学校编码：10384　　　　　　　　　分类号 ______ 密级 ______
学　　号：19020070153856　　　　UDC ______________

厦门大学

博　士　学　位　论　文

球覆盖的理论方法在 Banach 空间若干几何、拓扑性质研究中的应用

On Ball-covering Theory Method and Their Applications to the Study of Some Geometric and Topological Properties of Banach Spaces

王　　波

指导教师：　程立新 教 授
专业名称：　基 础 数 学

论文提交日期：　2010 年 5 月
论文答辩日期：　2010 年 5 月
学位授予日期：　2010 年 　月

答辩委员会主席：______________
评　　阅　　人：______________

2010 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下，独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）的研究成果，获得（　　　　　　　　　　　　　　）课题（组）经费或实验室的资助，在（　　　　　　　　　　　　）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于

（　　）1. 经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　）2. 不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打"√"或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘 要

称一个 Banach 空间 X 具有球覆盖 $\mathcal{B}$, 是指存在一族远离原点的开球 (或者闭球), 它们的并包含了单位球面 S_X. 称 X 具有球覆盖性质 (BCP) 若其具有可数多的球覆盖. 本文利用球覆盖这个工具，继续对 Banach 空间的几何和拓扑性质进行研究. 在研究过程中，我们借助有限维空间的球覆盖的性质去刻画整个空间几何性质，如 (一致) 光滑性，万有表示性及 B- 凸性. 我们也讨论了球覆盖性质及具有球拓扑的相应的空间的 G_δ 性质. 全篇文章组织如下:

第一章，我们给出 Banach 空间球族行为的历史回顾. 重点介绍了球拓扑及球覆盖的发展历史，为后面的内容提供了理论背景.

第二章, 给出了球拓扑的基本性质及球覆盖的定义等价性证明, 结合这些内容, 我们证明对赋予球拓扑 b_X 的 Banach 空间 X, X 中的每点都是 G_δ 点当且仅当 X 具有球覆盖性质. 结合 Fabian 的结论可以得到，在一个具有 BCP 的 Banach 空间中，每个 b_X 紧的集合是序列紧的.

第三章至第五章，我们给出了两个简单而有用的引理，再通过有限维子空间的球覆盖性质刻画了一系列 Banach 空间的几何性质，即光滑性，一致光滑性，万有表示性及 B- 凸性.

关键词: 球覆盖　球拓扑　(一致) 光滑　万有表示性　B- 凸

Abstract

By a ball-covering $\mathcal{B}$ of a Banach space X, we mean that it is a collection of open(or closed) balls off the origin whose union contains the unit sphere S_X. We say that X admits the ball-covering property (BCP) if it admits a ball-covering of countably many balls. In this paper, we utilize properties of ball-coverings in Banach spaces to study some geometric and topological properties of Banach spaces. While in the process of these research, we usually characterize the geometric properties of a Banach space via its ball-coverings of finite dimensional subspaces, such as (uniform) smoothness, universal finite representability and B-convexity. We also discuss the relationship between the ball-covering property and G_δ property of the corresponding spaces in ball-topology. This paper is organized as follows

In chapter 1, we give a historical overview of several topics about balls of Banach spaces. We focus on the development of ball-covering and ball-topology, which offers a theoretical background to the later chapters.

In chapter 2, we show a basic property of the ball-topology and that the two notions of ball-covering property are equivalent. Keep this in mind, we prove that for a Banach space X endowed with the ball-topology, every point in B_X is a b_X-G_δ point if and only if X has the BCP. Combined with a result of Fabian, this implies that every b_X-compact set in a Banach space with the BCP is sequentially compact.

In chapter 3 to chapter 5, we first establish two simple but useful lemmas, then characterize a series of geometric properties of Banach spaces, i.e., the soomthness, uniform smoothness, universal finite representability and B-convexity of a Banach space by properties of ball-coverings of its finite dimensional subspaces.

