如见文献[23-25])。注意到$D+\rho zz^T$是对角阵与秩一矩阵之和，而这类矩阵的特征值与对角阵的对角元之间存在如下的关系：

引理2.1.1[20] 设$D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathrm{R}^{n\times n}$满足$d_1 > d_2 > \cdots > d_n$；$\rho \neq 0$并且$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathrm{R}^n$，$z_i \neq 0$，$\forall i = 1, 2, \cdots, n$。如果

$$(D+\rho zz^T)v = \lambda v, \qquad v \neq 0,$$

那么$z^T v \neq 0$并且$D-\lambda I$是非奇异的。

由引理2.1.1我们不难看出，如果D 的对角元互不相同且$\rho \neq 0$，那么矩阵$(D+\rho zz^T)$的特征值与D 的对角元一定互不相同，即如果$\lambda \in \lambda(D+\rho zz^T)$，那么必有$\lambda \neq d_i, i = 1, 2, \cdots, n$。

引理2.1.2[20] 设$D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n) \in \mathrm{R}^{n\times n}$并且满足$d_1 > d_2 > \cdots > d_n$；$\rho \neq 0$并且$z = (z_1, \cdots, z_n) \in \mathrm{R}^n$，$z_i \neq 0$，$\forall i = 1, 2, \cdots, n$。如果$V \in \mathrm{OR}^{n\times n}$，且满足

$$V^T(D+\rho zz^T)V = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n),$$

其中$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$，且$V = [v_1, v_2, \cdots, v_n]$，那么

(1) $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$是方程$f(\lambda) = 1 + \rho z^T(D-\lambda I)^{-1}z$的根。

(2) 如果$\rho > 0$，则$\lambda_1 > d_1 > \lambda_2 > d_2 > \cdots > \lambda_n > d_n$；如果$\rho < 0$，则$d_1 > \lambda_1 > d_2 > \lambda_2 > d_3 > \cdots > d_n > \lambda_n$。

下面我们推出Jacobi阵的根的隔离性质。

引理2.1.3 设T，$\widehat{T}_1$与$\widehat{T}_2$如(1.1)，(1.2)和(1.3)所定义且满足(2.2)，$\lambda(T) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$，$\lambda(\widehat{T}_1) = \{d_i\}_{i=1}^k$，$\lambda(\widehat{T}_2) = \{d_i\}_{i=k+1}^n$，且

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_n;$$

$$d_1 > d_2 > \cdots > d_k; \qquad d_{k+1} > d_{k+2} > \cdots > d_n.$$

令$\rho = \theta\beta_k$，则

(I) 如果$\widehat{T}_1$与$\widehat{T}_2$没有相同的特征值，那么必定存在唯一的置换$\{j_1, j_2, \cdots, j_n\}$满足：

$$\lambda_1 > d_{j_1} > \lambda_2 > d_{j_2} > \cdots > \lambda_n > d_{j_n}, \quad \text{当}\theta > 0\text{时}; \tag{2.6}$$

$$d_{j_1} > \lambda_1 > d_{j_2} > \lambda_2 > \cdots > d_{j_n} > \lambda_n, \quad 当\theta < 0时. \tag{2.7}$$

(II) 如果$\widehat{T}_1$与$\widehat{T}_2$存在相同的特征值，那么这个相同的值一定也是T的特征值。而且其他的特征值仍然是方程$f(\lambda) = 1 + \rho z^T(D - \lambda I)^{-1}z$的根，这里$D = diag(d_1, d_2, \cdots, d_n)$，$z$如(2.4)定义。并且如果$d_{j_t} = d_{j_{t+1}}$，那么当$\theta > 0$时，(2.6)式中用$d_{j_t} = \lambda_{t+1} = d_{j_{t+1}}$ 代替$d_{j_t} > \lambda_{t+1} > d_{j_{t+1}}$仍然成立；当$\theta > 0$时，用$d_{j_t} = \lambda_t = d_{j_{t+1}}$代替$d_{j_t} > \lambda_t > d_{j_{t+1}}$式(2.7)亦然。

证明： 将$\{d_i\}_{i=1}^n$重新排序:

$$d_{j_1} \geq d_{j_2} \geq \cdots \geq d_{j_{n-1}} \geq d_{j_n}, \tag{2.8}$$

并且如果$d_{j_i} = d_{j_{i+1}}$，则约定$d_{j_i} \in \lambda(\widehat{T}_1)$，$d_{j_{i+1}} \in \lambda(\widehat{T}_2)$，那么$(j_1, j_2, \cdots, j_n)$是$(1, 2, \cdots, n)$的唯一置换。记此置换阵为$\Pi(j_1, j_2, \cdots, j_n)$，又$\Pi^{-1} = \Pi = \Pi^T$，则令矩阵$A = \Pi(D + \rho zz^T)\Pi^T = \widetilde{D} + \rho\widetilde{z}\widetilde{z}^T$，其中$\widetilde{D} = diag(d_{j_1}, d_{j_2}, \cdots, , d_{j_n})$，相应的$\widetilde{z} = (z_{j_1}, z_{j_2}, \cdots, z_{j_n})^T$。由$\Pi$的正交性可知$A$与$(D + \rho zz^T)$特征值相同，进而与$T$的特征值相同。所以，$\{\lambda_i\}_{i=1}^n = \lambda(A) = \lambda(\widetilde{D} + \rho\widetilde{z}\widetilde{z}^T)$。

