学校编号：10384　　　　分类号：________密级：________
学　　号：17020051403000　　　　UDC：________________

厦门大学

博　士　学　位　论　文

不可约 Brauer 特征标次数仅有 1 和素数 q 的有限群

Groups whose irreducible Brauer characters have degrees 1 or q

王　慧　群

指导教师姓名：曾　吉　文 教授

专 业 名 称：基　础　数　学

论文提交日期：2008　年　5　月

论文答辩日期：2008　年　　月

学位授予日期：2008　年　　月

答辩委员会主席：________

评　　阅　　人：________

2008 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

兹呈交的学位论文，是本人在导师指导下独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考的其它个人或集体的研究成果，均在文中以明确方式标明。本人依法享有和承担由此论文而产生的权利和责任。

责任人（签名）：

年　月　日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人完全了解厦门大学有关保留、使用学位论文的规定。厦门大学有权保留并向国家主管部门或其指定机构送交论文的纸质版和电子版，有权将学位论文用于非赢利目的的少量复制并允许论文进入学校图书馆被查阅，有权将学位论文的内容编入有关数据库进行检索，有权将学位论文的标题和摘要汇编出版。保密的学位论文在解密后适用本规定。

本学位论文属于

1、保密（　），在　　　年解密后适用本授权书。

2、不保密（　）。

（请在以上相应括号内打”√”）

作者签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

导师签名：　　　　　　日期：　　年　月　日

目　　录

Contents

摘　要

有限群表示论是研究有限群的有力工具之一，利用有限群的不可约特征标次数集合或者不可约 Brauer 特征标次数集合来刻画有限群的结构，已经产生了许多有重要意义和激动人心的结果．本学位论文的主要结论如下：

设 p, q 是两个素数， G 是 p - 可解群．本文证明了如果 G 的不可约 Brauer 特征标次数集合 $\mathrm{cd}_p(G)$ 含于集合 $\{1, q\}$, 那么 G 的 p - 长不超过 4. 并且对不可约 Brauer 特征标次数集合分 $\mathrm{cd}_p(G) = \{1\}, \mathrm{cd}_p(G) = \{1, q(\neq p)\}$ 以及 $\mathrm{cd}_p(G) = \{1, p\}$ 三种情况给出了进一步的刻画；另外还讨论了半直积的自同构问题和非交换单群 3-次不可约 Brauer 特征标的零点问题.

本学位论文全文分为如下五部分：

引言部分介绍了与本论文有关的研究发展状况，并且较全面地阐述了论文的工作背景和思路.

第一章分三节给出了和论文有关的基本概念，主要定理以及将要使用的符号和术语，为后面奠定了必要的理论基础.

第二章分三节,主要讨论了互素条件下半直积同构分类及其应用,以及和 $\mathrm{GL}(3, 2)$ 相联系的两个反例.

第三章分五节，详细讨论了满足条件 $\mathrm{cd}_p(G) \subseteq \{1, q\}$ 的 p- 可解群的结构，以及关于非交换单群的 3- 次不可约 Brauer 特征标的一个零点性质.

后记部分，对主要定理的条件作了进一步的分析.

关键词：特征标； Brauer 特征标；群作用； p - 长；半直积.

Abstract

The representation theory of finite groups is one of the powerful tools to study finite groups. And there are many meaningful and exiciting results by investigating the sets of irreducible characters or irreducible Brauer characters to characterize finite groups. The main contents of this paper are as follows.

Let p, q be two primes, and G be a p-solvable group. If $\mathrm{cd}_p(G)$, the set of the irreducible Brauer characters of G, is contained in $\{1, q\}$, then the p-length of G is no more than 4. And we give further characterizations when $\mathrm{cd}_p(G) = \{1\}$, $\mathrm{cd}_p(G) = \{1, q(\neq p)\}$ and $\mathrm{cd}_p(G) = \{1, p\}$. In addition, this paper researches automorphic problems of semidirect products and zero problems of 3-degree irreducible Brauer characters of nonabelian simple groups.

This paper contains five parts.

Firstly, we introduce some related works of this paper and demonstrate the working backgrounds and minds of this paper thoroughly.

In Chapter one, we give basic concepts, main theorems, as well as notations and terminology used in this paper.

