学校编号： 10384　　　　分类号 ________ 密级 ________

学号： 19020061151745　　　　UDC ________

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

各种统计收敛的统计测度表示

Statistical measure representation of different kinds of statistical convergence

杨 晓 颖

指导教师姓名：程立新 教　授
专　业　名　称：基　础　数　学

论文提交日期： 2009 年 5 月
论文答辩时间： 2009 年　月
学位授予日期： 2009 年　月

答辩委员会主席：________________

评　　阅　　人：________________

2009 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果．本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明．本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任．

责任人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定. 厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版. 保密的学位论文在解密后适用本规定.

本学位论文属于

1 、保密（在　　　　年解密后适用本授权书. ）

2 、不保密（ ）.

（请在以上相应括号内打 " √ " ）

作者签名:　　　　　　　　　日期:　　　年　月　日

导师签名:　　　　　　　　　日期:　　　年　月　日

目　　录

Contents

中文摘要

自 1951 年， $H.Fast$ 引入了统计收敛的定义后，经过半个多世纪，尤其上个世纪 90 年代以后的研究和发展，已经成为一个庞大的理论体系，各种各样的统计收敛多达几十种，建立起统计收敛测度理论的问题也逐步成为一个核心问题，因为一种合理的理论不仅是把各种统计收敛统一起来的原则，而且是统计收敛通向测度理论，积分理论，概率论和数理统计的桥梁。近来，程立新等建立了统计收敛的测度理论，这在理论上使统计收敛理论得到完美的统一。

正整数集 N 上一个实（复）值有限可加测度 μ 称为一个统计型测度，如果对任意的单点集 $\{k\}$ ，有 $\mu(k) = 0$ 。本文的主要目的是利用统计测度刻画各种统计收敛，证明了经典统计收敛， $lacunary$ 统计收敛，（强） $\lambda-$ 统计收敛，强统计收敛， $\hat{S}$ 收敛，可加性等类型的统计收敛恰好相应于具体的统计测度类的一个测度收敛。

关键词：有限可加测度；统计型测度空间；统计收敛；次微分；$Banach$ 空间.

ABSTRACT

After the study in more than half a century, especially after 1990s, dozens of statistical convergence has covered an extensive theoretical system since H.Fast has introduced its definition, so the question of establishing measure theory for statistical convergence has been moving closer to center stage, since a kind of reasonable theory is not only fundamental for unifying various kinds of statistical convergences, but also a bridge linking the study of statistical convergence across measure theory, integration theory, probability and statistics. Recently, those people such as Cheng Lixin etc. have established Measure theory of statistical convergence, which achieves the perfect unity in the convergence theory.

A real(complex)-valued finitely additive measure μ on all integers N is said to be a measure of statistical type provided $\mu(k) = 0$ for all singletons $\{k\}$. The main purpose of this paper is to use statistical measure to scale various statistical convergence. The paper proves that every kind of statistical convergence such as classical statistical convergence, lacunary statistical convergence , λ-statistical convergence, strong statistical convergence, strong λ-statistical convergence, $\hat{S}$ convergence, summability etc., is just a type of measure convergence with respect to a specific class of statistical convergence.

Keywords: finitely additive measure; statistical type measure; statistical cenvergence,subdifferential,Banach space.

第一章 引言

早在 1951 年, $H.Fast$[70] 引入了统计收敛的定义后, $Connor.J$[22 − 24],$Fridy.J.A$[63],$Miller.H.I$[87 − 89],$Orhan.C$ 及其它数学家作了进一步研究和发展。自从上世纪 90 年代以来, 统计收敛变成活跃的研究领域, 它出现在很多广泛的领域, 如统计收敛出现的矩阵求和 [2], [24], [72], [74], [88], [92], [95], [126], 例如 [24] 中 $Connor.J$ 描述了强 $A-$ 可和, $A-$ 强可和和强 $Cesàro$ 可和的定义, 并指出这三个定义对于有界序列是等价的; 级数理论, 如 [66] 中作者主要处理了统计收敛级数; 积分理论, 如 [23] 中作者利用正则矩阵的可加性等一些熟知的结果导出正则积分的可加性; 傅立叶分析 [91], [93], 例如 [91] 中作者把统计收敛应用到 $Walsh-Fourier$ 级数中; 正算子的逼近 [1], [3], [35] − [39], [42] − [46], [55] − [57], [68], [71], [77], [123], 如 [56] 中作者证明了在实 M 维空间的紧集上的正线性算子的 $Korovkin$ 型逼近理论; 数论 [128] ; $Banach$ 空间理论 [69], [73] ; 拓扑群 [46], [47], [80], 如 [46] 中作者把统计收敛的概念拓展到拓扑群里; 局部凸空间 [52], [132], 模糊数学 [7] − [9], [12], [14], [48], [51], [53], [75], [76], [78], [82]−[84], [100], [101], [108], [109], [116], [124], [125] ; 及构造各种新的拓扑线性空间 [11], [20], [21], [30], [50], [60], [97], [99], [110], [111], [113], [115], [119], [127].