Keywords: ball-covering; ball-topology; (uniform) smoothness; universal finite representability; B-convexity

目 录

Table of Contents

第一章 绪 论

§1.1 Banach 空间球族行为的历史回顾

毋庸置疑，赋范空间单位球的几何和拓扑性质在 Banach 空间几何学中有着很重要的作用. 几乎 Banach 空间的所有性质，例如，凸性，光滑性，自反性， Radon Nikodým 性质等等，都可以看成是空间单位球的相应性质. 在这里，我们应该提到有几个关于研究球族行为的课题，如 Mazur 交性质，装球问题，关于拓扑度的非紧测度，球拓扑等等，这些课题从提出的开始就引起了许多数学家的关注. 经过前人们孜孜不倦的努力，这些问题的研究已经取得了许多重要的成果. 这些结果往往又对 Banach 空间几何性质的深入研究有着不可或缺的作用. 可见球族行为的魅力是让人惊叹的. 下面首先来回顾下这些球族行为的课题.

• 球拓扑

球拓扑概念是由 G. Godefroy 及 N. J. Kalton [1] 提出的. 它的产生是源于以下两个一般性的问题. 第一个问题是 Banach 空间 X 在什么条件之下决定了其唯一的等距于一个对偶空间. 我们称 X 具有唯一的预对偶 (UPD): 如果存在唯一的一个闭子空间 $E \subset X^*$ 使得 X 可以看成与 E^* 相等 (或者等价的， X 的闭单位球 B_X 是 $\sigma(X, E)$- 紧的). 关于这个一般性问题的结论可以参考 [2–5]. 现在也可以对 X 具有唯一预对偶的条件换个说法，即 X 具有 UPD: 若在 B_X 上存在唯一的一个紧 Hausdorff 拓扑，这个紧 Hausdorff 拓扑是 X 上的某个局部凸线性拓扑所诱导的.

第二个问题是 Banach 空间 X 在什么条件下决定了对其上任意的 Hausdorff 线性拓扑 τ, 只要它使得 B_X 是 $\tau-$ 紧，我们就有 $\tau|_{B_X}$ 与 X 上某个局部凸线性拓扑相等. 这个问题最早是在 [6] 中得到研究，它是受到"关于 Krein-Milman 定理在非局部凸 $F-$ 空间是否成立问题？"这个问题的启发而提出的. J. W. Roberts 在 [7] 中证明了存在一个没有端点的绝对凸的紧子集. 所以存在 Banach 空间 X, 它不是对偶空间，但是具有线性拓扑 τ 使得 (B_X, τ) 是紧的. 尽管在文献 [6] 中表明，若 X 是自反或者有可分对偶，且假如存在线性拓扑 τ 使得 B_X 是 $\tau-$ 紧的，则 (B_X, τ) 可以看成是某局部凸拓扑限制在 B_X 上的限制.

比较这两个问题的这些已知的结论，可以得到对某些 Banach 空间 X(如 X 有可分对偶), 若两个 Hausdorff 线性拓扑使得 B_X 紧，则它们在 B_X 上相等.

称拓扑 τ 在 X 是兼容的 (consistent), 若映射

$$g_\lambda(x,y)=\lambda x+(1-\lambda)y$$

在 $B_X\times B_X$ 上分别连续 (对 $0\le\lambda\le 1$). 由前面的讨论知道，我们在寻找 X 上条件使得 B_X 有唯一紧 Hausdorff 兼容拓扑. 在这种情况下，我们称 X 具有紧唯一性 (CUP). 在这种空间中，单位球几何结构预先决定其上的紧 Hausdorff 拓扑. 许多使得 Banach 空间 X 具有 UPD 的条件其实是强于使得 X 具有 CUP 的条件.