In Chapter two, we mainly discuss isomorphic classifications of semiproducts under the coprime condition and applications, also we give two counterexamples related to $\mathrm{GL}(3, 2)$.

In Chapter three, we discuss the structures of p-solvable groups with $\mathrm{cd}_p(G) \subseteq \{1, q\}$ and a property of the irreducible Brauer character with degree three of a nonabelian simple group.

Finally, we give a further analysis of the conditions of the main theorem.

Key words : Character, Brauer character, group action, p-length, semiproduct

引言

代数学在数学本身的发展以及其他学科的发展过程中起着举足轻重的作用，这是不争的事实. 代数学有很多分支, 其中一个重要分支是群论. 对于有限群的研究, 最为有力的工具之一就是有限群的表示理论. 有限群表示理论起源是在 19 世纪末 20 世纪初由 Frobenius 和 Burnside 各自开创的常表示理论. 然后， Frobenius 的学生 Schur 将 Frobenius 的工作简化和改进，并创立了射影表示理论. 又经过约几十年的时间，大约在 20 世纪中叶， Schur 的学生 Brauer 创立了模表示理论，使有限群表示理论更加成熟和深化.

我国古代在代数学方面有着悠久的历史和光辉的成就，我们每个中国人都感到自豪. 但是近代近代在代数学研究工作的发展则比较晚，除了个别的早期代数工作者之外，直到 1938 年华罗庚先生所主持的群论讨论会之后，我国的近代代数学才得到初步发展 ([3]167 页). 而群表示论方面的研究是由段学复先生开始的. 段先生是 Brauer 的学生，他不仅自己学术造诣高深，并且多次组织模表示论讨论班，为我国培养了许多群表示论的专家学者 ([21]51 页). 改革开放三十年来，我国的群表示论取得了巨大进展，一支有作为的学术队伍已经初步形成，我国的有限群表示论发展迎来了一个难得的黄金时期.

有限群表示理论的发展依赖于许多学科的发展，除了经典的群论以外，还涉及到环理论，模理论，域理论，代数理论，拓扑理论，上同调理论，范畴理论等等. 有限群表示理论的有许多期待人们解决的问题和猜想， Brauer 本人就提出了许多吸引人的猜想，这些猜想可见文献 [26], 其中最引人入胜的猜想是高零猜想和 $k(B)$ 猜想. $k(B)$ 猜想简单的说就是 $k(B) \leq |D|$, 其中 D 是块 B 的亏群. 解决 $k(B)$ 猜想第一个阶段性成果是 $k(B) \leq \frac{1}{4}|D|^2 + 1$, 这个结果出现在 Brauer 和 Feit 的文章中 [27]. 随后， 1996 年， G. R. Robison 和 J. G. Thompson 当 G 是 p- 可解群时，如果 p 是一个大素数，则有 $k(B) \leq |D|$([67]); 同时在该文还提出了 G. R. Robison 猜想：如果 p- 块 B 的亏群 D 非交换，对于块 B 的任意不可约特征标 χ, 有 $p^{\mathrm{ht}(\chi)} < |D : \mathrm{Z}(D)|$, 其中 $\mathrm{ht}(\chi)$ 是 χ 的高度. 高零猜想是说，给定块 B, 块 B 的亏群 D 交换当且仅当 B 的不可约特征标全是高度为零的. 当 G 是 p- 可解时，高零猜想是成立的 (见 [58] 定理 12.10). 在表示理论中，摄人心魄的猜想还有 McKay 猜

想和 Alperin- 权猜想. 设 P 是 G 的一个西罗 p- 子群， McKay 猜想是说 P 的正规化子 $N_G(P)$ 和 G 有相同个数的 p'- 次数不可约特征标. 1973 年， I. M.Isaacs 在 [48] 中证明， McKay 猜想对可解群成立. 1998 年， R. A. Wilson 验证了 McKay 猜想对零散单群是成立的 ([73]). Alperin- 权猜想是说， G 中 p- 正则共轭类个数恰好等于 G 的 p- 权的共轭类个数. 1995 年， I. M. Isaacs 和 G. Navarro 在 [44] 中指出，如果 G 是 p- 可解群，则 Alperin- 权猜想是成立的. 后来， E. C. Dade 提出了 Dade 猜想 (这个猜想不是用简单语言能说清楚的，具体可见文献 [34, 35]), 并指出 Dade 猜想蕴含 McKay 猜想.