出于不同的目的, 又出现了许多其他形式的统计收敛, 例如 A 统计收敛 [2], [3], [33], [34], [44], [57], [74] , $lancunary$ 统计收敛 [26], [27], [29], [61], [63], [64], [82], [83], [85], [106], [112], [130], 双序列统计收敛 [28], [31], [89], [90], [96], [106], [108], [110], [133], λ- 统计收敛 [51], [98], [134] , 强 λ- 统计收敛 [117], 粗统计收敛 [6] , 强 (几乎) 统计收敛 [60] , 一致统计收敛 [10], [67], [103], [104], [105] , μ- 稠密收敛 [19], [41] 及其它 [13], [15], [16], [29], [30], [54], [60], [61], [80], [94], [114], [117], [118], [120], [121], [122], [129].

毫无疑问, 建立测度理论已经成为核心问题, 因为一种合理的理论不仅是把各种统计收敛统一起来的原则, 而且是统计收敛通向测度理论, 积分理论, 概率论和数理统计的桥梁。建立测度理论的难度在自然数 N 的所有子集

A 中满足 $\lim_n \frac{A_n^\sharp}{n}$ 存在的子集，即不是一个 σ 代数又对有限交运算不封闭。最近，程立新等在文 [25] 中，巧妙地把统计收敛转化成定义在 l^∞/c_0 上的商范数在 $e=(1,1,\cdots)$ 处的次微分所对应的测度的收敛，使得各种各样的统计收敛在理论上完美地统一在按测度收敛的框架之下．本文在此理论的基础上，进一步验证各种统计收敛都对应一类统计收敛的按测度收敛．接下来我们回顾一下有限可加测度的表示理论 (参见 [25]).

字母 N,Z,Q,R 分别表示自然数集，整数集，有理数集和实数集，我们用 $\mathscr{A}=2^N$ 表示自然数集 N 的所有子集生成的 σ 代数．对于一个集合 A,χ_A 表示 A 的特征函数，即若 $x\in A,\chi_A(x)=1$；其它， $\chi_A(x)=0$. 记 $\mathscr{D}$ 表示 l^∞ 子集合 $\{0,1\}^N$. $\pi:\mathscr{A}\to\mathscr{D}$ 的映射定义为 $\pi(A)=(\chi_A(i))_{i=1}^\infty$, 也记 $x_A=(\chi_A(i))_{i=1}^\infty\in\mathscr{D}$; $e=(1,1,\cdots)$; e_i 为 l^1 或 l^∞ 的标准单位向量.

定义 1.1.1 设 μ 为定义在 $\mathscr{A}$ 上的实 (复) 值的函数，则

i) 称它为 N 上有限可加测度, 如果满足 $\mu(\phi)=0$, 且对 $\forall A,B\in\mathscr{A},A\cap B=\phi$, 有 $\mu(A\cap B)=\mu(A)+\mu(B)$.

ii) 一有限可加测度 μ 称为有限的，如果它的全变差是有界的.

iii) 一非负有限可加测度 μ 称为一有限可加的概率测度, 如果 $\mu(N)=1$.

我们记 $\mathscr{F}$ 为 N 上所有有限可加的有限测度.

定义 1.1.2

N 上一有限可加的概率测度 μ 称为统计测度, 如果对任意的单点 $\{k\}\subset N$, 有 $\mu\{k\}=0$.

我们记 $\mathscr{T}$ 为 N 上所有统计型测度．由上面的定义，容易有

性质 1.1.3 设 μ 为统计测度，则

i) 对任意的有限集 $A\in\mathscr{A},\mu(A)=0$.

ii) μ 是完备的，即若 $A,B\in\mathscr{A},A\subset B,\mu(B)=0$, 则 $\mu(A)=0$.