就是为了研究这些问题，引入了球拓扑的概念. 记 X 上的球拓扑为 b_X, 它是最粗的拓扑，使得每个闭球 $B(x,\rho)=\{u:\|u-x\|\le\rho\}$ 在 b_X 下是闭的. 因此点 $x_0\in X$ 的邻域基具有以下形式

$$V=X\backslash\bigcup_{i=1}^{n}B(x_i,\rho_i)$$

其中 $x_1,\cdots,x_n\in X, n\in\mathbb{N}$ 及 $\|x_0-x_i\|\ge\rho_i$. 球拓扑在对偶问题的应用体现在以下的一些结论上 [1]

定义 1.1.1. *称 X 具有有限 - 无限交性质 ($IP_{f,\infty}$), 若对 X 每个闭球族 $\{B_\alpha:\alpha\in I\}$ 使得 $\cap B_\alpha=\emptyset$, 则存在有限子集 $\mathcal{F}\subset I$, 使得 $\cap\{B_\alpha:\alpha\in\mathcal{F}\}=\emptyset$.*

定理 1.1.2. *令 X 是一个 Banach 空间使得 (B_X,b_X) 是 Hausdorff. 则以下条件在 X 上等价:*

(1) X 是一个对偶空间.

(2) X 具有 UPD.

(3) X 具有 CUP.

(4) X 具有 $IP_{f,\infty}$.

(5) 存在从 X^{**} 到 X 上的范数为一的投影.

从以上的定理知道，如果 (B_X,b_X) 是 Hausdorff, 单位球 B_X 几何结构预先决定其上的紧拓扑.

以上是球拓扑在对偶问题上的应用，它还有许多其他应用，其中包括推广了 Corson 及 Lindenstrasuss 的结论 [8]: 每个紧子集都可以表示成为闭球有限并的交.

• Mazur 交性质

最早是 Mazur[9] 最先注意到 Euclidean 空间的这一性质：每个有界闭凸集可以表示成闭球的交．他将线性赋范空间的这种性质命名为 Mazur 交性质 (或者 MIP). 我们容易知道：有界闭凸集 C 是闭球的交当且仅当对任意不属于 C 的 x, 存在包含 C 的闭球但不包含 x. 所以 MIP 可以看成是球分离，比经典的超平面分离来的强.

在之后的关于 MIP 的研究中，人们比较关注的问题是 MIP 特征的刻画. 在文献 [10], 可以看到半可凹点在有关 MIP 问题中有关键的作用．同样的在文献 [11] 中，这篇文章可以看成是当时研究 MIP 的高潮，它包含了前人对 MIP 研究的成果，包括 Phelps[12] 及 Sullivan[13] 工作．这篇文献 [11] 中也有许多关于 MIP 特征的刻画，但最有用的可能还是文献 [10] 中的半可凹点．称 f 为半可凹点，若范数为一的函数 $f \in X^*$ 满足对任意 $\varepsilon > 0$, 存在 w^* 切片 $\mathcal{S} = \{x^* \in B_{X^*} : x^*(x) \geq 1 - \delta\}$(其中 $x \in S_X, \delta > 0$) 使得 $diam(f \cup \mathcal{S}) \leq \varepsilon$. 若 $f \in \mathcal{S}$, 则它就是是经典的 w^* 可凹点. 关于其性质，主要有：

性质 1.1.3. *$f \in \mathcal{S}$ 是 B_{X^*} 半可凹点当且仅当任意有界闭凸集 C 及 $\forall x \in X$, 若 f 分离 x 及 C, 则存在球 $D \subset X$ 使得 $C \subset D$, 但 x 不属于 D*

性质 1.1.4. *以下等价：*

1) 空间具有 MIP;

2) S_{X^*} 中有稠密的半可凹点;

3) S_{X^*} 中有稠密的 w^* 可凹点.

再次说明，具有 MIP 的空间还存在其他特征，如可以用对偶映射，支撑映射及 $\varepsilon-$ 可微点来刻画这些特征 [11], 但最有用的特征可能还是性质 1.1.4.

有了文献 [11] 及之前的先辈们的工作，关于不同的交性质的研究在缓慢而稳步的发展着． Whitfield 及 Zizler 在文献 [14] 中研究这个性质：每个紧凸子集是闭球的交．关于此性质更多的研究，之后由 Sersouri[15][16] 及 J. Vanderwerff[17] 继续着．关于弱紧凸子集相应的交性质由 Zizler[18] 及 J. Vanderwerff[17] 进行了研究.