在有限群表示理论中，解决上述这些猜想成为人们的主攻方向. 1990 年，在 G 是可解的前提下， B. Külshammer 证明了 Brauer 的第二十一个问题有肯定的答案 ([52]). 1996 年， Külshammer 和 G. R. Robinson 指出， Alperin 猜想蕴含着 Brauer 的第二十一个问题 ([53]). 2001 年，在亏群是交换正规的前提下，曾吉文和张继平证明了 Brauer 的第二十一个问题有肯定的答案 ([50]). 关于上述一些猜想的证明，还有很多很多阶段性成果，并且又有一些数学家提出了很多猜想，在这里难以一一列举.

有限群表示理论的发展也深刻的影响着许多学科的发展，有限群表示理论作为一个代数分支，不仅影响着许多其他代数分支的发展，在图论，几何，多复变函数等其他非代数的数学分支也有许多应用，甚至在物理，化学等非数学领域里也有着广阔的应用背景. 比如有限群表示理论的应用在华罗庚先生的工作中可见一斑. 华罗庚先生使用群表示论的理论，用所有整不可约表示的元素具体地给出四类典型域上的完整正交函数系 ([3] 第 181 页).

在研究问题过程中，根据问题的不同，处理的方法也不尽相同. 粗略的来说，用有限群表示理论来研究问题大致有两种方法，一种模论方法，另一种是特征标方法. 使用特征标方法来研究问题的有限群表示理论，美国的数学家 I. M. Isaacs 称之为特征标理论 (文献 [45]). 特征标理论最精彩的应用莫过于证明 Burnside 猜想 (p^aq^b 阶群可解) 和 Frobenius 猜想 (Frobenius 核是幂零的), 这两个猜想的证明向人们展示了特征标理论的巨大威力. 按照 I. M. Isaacs 的说法，特征标理论有如下六个主要专题：特征标对应， Brauer 特征标， π- 特殊特征标， M- 群，特征标次数和线性群. 本文旨在讨论 Brauer 特征标次数对群结构的影响.

上面谈到的特征标是复特征标的简称. 设 G 是一个有限群， $\mathrm{Irr}(G)$ 表示 G 的不可约特征标全体；并用 $\mathrm{cd}(G)=\{\chi(1)\big|\chi\in\mathrm{Irr}(G)\}$ 表示不可约特征标次数集合. 如果不可约特征标次数集合 $\mathrm{cd}(G)$ 已知，我们能获取 G 的那些结构信息？

对 $\mathrm{cd}(G)$ 的研究, 开始于 Isaacs 和 Passman 的文献 [47](该文发表于 1964 年. Isaacs 和 Passman 发现一个关于自然数 n 的方程 $f(n)$, 如果 $n\le\chi(1),\forall\chi\in\mathrm{Irr}(G)$, 那么存在交换子群 A 满足 $|G:A|\le f(n)$). 1969 年， G. Seitz 在 [68] 中指出，如果 G 是一个 M- 群, 则 G 的导长 $\mathrm{dl}(G)$ 不超过 $|\mathrm{cd}(G)|$. 同时 G. Seitz 提出，把条件 G 是 M- 群减弱为可解群，是不是仍然有同样的结论？ 1976 年， T. R. Berger 证明了如果 G 是奇数阶群，那么 G. Seitz 提出的问题有肯定的答案 ([36]). 对于一般情形，1975 年，Isaacs 证明了 $\mathrm{dl}(G)\le 3|\mathrm{cd}(G)|$(文献 [46]), 1985 年，D. Gluck 证明了 $\mathrm{dl}(G)\le 2|\mathrm{cd}(G)|$(文献 [38]). 结果在不断的改进之中，虽然直到今天， G. Seitz 提出的问题还没有一个完整的回答，但总是得到可解群导长的一个上界 $2|\mathrm{cd}(G)|$. 那么一个自然问题又产生了，是不是存在 $|\mathrm{cd}(G)|$ 的函数能给出导长 $\mathrm{dl}(G)$ 的下界？ Isaacs 猜测，如果 G 是 p - 可解群，可能有

$$\mathrm{dl}(G)\ge|\mathrm{cd}(G)|^{1/2}+5.$$

关于这方面的文献，作者没有见到.