对于情况(I)：如果$\{d_i\}_{i=1}^k$与$\{d_i\}_{i=k+1}^n$没有公共值，则(2.8)式一定为

$$d_{j_1} > d_{j_2} > \cdots > d_{j_{n-1}} > d_{j_n}.$$

又由于$\beta_k > 0$，则如果$\theta > 0$，那么$\rho = \theta\beta_k > 0$。因此由引理2.1.1及引理2.1.2可以很容易得到(2.6)成立；同理可得$\theta < 0$时，(2.7)成立。

下面我们讨论(II)：当$\{d_i\}_{i=1}^k$与$\{d_i\}_{i=k+1}^n$存在相同的值的情况。

由式(2.5)和z在(2.4)中的定义可知

$$\chi(T) = \det(T - \lambda I) = \prod_{i=1}^n (d_i - \lambda)(1 + \rho\sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{d_i - \lambda}). \tag{2.9}$$

如果d_j是$\widehat{T}_1$与$\widehat{T}_2$的公共的特征值，那么$\prod_{i=1, i\neq j}^n (d_i - d_j) = 0$；由上式可知$\det(T - d_j I) = 0$，所以说$d_j$也是$T$的特征值。另外，如果$d_j$在$\{d_i\}_{i=1, i\neq j}^n$中无相同的值，那么$\prod_{i=1, i\neq j}^n (d_i - d_j) \neq 0$，故由(2.9)知$\det(T - d_j I) \neq 0$，所以$d_j$不是$T$的特征值。而由(2.9)知$T$的任意特征值$\lambda_j$必是

$$g(\lambda) = \prod_{i=1}^n (d_i - \lambda) = 0,$$

的根或

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{d_i - \lambda} = 0$$

的根。如果$g(\lambda_j) = 0$，那么一定存在$d_i = \lambda_j$，使得$\det(T - d_i I) = 0$，且由上讨论可知d_i是$\widehat{T}_1$与$\widehat{T}_2$公共特征值。而如果$\forall i = 1, 2, \cdots, n, d_i \neq \lambda_j$，则$g(\lambda_j) \neq 0$，因而必有$f(\lambda_j) = 0$。所以，其他的特征值一定是方程$f(\lambda) = 1 + \rho z^T (D - \lambda I)^{-1} z = 0$的根。

当$\theta > 0$，即$\rho > 0$时，假设$\{d_i\}_{i=1}^{k}$与$\{d_i\}_{i=k+1}^{n}$重新排序后所有公共特征值中下标最小的为d_{j_t}，又因为$\widehat{T}_1$和$\widehat{T}_2$ 是Jacobi阵，所以$d_1, d_2, \cdots, d_n$与d_{j_t}中相同的至多有2个，因此必有

$$d_{j_1} > d_{j_2} > \cdots > d_{j_t} = d_{j_{t+1}} > d_{j_{t+2}}.$$

由上面讨论可知当$1 \leq i < t+1$时，T的特征值λ_i是方程$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{d_i - \lambda}$的根。我们不妨将其重新记为

$$f(\lambda) = 1 + \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{j_i}^2}{d_{j_i} - \lambda},$$

所以

$$f'(\lambda) = \rho \sum_{i=1}^{n} \frac{z_{j_i}^2}{(d_{j_i} - \lambda)^2} > 0,$$

上式中我们假设$\forall z_i \neq 0$。因此f在它的奇点之间的区间上是严格单调上升的。任给充分小的正数ϵ，可知

$$f(d_{j_s} - \epsilon) > 0, f(d_{j_{s+1}} + \epsilon) < 0, \quad s = 1, 2, \cdots, t,$$

且

$$f(+\infty) > 0,$$

因此我们知道在$(d_{j_t}, d_{j_{t-1}}), \cdots, (d_{j_2}, d_{j_1})(d_{j_1}, +\infty)$这些区间上必存在$f(\lambda)$的根，即

$$+\infty > \lambda_1 > d_{j_1} > \lambda_2 > d_{j_2} > \cdots > \lambda_t > d_{j_{j_t}}.$$

而由上讨论可知$d_{j_t} = d_{j_{t+1}}$必是T的特征值，所以必是λ_{t+1}，因此

$$+\infty > \lambda_1 > d_{j_1} > \lambda_2 > d_{j_2} > \cdots > \lambda_t > d_{j_t} = \lambda_{t+1} = d_{j_{t+1}}.$$

用同样的讨论我们可以得到不等式的另一边。同理可证$\theta < 0$的情况。所以此引理得证。□