Whitfield 及 Zizler[19] 考虑了一个一致版本的 MIP. Chen 及 Lin[20] 考虑了不同的交性质. 在各种类似于 MIP 的交性质当中，可能最重要的就是 w^*-Mazur 交性质. 一个对偶空间满足 w^*-Mazur 交性质 (或者 MIP*)[11]: 若每个 w^* 紧凸集是闭球交. 在 [11] 中 MIP* 有类似于 MIP 结论. 特别 MIP* 与预对偶空间的凸性有关.

性质 1.1.5. 对偶 X^* 具有 MIP^* 当且仅当预对偶空间的单位球上的可凹点在其上是稠密的.

这里应该提到还有很多对 MIP 及 MIP* 有贡献的作者, 如 Acosta 及 Galan[21], P. Bandyopadhyaya 及 A. Roy [22], P. Georgiev 及 P. S. Kenderov 等等.

近来， A. S. Granero, M. Jiménez-Sevilla 及 J. P. Moreno 等人也对 MIP 进行了系统的研究，得到了许多性质良好的结果，他们的工作主要体现在以下几个方面 [23–28]: 如 Banach 空间再赋范使之具有 MIP 及 MIP*; MIP 及 MIP* 和凸函数微分关系，特别讨论了 Asplund 及几乎 Asplund 空间； MIP 及 porosity 的相互作用；凸集的和及闭的稳定性，这些凸集是闭球的交； Mazur 空间.

• 装球问题 (Sphere packing)

在数学中，装球问题把不相交的相同大小的球排满整个空间. 一般来说，这个空间指的是三维空间. 但是, 装球问题也可以推广到二维空间 (此时 "球" 就是指圆), n 维空间 (此时 "球" 是指超球面) 及非欧氏空间如双曲空间. 经典的装球问题是寻找一种排列使得球以尽可能多的比例占据整个空间. 这个装满空间的比例称之为排列的密度. 由于排列的密度取决于体积的大小，这个问题通常都是在一个充分大的体积内，最大化其平均或者渐近密度 (average or asymptotic density). 一个正规的排列 (regular arrangement)(也称之为有周期的 (periodic) 或格 (lattice) 排列) 是指球心都组成一个称之为格的整齐的模式. 球心没有排列成一个格，这种排列称之为非正规或不定期的排列 (irregular or aperiodic arrangements). 正规排列比非正规排列容易掌握，由于它们对称性让它们易于分类和测量其密度. 下面简单介绍几种装球.

Circle Packing

在二维欧式空间中，Carl Friedrich Gauss 证明了正规的圆排列的最高密度是：六边形的装球排列，即圆心都排成六边形的格 (错开排列，像一个蜂房), 每个圆被六

个圆围着. 排列的密度是

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} \approx 0.9069$$

在 1940 年匈牙利数学家 László Fejes Tóth 证明了六边形的格在所有可能的圆排列中是最密的，不管正规排列还是非正规排列.

Sphere Packing

正规的装球 (Regular packing): 在 1611 年， Johannes Kepler 问他自己怎样的装球能最有效利用空间. 在研究了水手堆叠炮弹的方法，及水粒子怎样组成雪花，Kepler 最终找到了一种称为面心立方结构的排列方法 (face-centred cubic), 这刚好也是水果商人堆叠桔子的方法. 用这种方法，桔子在整个空间中所占得比例是 74.04%, Kepler 推测这就是最大可能的密度，不管对正规还是非正规的排列来说，这就是著名的 Kepler 猜想. 在 1998 年， Thomas Hales 采用了 1953 年 László Fejes Tóth 建议的方法之后，宣布他证明了 Kepler 猜想. Hales 是用穷举法证明的，用复杂的计算机运算了许多独立的事件. 专家也说 Hales 的证明基本是正确的，所以 Kepler 猜想也基本得到解决 [29–36].

非正规的装球 (Irregular packing), 还有关于 Hypersphere packing, Hyperbolic space 及其他空间的情况就不一一介绍，有兴趣话，可以参考文献 [37–43].

