学校编号: 10384　　分类号 ________ 密级 ________
学　　号: 17020051301602　　UDC ______

厦门大学

硕 士 学 位 论 文

齐型空间上奇异积分算子极大交换子和分数次积分算子交换子的加权有界性

The weighted estimates for the maximal commutator of singular integral operator and commutator of fractional integral operator on spaces of homogeneous type

王 卫 红

指导教师姓名: 伍 火 熊 教授
专 业 名 称: 基 础 数 学

论文提交日期: 2008 年 4 月
论文答辩日期: 2008 年 5 月
学位授予日期: 2008 年 * 月

答辩委员会主席: ____________
评　　阅　　人: ____________

2008 年 4 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果. 本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明. 本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任.

责任人（签名）:

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定. 厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版, 有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅, 有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索, 有权将学位论文的标题和摘要汇编出版. 保密的学位论文在解密后适用本规定.

本学位论文属于

1、保密（）在　　　年解密后适用本授权书.

2、不保密（）.

（请在以上相应括号内打"√"）

作者签名:　　　　　　日期:　　　年　月　日

导师签名:　　　　　　日期:　　　年　月　日

目　　录

Contents

齐型空间上奇异积分算子极大交换子和分数次积分算子交换子的加权有界性

中文摘要

齐型空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是指集合 $\mathcal{X}$ 上赋予一个拟度量 d 和一个非负、正则 Borel 测度 μ. 并且 μ 满足双倍性条件，即存在常数 $C \geq 1$ 使得对任意的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$,

$$\mu\big(B(x, 2r)\big) \leq C\mu\big(B(x, r)\big) < \infty,$$

$B(x, r) = \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$ 是以 x 为中心、 r 为半径的球.

本文围绕齐型空间上两类算子与 BMO 函数的交换子的有界性及相关性质展开，研究了奇异积分算子的极大交换子的加权 L^p 估计，建立了分数次积分算子的交换子的加权端点估计式，并给出了此交换子的一个双权、弱型估计. 全文分为以下两个部分：

第一部分的主要工作是，在奇异积分算子的核函数满足大小条件和光滑性条件的情况下，对任意的权函数，在齐型空间上建立相应的奇异积分算子与 BMO 函数的极大交换子的加权 L^p 估计.

第二部分的主要工作是，证明了关于分数次积分算子与 BMO 函数的交换子的加权弱型端点估计，并运用此估计式得到该交换子的双权弱型估计.

关键词：齐型空间，奇异积分，分数次积分，极大算子，交换子，BMO 函数，权，加权不等式，加权弱型不等式.

THE WEIGHTED ESTIMATES FOR THE MAXIMAL COMMUTATOR OF SINGULAR INTEGRAL OPERATOR AND COMMUTATOR OF FRACTIONAL INTEGRAL OPERATOR ON SPACES OF HOMOGENEOUS TYPE

ABSTRACT

The triple $(\mathcal{X}, d, \mu)$ is said to be a space of homogeneous type, if $\mathcal{X}$ is a set endowed with a quasi-metric d and a positive Borel regular measure μ. Moreover, μ satisfies the following doubling condition: there exists a constant $C \geq 1$ such that for all $x \in \mathcal{X}$ and $r > 0$,

$$\mu\big(B(x, 2r)\big) \leq C\mu\big(B(x, r)\big) < \infty,$$

where $B(x, r) = \{y \in \mathcal{X} : d(x, y) < r\}$ is the ball centered at x and having radius r.

This dissertation is devoted to the study of the behaviours of two kinds of commutators. A weighted L^p estimate for the maximal commutator of singular integral operator is obtained. It is also given a weighted weak type norm inequality for commutator of fractional integral operator, then there is the application of this estimate. It consists of two chapters.

The first chapter deals with $L^p(\mathcal{X})$-boundedness with general weights for the maximal operator associated with the commutator generated by singular integral operator and BMO function on spaces of homogeneous type.

The second chapter is concerning with an endpoint estimate with general weights for the operator associated with the commutator generated by fractional integral operator and BMO function on spaces of homogeneous type. As an application, a two-weight, weak type norm inequality for this commutator is established.

Keywords. spaces of homogeneous type, singular integral, fractional integral operator, maximal operator, commutator, BMO function, weight, weighted norm inequality, weighted weak type estimate.

第 0 章 序言与预备知识

§ 0.1 序言

分析中的许多重要问题最终都归结为算子在函数空间上的性质，因此，研究算子在函数空间上的性质，一直是调和分析、偏微分方程、泛函分析、多复变函数等诸多领域共同关注的问题. 从二十世纪五十年代 Calderón 和 Zygmund 创立第一代 Calderón-Zygmund 奇异积分算子到今天，奇异积分算子理论已经成为一个非常广泛的研究领域. 1971 年， Coifman 和 Weiss[7] 提出要在更一般的空间上研究奇异积分算子，也就是后来所谓的 Coifman-Weiss 意义下的齐型空间. 此空间是在一个集合上装备了拟度量和双倍测度，是比欧氏空间更广泛的空间，同时欧氏空间又是最典型、最常用的齐型空间. 欧氏空间上的 Lipschitz 曲线与曲面、Riemann 流形及 Heisenberg 群在赋予适当的测度与度量后都是齐型空间. 由于齐型空间上没有平移与展缩的群结构，所以其上的调和分析需要有不同于欧氏空间的方法与技巧.