定义 1.1.4 设 f 为定义于 $Banach$ 空间 X 上的连续凸函数，f 在 $x\in X$ 的次微分映射定义为

$$\partial f(x)=\{x^*\in X^*:f(x+y)-f(x)\geq\langle x^*,y\rangle,\forall y\in X\}.$$

下面为两个经典的结论.

性质 1.1.5 设 f 为定义于 $Banach$ 空间 X 上的连续凸函数. 则它的次微分映射 $\partial f(x)$ 为非空 ω^*- 紧凸集且在 X 上任意点是范 $-\omega^*$ 上半连续.

性质 1.1.6 设 p 为定义于 $Banach$ 空间 X 上的 $Minkowski$ 泛函, $C^* = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x\rangle \le p(x), \forall x \in X\}$. 给定 $x \in X$, 则 $x^* \in \partial p(x)$ 当且仅当 $x^* \in C^*$, 且 $\langle x^*, x\rangle = p(x)$.

性质 1.1.7(Hahn-Banach 定理) 设 X 为实向量空间, $p : X \to R$ 为次线性泛函, $M \subset X$ 为子空间, $f : X \to R$ 为线性泛函, 且 M 上 $f \le p$, 则 $\exists \Lambda : X \to R$ 为线性泛函, 满足在 X 上 $\Lambda \le p$ 且 $\Lambda|_M = f$.

设 $\mathscr{D} = \partial\|e\|$, 这里 $\|\cdot\|$ 表示 l^∞ 上的自然范数, $\partial\|\cdot\|$ 为它的次微分映射. 设 B^* 为 $l^{\infty *}$ 的闭单位球.

引理 1.1.8 由上面的定义, 我们有

i) $B^* = co(\mathscr{D} \cup -\mathscr{D})$;

ii) $\|x^*\| = sup_{x\in\{-1,1\}^N} |\langle x^*, x\rangle|, \quad x^* \in l^{\infty *}$.

定理 1.1.9 设 μ 为 N 上取实值有限可加的有限测度, 则存在 $x^*_\mu \in l^{\infty *}$ 使得

i)$\|x^*_\mu\| = |\mu|$;

ii)$\langle x^*_\mu, x_A\rangle = \mu(A), \quad A \in \mathscr{A}$.

定理 1.1.10 对 $\forall x^* \in l^{\infty *}, x^* \circ \pi \equiv \mu$ 定义了 N 上一有限可加的有限测度 μ 且满足 $|\mu| = \|x^*\|$.

推论 1.1.11 所有取实值的有限可加的有限测度空间 $\mathscr{F}$ 赋予全变差范数等距同构于 $l^{\infty *}$.

推论 1.1.12

i) 所有取实值的统计型测度空间 $\mathscr{T}$ 赋予全变差范数等距同构于 $(l^\infty/c_0)^* = c_0^\perp$;

ii) 所有取实值的可数可加的有限测度空间 $\mathscr{C}$ 赋予全变差范数等距同构于 l^1.

我们知道统计测度 μ 恰好为有限可加的概率测度且满足对所有的单点集

$\{k\}, \mu\{k\} = 0$. 设 $q : l^{\infty} \to R$ 的半范数定义为：

$$q(x) = lim_n sup \mid x(n) \mid, \quad x \in l^{\infty}$$

再设 $\mathscr{D}_q = \partial q(e)$, 则我们有：

定理 1.1.13

i)N 上所有有限可加的概率测度 $\mathscr{P}$ 等距同构于 $\mathscr{D} \equiv \partial\|e\|$;

ii)N 上所有统计测度 $\mathscr{I}$ 等距同构于 $\mathscr{D}_q = \partial q(e)$, 且 $\mathscr{I} = \mathscr{D}_q \circ \pi$.