• 球覆盖

球覆盖的概念是程立新教授在 [44] 中提出了，它的产生源于对 Banach 空间嵌入问题的研究. Banach 空间的嵌入问题，它包括 Banach 空间的插值，局部理论，同胚和再赋范理论，映射可微性，等距延拓和逼近，“万有”空间， Orlicz 空间构造问题等等，自泛函分析诞生就是一个重要的论题. 近几年，人们发现用以通过几何空间（如非紧完备黎曼流形，有限生成群等）的大尺度几何结构探索指标代数（即 Roe 代数）的 K- 理论群的信息，从而建立几何空间的几何，拓扑与分析之间的联系，并应用于解决其他重要问题，如 Novikov 猜想、 Gromov-Lawson-Roenberg 正标量曲率猜测，群 $\mathcal{C}^*$- 代数幂等元问题等的粗几何，尤指粗 Baum-Connes 猜想和粗 Novikov 猜想，与“粗嵌入”竟有如此本质内在的联系 – 它们可以归结为有界几何 (即这样一个离散度量空间 Ω, 使得存在一个函数 $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{N}$, 满足： Ω 中任何一个以 $r > 0$ 半径的球所包含 Ω 的点都不超过 $f(r)$) 是否能够“粗嵌入”到一个 Hilbert 空间或者一致凸空间，这实质上是“嵌入”研究领域一个崭新课题. [55–76]

随着几何群论和粗几何的发展， M. Gromov[55] 提出了“粗嵌入”的概念，给定两个度量空间 X, Y，称映射 $f : X \longrightarrow Y$ 为粗嵌入，如果存在两个无界且真函数 $\rho_{\pm}(t) : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$，使得对每个 $x, y \in X$，$\rho_-(d_X(x,y)) \leq d_Y(f(x), f(y)) \leq \rho_+(d_X(x,y))$. 由于“粗嵌入”是一个粗等价不变量，因此能反映一些度量空间的本质性质. 2000 年， Yu(郁国梁) 证明了粗 Baum-Connes 猜想对可粗嵌入进 Hilbert 空间的有界几何空间成立；最近，他又和 Kasparov 合作证明了粗几何的 Novikov 猜想对于可粗嵌入进一致凸空间的有界几何空间成立. 这样粗几何和嵌入问题受到了人们更加广泛的关注，一方面， Yu 利用局部化技术结合其他工具对“一致可嵌空间”证明了粗 Baum-Connes 猜测，从而对相当广泛的空间类证明了 Novikov 猜测；另一方面， Gromov, Higson, Yu 用膨胀图上的 Roe 代数中的鬼投影元给出了粗 Baum-Connes 猜测的反例. 鬼投影的出现使人们意识到对粗 Baum-Connes 猜测的研究将长期、复杂而艰巨的工作. 因此，寻求更多的“一致可嵌空间”成为这一研究领域的重大课题之一.

为了寻求更多的可嵌入超自反空间的几何类，程立新教授引入了超弱紧集和球覆盖的概念. 其中, 通过研究球覆盖在一致凸 (超自反空间) 和 Hilbert 空间的表现，尤其它们的球心位置和半径估计，证明有界几何“生成”的超弱紧集若能向超自反空间嵌入，则它们本身正是在超自反空间的一个“置放”，而这种“置放”恰好是一个粗嵌入. 进而证明“一大类”有界几何向一致凸空间的嵌入问题可通过其“拉回”到 Banach 空间内“做成”的超弱紧集向一致凸空间的嵌入实现.