I . M. Isaacs 的著作 Character Theory of Finite Groups 堪称特征标理论的经典之作，该书第十二章专门研究特征标次数，总结了许多和 $\mathrm{cd}(G)$ 相关的结果. 事实上，对不可约特征标次数集合的研究一直受到许多专家学者的关注. 通过研究不可约特征标次数集合来研究有限群的结构的文献有很多， 1970 年， J. G. Thompson 在文献 [69] 指出，如果素数 p 整除 G 的所有非线性不可约特征标的次数，则 G 有正规 p - 补. 在 1964 年， J. Tate 在文献 [70] 给出了 G 的正规子群有正规 p - 补的一个充分条件. 1989 年， YA. G. Berkovich 用特征标重新证明了 J. Tate 的结果，并且指出 J. G. Thompson 的这个结果可以看成是 J. Tate 结果的推论. 和上述 Thompson 定理的条件相对的另一个极端情形式是 Ito 定理：如果 G 的所有不可约特征标次数都和素数 p 互素，那么 G 有正规交换的西罗 p - 子群. 设 $q(\ne p)$ 是一个素数， Ito 定理的一个特例是 $\{p,q\}$- 可解群的一个结论：设 G 是 $\{p,q\}$- 可解群的， $P\in\mathrm{Syl}_p(G),Q\in\mathrm{Syl}_q(G)$ 且 $QP=PQ$. 则 G 的 p'- 次数不可约特征标

都是 q'- 次数的当且仅当 $\mathrm{N}_G(P) \le \mathrm{N}_G(Q)$ 且 $\mathrm{C}_{Q'}(P) = 1$. 这个结果是 G. Navarro 和 T. Wolf 在 1998 年证明的 ([63]), 这个结论反映了不可约特征标次数和局部子群的一个关系.

不可约特征标次数在刻画一般子群上也很有效. 在特征标理论中，一个常见结论是 $|G/\mathrm{Z}(G)| \ge \chi(1)^2$, 由此产生的一个问题是如果 $|G/\mathrm{Z}(G)| = \chi(1)^2$, G 是不是可解群？ 1982 年， R. B. Howlett 和 I. M. Isaacs 在文献 [41] 指出：如果存在 $\chi \in \mathrm{Irr}(G)$, 使得 $|G/\mathrm{Z}(G)| = \chi(1)^2$, 则 G 必可解. 用 Frobenius 互反律可得到一个类似的式子： $\chi(1) \le |G : A|$, 其中 A 是 G 的交换子群， χ 不可约特征标. 那么当 $\chi(1) = |G : A|$ 时， A 和 G 是什么关系？ 1998 年， U. Riese 在文献 [65] 中证明了，如果 $\chi(1) = |G : A|$, 则 A 是 G 的次正规子群.