本文的主要目的是利用统计测度刻画各种统计收敛。作为其应用，对一些与统计收敛类似的相关概念也进行了刻画。证明了各类型的统计收敛恰好相应于具体的统计测度类下的一个测度收敛。

全文共分为三章：

第一章，引言。回顾统计收敛的发展及其它在各数学分支上的应用以及相关的基本概念和性质定理等。

第二章，验证各种统计收敛都可以统一在按统计测度收敛的框架之下。证明了各类型的统计收敛恰好相应于具体的统计测度类的一个测度收敛。

第三章，复合统计收敛的测度表示。给出滑动平均型和可加型的统计收敛的定义，并给予相应的测度刻画。

第二章　各种统计收敛的测度表示

§2.1　经典统计收敛

$Banach$ 空间 X 中的一序列 $\{x_k\}$ 称为统计收敛于 $x \in X$, 如果对 $\forall \varepsilon > 0, lim_{n\to\infty}\frac{A_n^\sharp(\varepsilon)}{n} = 0$ ，这里 $A_n(\varepsilon) = \{k \in N :\| x_k - x \| > \varepsilon, k \le n\}$. 为了描述原始统计收敛的测度理论，我们先介绍一经典统计测度。

定义 2.1.1 设 μ 为 N 上一有限可加的概率测度。则它称之为经典统计测度，如果对所有 $A \in \mathscr{A}$ 使得 $lim_{n\to\infty}\frac{A_n^\sharp}{n}$ 存在， $\mu(A) = lim_{n\to\infty}\frac{A_n^\sharp}{n}$.

记 $\mathscr{K}$ 为 N 上所有经典统计测度集合. 在我们表达 $\mathscr{K}$ 的表示理论之前，我们先定义另一个半范数 $p : l^\infty \to R^+$ 如下：

$$p(x) = lim_n sup\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}|x(i)|, x \in l^\infty$$

记 $\mathscr{D}_p = \partial p(e)$.

定理 2.1.1 $\mathscr{K} = \mathscr{D}_p \circ \pi = \{x^* \circ \pi : x^* \in \partial p(e)\}$.

证明：由于在 l^∞ 上 $p \le q$ 及 $p(e) = q(e) = 1$ ，对 $\forall x^* \in \partial p(e), x^*(x) \le p(x) \le q(x)$ 且 $\langle x^*, e\rangle = p(e) = q(e)$, 有 $\mathscr{D}_p \subset \mathscr{D}_q$. 注意到, 对任意的 $\mu \in \mathscr{K}$ ，由定理 1.1.13 ，存在 $x^* \in \mathscr{D}_q \equiv \partial q(e)$ 使得

$$\langle x^*, x_A\rangle \equiv \langle x^*, \pi(A)\rangle = \mu(A), \forall A \in \mathscr{A}$$

$\mu(A) = \lim_{n\to\infty}\frac{A_n^\sharp}{n}$, 当 $\lim_{n\to\infty}\frac{A_n^\sharp}{n}$ 存在，有

$$\langle x^*, x_A\rangle = \mu(A) \le p(x_A), \forall A \in \mathscr{A}$$

因此

$$\langle x^*, x\rangle \le p(x), \forall x \in span\{0,1\}^N = spanD$$

由 Hahn-Banach 定理， $x^* |_{spanD}$ 从 $spanD$ 延拓到 l^∞ ，满足

$$\langle x^*, x\rangle \le p(x), \forall x \in l^\infty$$

因此

$$x^* \in \partial p(e)$$

所以有 $\mathscr{K} \in \mathscr{D}_p \circ \pi$. 为证明其相反方向，设 $x^* \in \mathscr{D}_p$，我们要证明 $\langle x^*, x_A \rangle = \lim_{n\to\infty} \frac{A_n^\sharp}{n}$，当 $A \in \mathscr{A}$ 和 $\lim_{n\to\infty} \frac{A_n^\sharp}{n} \equiv a$ 存在. 但只须注意

$$a = p(x_A) \geq \langle x^*, x_A \rangle = 1 - \langle x^*, x_{N\setminus A} \rangle \geq 1 - p(x_{N\setminus A}) = 1 - (1-a) = a \geq 0$$

§2.2 lacunary 统计收敛和 λ- 统计收敛

定义 2.2.1 一个递增序列 $\{n_k\}$，其中 $n_0 = 0$，称为 $lacunary$ 统计收敛于 x，如果 $\forall \varepsilon > 0$，

$$\lim_{k\to\infty} \triangle_k^{-1} \{j \in (n_{k-1}, n_k] : \| x_j - x \| \geq \varepsilon\}^\sharp = 0$$

其中 $\triangle_k = n_k - n_{k-1}, k \in N$. 我们设

$$p_A(x) = \lim_k sup \frac{1}{\triangle_k} \sum_{j\in(n_{k-1},n_k]} |x(j)|, x \in l^\infty$$

定理 2.2.1 序列 $\{x_n\}$ $lacunary$ 统计收敛于 x, 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\mu \in \mathscr{I}_A = \partial p_A \circ \pi$, 有 $\mu(A(\varepsilon)) = 0$.