在近些年， Banach 空间的球覆盖性质也吸引了数学家的关注. 在 [44–49] 进行了广泛的研究 (在 [51–54] 中也有类似的课题). 对于 Banach 空间单位球面的一个球覆盖 $\mathcal{B}$, 我们指的是一族远离原点的开球 (或者闭球), 它们的并包含了单位球面 S_X, 或者等价的， $\mathcal{B} \equiv \{B(x_i, r_i)\}_{i\in I}$(或 $\mathcal{B} \equiv \{\bar{B}(x_i, r_i)\}_{i\in I}$) 构成了一个球覆盖当且仅当它满足 i)$S_X \subset \bigcup \mathcal{B}$ 及 ii) 对 $x \in \bigcup \mathcal{B}$ 有 $\|x\| > 0$, 其中 $B(x,r)(\bar{B}(x,r))$ 代表以 x 为心 r 为半径的开 (闭) 球. 若 $\inf\{\|x\| : x \in \bigcup \mathcal{B}\} \geq \alpha$, 我们称 $\mathcal{B}$ 是 α 远离原点. 对于一个球覆盖而言， $r(\mathcal{B}) \equiv \sup\{r_i : B(x_i, r_i) \in \mathcal{B}\}$ 称为其半径. 以下简单罗列下球覆盖的一些经典的结果

Cheng, Cheng, Shi[47] 通过有限维子空间的球覆盖性质给出了超自反空间的充分必要条件

定理 1.1.6. 设 X 是一个 *Banach* 空间. 则它是超自反的当且仅当存在一个等价的范数，正的真值函数 f 及 $g:\mathbb{N}\longrightarrow\mathbb{R}^+$ 满足对任意的 $n\in\mathbb{N}$ 及任意的 n 维子空间 Y, 都存在 Y 的一个极小球覆盖使得：

i) $\mathcal{B}^{\#}=n+1$;

ii) $r(\mathcal{B})\leq f(n)$;

iii) $\mathcal{B}$ 是 $g(n)-$ 远离原点.

我们知道若 X 具有球覆盖性质，则 X^* 是 w^*- 可分的，反之未必成立，如 [50] $l_1[0,1]\equiv\{f:[0,1]\to\mathbb{R}\mid f$ 有可数支撑，且 $\Sigma_{t\in[0,1]}|f(t)|<\infty\}$, 但是当 X^* 是 w^*- 可分时，有以下结论 [49]

定理 1.1.7. 设 X 是对偶 w^* 可分的 *Banach* 空间，则对任意的 $\varepsilon>0$, 存在 X 上的等价范数 $|\cdot|$ 使得：

i) $(1+\varepsilon)^{-1}\|x\|\leq|x|\leq(1+\varepsilon)\|x\|$ 对任意的 $x\in X$;

ii) X 赋予范数 $|\cdot|$ 具有球覆盖性质.

由此可以看到，球覆盖性质对于研究 Banach 空间的学者来说是一个很有用的工具. 本文正是借用这样的工具来对空间的几何和拓扑性质作了一些研究探讨.

§1.2　本文的主要内容

本文利用球覆盖这个工具，对 Banach 空间的几何和拓扑性质进行研究. 全篇文章组织如下：

第一章，简要回顾了几种 Banach 空间球族行为，介绍它们的历史及各自对泛函分析或其他数学分所支产生的作用；重点介绍了球拓扑及球覆盖的发展历史，为后面的内容提供了理论背景.

第二章, 给出了球拓扑的基本性质及球覆盖的定义等价性证明. 有了这些内容，我们证明了对赋予球拓扑 b_X 的 Banach 空间 X, X 中的每点都是 G_δ 点当且仅当 X 具有球覆盖性质 (BCP). 最后，结合 Fabian[77] 的结论可以得到，对于具有 BCP 的 Banach 空间，每个 b_X 紧的集合是 b_X 序列紧的.

第三章，首先给出了一个关于有限维空间范数的引理. 在此引理的基础上，我们可以把空间 X 的 n 维子空间看成是赋予某个范数的 $\mathbb{R}^n$ 空间. 最后，我们通过 X 的有限维子空间的球覆盖性质去刻画全空间的光滑性和一致光滑性.

第四章及第五章，首先回顾了相应的定义，及一些经典的结论. 在第四章中，我们得到了一些关于球覆盖性质的引理，这些引理对解决这两章的问题有关键作用. 最后，我们将空间的万有表示性及 B- 凸性通过其有限维子空间的球覆盖性质来刻画.