施武杰在文章 [13] 中系统地总结了有限群 G 许多数量特征, 其中包括群的阶，元素阶的集合，共轭类长度集合以及不可约特征标次数集合 (也即 $\mathrm{cd}(G)$) 等. 该文指出，这些数量深刻地影响着群的结构. 有限群的共轭类和不可约特征标之间的关系非常密切，两者之间最突出的表现是共轭类个数等于不可约特征标的个数. 研究共轭类也有很多工作， 1994 年，张继平在文献 [49] 中证明 S_3 猜想：一个有限群 G, 如果任意两个共轭类长度都不同，则必然 $G \cong S_3$. 2006 年， M. Herzog 和 J. Schönheim 在文献 [40] 证明了如果一个奇数阶群 G 恰有两个非中心共轭类长度相等，那么 $G \cong \langle a, b \big| a^7 = b^3 = 1, ab = ba^2 \rangle$. 研究有限群的共轭类和研究有限群的不可约特征标，在技术上往往可以相互借鉴. 1996 年， Y.Berkovich, D. Chillag 和 M. Herzog 在文献 [32] 中对非线性不可约特征标次数两两同的有限群作了刻画. 1995 年， T. Noritzsch 在文献 [64] 刻画了 $|\mathrm{cd}(G)| = 3$ 的有限群结构. 同年， M. L. Lewis 在文献 [56] 证明了如下结论：如果可解群 G 的任意两个不可约特征标的次数的公因子是 1 或者是一个素数，则 $|\mathrm{cd}(G)| \le 14$. 1996 年， Y.Berkovich 在文献 [31] 中对 $|\mathrm{cd}(G)| = 2$ 且非线性不可约特征标仅有两个的有限可解群进行了分类. 2005 年，在 M. Bianchi, A. Gillio Berta Mauri, M. Herzog Qian Guohua 和 Shi Wujie 五人合作的文献 [37] 中，作者对 $|\mathrm{cd}(G)| = 2$ 的非幂零群给出了刻画. 不可约特征标次数集合有限群 G 的导长，幂零长等数量特征之间的联系也很深刻. 1999 年，鲁自群在文献 [9] 中用特征标的次数对有限可解群的幂零长进行了估计. 2005 年，钱国华在文献 [11] 指出：设 G 是可解群， χ 是 G 的一个非线性不可约特

征标，如果 $|G|/\chi(1)$ 的素因子分解中不含素数的 n- 次方幂，则 G 的导长不超过 n 的某个函数；并且当 $n \leq 3$ 时，给出了 G 的结构. 另外，张继平的文献 [74] 以及 M. L. Lewis 和 D. L. White 的文献 [57] 以特征标次数图为工具，对群的结构和特征标次数集合 $\mathrm{cd}(G)$ 进行了分析和研究.

现在谈谈本文的主要工作思路，本文主要是使用不可约 Brauer 特征标次数 (或者等价于说是不可约模表示的维数) 来刻画有限群的结构. 考虑有限群的模表示理论，首先要固定一个素数 p, 并假定 $p||G|$. 设 F 是一个特征为 p 的代数闭域，用 $\mathrm{GL}(n,F)$ 表示 F 上 n- 阶可逆矩阵可逆矩阵全体，称群同态

$$\mathfrak{X} : G \to \mathrm{GL}(n,F)$$

是 G 的一个 F- 表示. 类似地定义 $\varphi^*(g) = \mathrm{Tr}(\mathfrak{X}(g))$, 称 φ^* 是由 $\mathfrak{X}$ 提供的一个 F-特征标. 不过， F- 特征标却不是模表示理论的核心概念，模表示理论的核心概念是 Brauer 特征标.

显然 Brauer 特征标不是 G 的类函数. 设 $g \in G$, 称 g 是 p- 正则元，如果 g 的阶 $o(g)$ 与素数 p 互素. 记 G 中全部正则元集合为 G^0. 对 p- 正则共轭类以及不可约 Brauer 特征标次数集合 $\mathrm{cd}_p(G)$ 的研究，也逐渐受到人们重视. 任永才在文献 [12, 75] 曾对 p- 正则共轭类做过研究. 1986 年， Michler(文献 [59]) 使用单群分类定理证明了：如果 $\mathrm{cd}_p(G)$ 中元素都和 p 互素，那么 G 的西罗 p - 子群正规. 2007 年， Willems(文献 [72]) 也是依赖于单群分类定理证明了：如果 $\mathrm{cd}_p(G)$ 中元素都是 p 的方幂且 $p \neq 2$, 则 G 可解. 2005 年， G. T. Lee(文献 [55]) 给出了满足条件 $\mathrm{cd}_p(G) \subseteq \{1,2\}, p \neq 2$ 的有限群的刻画. 本文的目的就是刻画满足条件 $\mathrm{cd}_p(G) = \{1,q\}$ 的有限群.

文献 [55] 中的主定理没有对 $\mathrm{cd}_p(G) = \{1\}$ 和 $\mathrm{cd}_p(G) = \{1,2\}, p \neq 2$ 分别讨论，而是一般地讨论 $\mathrm{cd}_p(G) \subseteq \{1,2\}, p \neq 2$. 当然，也许作者不是十分关注这点. 本文以引理形式给出了 $\mathrm{cd}_p(G) = \{1\}$ 的群结构，并且不依赖于文献 [55] 的证明.