证明：

$$p_A(x) = \lim_k sup \frac{1}{\triangle_k} \sum_{j\in(n_{k-1},n_k]} |x(j)| \leq q(x) = \lim_n sup |x(n)|$$

且 $p(e) = q(e) = 1$, 因此 $p_A(e) \subset q(e), \mathscr{I}_A \subset \mathscr{I}$. 假设 $\{x_j\}$ $lacunary$ 统计收敛于 x，即

$$0 = \lim_{k\to\infty} \triangle_k^{-1} \{j \in (n_{k-1}, n_k] : \| x_j - x \| \geq \varepsilon\}^\sharp = p_A(x_{A(\varepsilon)})$$

因此对 $\forall \mu = x^* \circ \pi \in \mathscr{I}_A$, 有

$$0 \leq \mu(A(\varepsilon)) = \langle x^*, \pi(A(\varepsilon)) \rangle \leq p_A(x_{A(\varepsilon)}) = 0$$

因此

$$\mu(A(\varepsilon)) = 0$$

反之，对 $\forall\varepsilon > 0$ ，选取单调递增的序列 $\{k_i\} \subset N$ ，满足

$$a = p_A(x_{A(\varepsilon)}) = \lim_k sup \frac{1}{\triangle_k} \sum_{j\in(n_{k-1},n_k]} |\chi_{A(\varepsilon)}(j)| = \lim_i \frac{1}{\triangle_{k_i}} \sum_{j\in(n_{k_i-1},n_{k_i}]} |\chi_{A(\varepsilon)}(j)|$$

令 $p : l^\infty \to R^+$ ，

$$p(x) = \lim_i sup \frac{1}{\triangle_{k_i}} \sum_{j\in(n_{k_i-1},n_{k_i}]} |x(j)|$$

则在 l^∞ 上有 $p \le p_A, p(e) = p_A(e) = 1$, 因此 $\partial p(e) \subset \partial p_A(e) \subset \partial q(e)$ 对于 $\forall x^* \in \partial p(e)$, 有

$$\langle x^*, x_{A(\varepsilon)}\rangle \le p(x_{A(\varepsilon)}) = a$$

$$\langle x^*, x_{N\setminus A(\varepsilon)}\rangle \le p(x_{N\setminus A(\varepsilon)}) = 1 - a$$

因为 $\langle x^*, x_{A(\varepsilon)}\rangle + \langle x^*, x_{N\setminus A(\varepsilon)}\rangle = 1$, 所以

$$p(x_{A(\varepsilon)}) = a = \langle x^*, x_{A(\varepsilon)}\rangle$$

对 $\forall\mu = x^* \circ \pi \in \mathscr{I}_A, \mu(A(\varepsilon)) = 0$. 因此有 $p(x_{A(\varepsilon)}) = p_A(x_{A(\varepsilon)}) = 0$. 所以序列 $\{x_n\}$ *lacunary* 统计收敛于 x.

设 λ_n 为一非减的正整数序列，我们记 $\lambda = \{\lambda_n\}$ ，这里对所有的 $n \in N, \lambda_1 = 1, \lambda_{n+1} \le \lambda_n + 1$.

定义 2.2.2 序列 x_n 称为 $\lambda-$ 统计收敛于 x ，如果对 $\forall\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n^{-1}\{k \in (n - \lambda_n, n] : \|x_k - x\| \ge \varepsilon\}^\sharp = 0$$

我们设

$$p_\lambda(x) = \lim_k sup \frac{1}{\lambda_k} \sum_{j\in(k-\lambda_k,k]} |\, x(j)\,|, x \in l^\infty$$

容易得到

$$p_\lambda(x) \le q(x), x \in l^\infty, p_\lambda(e) = q(e) = 1$$

用相似的方法我们可证得：

定理 2.2.2 序列 x_n 称为 $\lambda-$ 统计收敛于 x 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$ 和 $\mu \in \mathscr{I}_\lambda$，有 $\mu(A(\varepsilon)) = 0$. 其中 $\mathscr{I}_\lambda = \partial p_\lambda(e) \circ \pi$.