由齐型空间上著名的 Calderón-Zygmund 理论（见[7]），我们知道：若 Calderón-Zygmund 奇异积分算子的核函数满足 Hörmander 光滑性条件，则对任意的 $p \in (1, \infty)$ ，此算子是 $L^p(\mathcal{X})$ 上的有界算子且是 $L^1(\mathcal{X})$ 到 $L^{1,\infty}(\mathcal{X})$ 有界的. Pradolini 和 Salinas [25] 建立了标准的 Calderón-Zygmund 奇异积分算子（即其核函数满足标准的 Hölder 光滑性条件），关于任意权的加权有界性（被 Hardy-Littlewood 极大算子的迭代所控制）.

另一方面，齐型空间上分数次积分算子 I_α 的有界性，也有许多重要结果. 例

如文 [4] 证明了对 $1 < p < q < \infty$ 和 $1/q = 1/p - \alpha$，算子 I_α 是 $L^p(\mathcal{X})$ 到 $L^q(\mathcal{X})$ 有界的，文 [5] 给出它是弱 $(1,(1-\alpha)^{-1})$ 型的. 随后， Bernardis 等人在文 [3] 建立了此算子关于任意权的加权不等式， Martell [18] 给出了此算子的一个双权、弱型估计.

由于奇异积分算子与 BMO 函数的交换子，在偏微分方程补偿紧理论中有着重要的应用，因此，关于这类算子在函数空间上的性质得到了广泛的研究. 一方面该交换子与奇异积分算子密切相关，另一方面其性质又与奇异积分算子的性质有本质不同，例如交换子的弱 $(1,1)$ 有界性是不成立的. Coifman, Rochberg 和 Weiss[8] 建立了欧式空间中奇异积分的交换子的 L^p 有界性和在加 A_p 权的 L^p 空间中的有界性. Pérez 和 Pradolini [23] 则建立了该交换子的加权弱端点估计. 由分数次积分算子与 BMO 函数产生的交换子 $I_{\alpha,b}$ 是 Chanillo 在文 [6] 引进的， Chanillo 同时证明了，在欧氏空间 R^n 中算子 $I_{\alpha,b}$ 的 $(L^p, L^q)(p > 1, 1/q = 1/p - \alpha/n)$ 有界性. Cruz-Uribe, SFO 和 Fioenza[10] 得到了该算子的端点估计，也说明了 $I_{\alpha,b}$ 不是 $(L^1, L^{n/(n-\alpha),\infty})$ 有界的.

本文继续了上述问题的研究，讨论了当奇异积分算子的核函数满足大小条件和光滑性条件时，其相应的极大交换子的加任意权的 L^p 有界性，以及分数次积分算子的交换子关于任意权的弱 $(1,1)$ 有界性，作为应用，进一步得到此交换子的一个双权弱型估计.

§ 0.2 预备知识

本节我们将给出一些必要的定义和说明. C 表示和主要参数无关的正常数，但在不同地方其值可能不一样. 带下标的常数如 C_1，它的值在所有的地方都相

同. 权函数 w 是指一个非负、局部可积函数. M 是标准的 Hardy-Littlewood 极大算子

$$Mf(x) = \sup_{B \ni x} \frac{1}{\mu(B)} \int_B |f(y)|\, d\mu(y).$$

对任意正整数 k, M^k 表示 M 迭代 k 次. 对任意的数 p, $[p]$ 表示不超过 p 的最大整数. 对可测集 E 和权函数 w, $\chi_{_E}$ 表示集合 E 的特征函数, $w(E) = \int_E w(x)\, \mathrm{d}\mu(x)$. 给定 $\lambda > 0$ 和球 B, $r_{_B}$ 表示球 B 的半径, λB 表示与球 B 同中心的球, 且其半径是球 B 半径的 λ 倍. 对任意的 $p \in [1, \infty)$, p' 表示 p 的共轭指标, 即有 $1/p + 1/p' = 1$. 对 $\mathcal{X}$ 上的局部可积函数 f 和有界可测集 E, $m_E(f)$ 表示 f 在 E 上的均值, 即

$$m_E(f) = \frac{1}{\mu(E)} \int_E f(x)\, d\mu(x).$$

我们用符号 $L_0^\infty(\mathcal{X})$ 表示具有有界支集的有界函数.

§0.2.1 齐型空间的定义及基本性质

齐型空间 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是指集合 $\mathcal{X}$ 上赋予一个拟度量 d, 以及一个非负、正则 Borel 测度 μ, 其中 d 是 $\mathcal{X} \times \mathcal{X} \to [0, \infty)$ 的函数, 且满足

(i) $d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$;

(ii) 对 $x, y \in \mathcal{X}$, $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) 存在常数 $\kappa \geq 1$, 使得对于所有的 $x, y, z \in \mathcal{X}$ 成立

$$d(x, y) \leq \kappa [d(x, z) + d(y, z)]. \tag{0.1}$$

如果测度 μ 还满足双倍性条件，即存在常数 $C \geq 1$ 使得对任意的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$,

$$\mu\big(B(x,2r)\big) \leq C\mu\big(B(x,r)\big) < \infty, \tag{0.2}$$

其中 $B(x,r) = \{y \in \mathcal{X} : d(x,y) < r\}$ 是以 x 为中心、 r 为半径的球，则称 $(\mathcal{X}, d, \mu)$ 是 Coifman-Weiss[7] 意义下的齐型空间.

若 C_μ 是使得测度 μ 满足双倍条件 (0.2) 的最小常数，则称 $D = \log_2 C_\mu$ 为测度 μ 的双倍次数且有下式成立

$$\frac{\mu(B_1)}{\mu(B_2)} \leq C_\mu\Big(\frac{r_{B_1}}{r_{B_2}}\Big)^D, \quad \text{对任意的球} B_2 \subset B_1 \subset \mathcal{X}, \tag{0.3}$$

其中 r_{B_i}（ $i = 1, 2$ ）分别表示球 B_i 的半径. 特别的，对任意的 $\lambda \geq 1$, $r > 0$ 和 $x \in \mathcal{X}$,

$$\mu(B(x,\lambda r)) \leq C\lambda^D \mu(B(x,r)). \tag{0.4}$$

此外，还存在常数 $C \geq 1$ 和 $N \in [0, D]$, 使得对所有的 $x, y \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$, 有

$$\mu(B(y,r)) \leq C\Big(1 + \frac{d(x,y)}{r}\Big)^N \mu(B(x,r)). \tag{0.5}$$

由拟度量 d 定义的所有球构成的集族满足 $\mathcal{X}$ 领域中的完备性公理，从而决定了 $\mathcal{X}$ 的一个（可分）拓扑，但对任意的 $x \in \mathcal{X}$ 和 $r > 0$, 球 $B(x, r)$ 关于此拓扑未必是开集. Macias 和 Segovia [17] 的一个著名结果表明：存在与 d 等价的连续拟度量 η 和 $0 < \theta < 1$, 使得对任意的 $x, x', y \in \mathcal{X}$, 有

$$|\eta(x,y) - \eta(x',y)| \leq C\eta(x,x')^\theta (\eta(x,y) + \eta(x',y))^{1-\theta}. \tag{0.6}$$

其中 d 与 η 等价是指, 存在正常数 C 使得对所有的 $x,y\in\mathcal{X}$, 有 $C^{-1}d(x,y)\le\eta d(x,y)\le Cd(x,y)$. 而且在由 η 诱导的拓扑中，球关于 ηd 总是开集. 因此在本文中，始终假定拟度量 d 是连续的且 $\mathcal{X}$ 中的球均为开集.

§0.2.2 Orlicz 空间及基本性质

函数 $\Phi:[0,\infty)\to[0,\infty)$ 被称作 Young 函数, 若 Φ 是连续、递增的凸函数, 且满足 $\Phi(0)=0,\Phi(t)\to\infty\ (t\to\infty)$. 易知 $\Phi(t)/t$ 是递增的. 称 Young 函数 Φ 是双倍的，若存在正常数 C, 使得对所有的 $t\ge 0$, 有 $\Phi(2t)\le C\Phi(t)$. 对有界可测集 E 和适当的函数 f, 定义 f 在 E 上的 Luxemburg 模为

$$\|f\|_{\Phi,E}=\inf\left\{\lambda>0:\frac{1}{\mu(E)}\int_E\Phi\left(\frac{|f(x)|}{\lambda}\right)\mathrm{d}\mu(x)\le 1\right\}.$$

每一个 Young 函数 Φ 均有相应的补函数 $\widetilde{\Phi}$, 满足对任意 $t>0$,

$$t\le\Phi^{-1}(t)\widetilde{\Phi}^{-1}(t)\le 2t.$$

成立如下的广义 Hölder 不等式（见 [26] ）：对任意合适的函数 f,g 和有界可测集 E, 有

$$\frac{1}{\mu(E)}\int_E|f(x)g(x)|\,d\mu(x)\le\|f\|_{\Phi,E}\|g\|_{\widetilde{\Phi},E}.$$

本文中我们取 $\Phi(t)=t\log(\mathrm{e}+t)$, 其补函数为 $\widetilde{\Phi}(t)\approx e^t-t-1$. 记

$$\|f\|_{L\log L,\,B}=\|f\|_{\Phi,\,B},\qquad \|f\|_{\exp L,B}=\|f\|_{\tilde{\Phi},\,B}.$$

更进一步地, 文 [19] 给出: 设 Φ,Ψ 和 Θ 均为 Young 函数且满足对任意 $t>0$, $\Psi^{-1}(t)\ \Theta^{-1}(t)\le\Phi^{-1}(t)$, 则对任意合适的函数 f,g 和有界可测集 E,

$$\|fg\|_{\Phi,E}\le C\|f\|_{\Psi,E}\|g\|_{\Theta,E}.\tag{0.7}$$