§2.3 强统计收敛和强 λ- 统计收敛

定义 2.3.1 称序列 $\{x_n\}$ 强统计收敛于 x，如果对 $\forall \varepsilon > 0$，对 m 一致有

$$\lim_n \frac{1}{n}\{k \le n : \| x_{k+m} - x \| > \varepsilon\}^\sharp = 0$$

定理 2.3.1 序列 $\{x_n\}$ 强统计收敛于 x, 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$,$\mu \in \mathscr{I}_A$,$\mu(A(\varepsilon)) = 0$ 其中

$$p_A(x) = \lim_n sup sup_{m \in N} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n+m} \mid x(k) \mid$$

$$A(\varepsilon) = \{k \in N : \| x_k - x \| > \varepsilon\}$$

证明： $\lim_n \frac{1}{n}\{k \le n : \| x_{k+m} - x \| > \varepsilon\}^\sharp = \lim_n \frac{1}{n}\{m+1 \le k \le n+m : \| x_k - x \| > \varepsilon\}^\sharp$, $p_A(x) \le q(x) = \lim_n sup \mid x(n) \mid$, $p_A(e) = q(e) = 1, \partial p_A(e) \subset \partial q(e)$, 因为 $\{x_n\}$ 强统计收敛于 x，有 $0 = \lim_n \frac{1}{n} sup_m\{k \le n : \| x_{k+m} - x \| > \varepsilon\}^\sharp = p_A(x_{A(\varepsilon)})$, 对 $\forall \mu \in \mathscr{I}_A \subset \mathscr{I}$,$0 \le \mu(A(\varepsilon)) \le p_A(x_{A(\varepsilon)}) = 0$, 因此 $\mu(A(\varepsilon)) = 0$.

反之，对 $\forall \varepsilon, \forall m$，选取单调递增的序列 $\{n_i\}, \{m_l\} \subset N$，满足

$$a = p_A(x_{A(\varepsilon)}) = \lim_n sup sup_{m \in N} \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n+m} \mid \chi_{A(\varepsilon)}(k) \mid = \lim_{i,l} \frac{1}{n_i} \sum_{k=m_l+1}^{n_i+m_l} \mid \chi_{A(\varepsilon)}(k) \mid$$

令 $p : l^\infty \to R^+$,

$$p(x) = \lim_i sup \lim_l \frac{1}{n_i} \sum_{j=m_l+1}^{n_i+m_l} \mid x(k) \mid$$

则在 l^∞ 上有 $p \le p_A, p(e) = p_A(e) = 1$, 因此 $\partial p(e) \subset \partial p_A(e) \subset \partial q(e)$ 对任意的 $x^* \in \partial p(e)$, 有

$$\langle x^*, x_{A(\varepsilon)} \rangle \le p(x_{A(\varepsilon)}) = a$$

$$\langle x^*, x_{N\setminus A(\varepsilon)}\rangle \leq p(x_{N\setminus A(\varepsilon)}) = 1 - a$$

因此

$$p(x_{A(\varepsilon)}) = a = \langle x^*, x_{A(\varepsilon)}\rangle$$

对任意的 $\mu = x^* \circ \pi \in \mathscr{I}_A$, 有 $\mu(A(\varepsilon)) = 0$ ，因此

$$p(x_{A(\varepsilon)}) = p_A(x_{A(\varepsilon)}) = 0$$

因此 $\{x_n\}$ 强统计收敛于 x 。

定义 2.3.2 序列 $\{x_n\}$ 强 $\lambda-$ 统计收敛于 x ，如果对 $\forall\varepsilon > 0$ ，对 m 一致有

$$\lim_n \frac{1}{\lambda_n}\{k \in (n-\lambda_n, n] : \| x_{k+m} - x \| > \varepsilon\}^\sharp = 0$$

可以类似地证明：

定理 2.3.2 序列 $\{x_n\}$ 强 $\lambda-$ 统计收敛于 x, 当且仅当对任意的 $\varepsilon > 0$, $\mu \in \mathscr{I}_\lambda$, $\mu(A(\varepsilon)) = 0$. 令 $p_\lambda(x) = \lim_n supsup_m \frac{1}{\lambda_n}\sum_{i\in(n-\lambda_n+m, n+m]} \mid x(i) \mid$, $A(\varepsilon)$ 如上.