引理 A 设 p 是一个素数， G 是有限群， $P \in \mathrm{Syl}_p(G)$. 则 $\mathrm{cd}_p(G) = \{1\}$ 当且仅当 $P \trianglelefteq G$ 并且 G/P 交换.

根据素数 p 和 q 是否相同，对满足条件 $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,q\}$ 的有限群分别给予讨论.

定理 B 设 F 是一个特征为素数 p 的代数闭域, G 是 p - 可解群. 设 $P\in \mathrm{Syl}_p(G)$, 且 q 是不同于 p 的素数，那么 $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,q\}$ 当且仅当 $P\trianglelefteq G$ 并且满足下列两条之一：

(1) G/P 有指数为 q 的交换正规子群.

(2) $|(G/P)/\mathrm{Z}(G/P)|=q^3$. 更进一步，如果 $(G/P)/\mathrm{Z}(G/P)$ 非交换，则 $q>2$ 且 $(G/P)/\mathrm{Z}(G/P)=\langle a,b,c|a^q=b^q=c^q=1,c=[a,b],[a,c]=[b,c]=1\rangle$; 如果 $(G/P)/\mathrm{Z}(G/P)$ 交换，则它是初等交换 q- 群.

显然文献 [55] 中，关于满足条件 $\mathrm{cd}_p(G)\subseteq\{1,2\},p\neq 2$ 的有限群是引理 A 和定理 B 的特例.

定理 C 设 p 是一个素数， G 是 p - 可解群. 设 $\mathrm{O}_p(G)=1$, 记 $N=\mathrm{O}_{p'}(G)$. 则如下三条等价：

(1) $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,p\}$.

(2) N 交换，且 G 在 $\mathrm{Irr}(N)$ 上自然作用是轨道长为 1 或者 p 的非平凡作用.

(3) N 交换;对于 $K\leq N$, 如果 N/K 循环且 $[G,N]\nleq K$, 则 $|G:\mathrm{C}_G(N/K)|=p$. 并且满足条件 N/K 循环且 $[G,N]\nleq K$ 的子群 K 确实存在.

由定理 C, 我们得到如下的推论，这个推论更进一步刻画了 G 的结构.

推论 D 设 p 是一个素数， G 是 p - 可解群. 如果 $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,p\}$, 则

$$1\leq \mathrm{O}_p(G)<\mathrm{O}_{p,p'}(G)<\mathrm{O}_{p,p',p}(G)\leq \mathrm{O}_{p,p',p,p'}(G)=G.$$

更进一步， $\mathrm{O}_{p,p'}(G)/\mathrm{O}_p(G)=\mathrm{O}_{p'}(G/\mathrm{O}_p(G))$ 是交换群， $\mathrm{O}_{p,p',p}(G)/\mathrm{O}_{p,p'}(G)$ 是 p - 阶循环群， $G/\mathrm{O}_{p,p',p}(G)$ 是 r- 阶循环群并满足 $r|(p-1)$.

综合定理 B 和推论 D, 可知：

结论 E 设 p,q 是两个素数， G 是 p - 可解群. 如果 $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,q\}$, 则 G 的 p - 长不超过 4.

有必要指出，条件 $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,q\}$ 几乎蕴含着 G 是 p - 可解的. 事实上，设 $P\in\mathrm{Syl}_p(G)$. 如果 $p\neq q$, 由 Michler(文献 [59]) 的结果， $P\trianglelefteq G$. 那么 $\mathrm{cd}_p(G)=$

$\mathrm{cd}_p(G/P)=\{1,q\}$. 注意到 G/P 是 p' - 群，所以 $\mathrm{cd}(G/P)=\mathrm{cd}_p(G/P)=\{1,q\}$. 再由文献 [42] 定理 12.15 可知 G 是可解群. 如果 $p=q$ 且 $p\neq 2$, 由 Willems(文献 [72]) 的结果，则 G 可解. 这说明， G 满足条件 $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,q\}$, 只要 p,q 不同时为 2, 那么 G 就是可解群. 我们之所以附加条件 G 是 p - 可解的，主要是因为不愿意在定理的叙述过程中单独强调 p,q 同时为 2 的特殊情形.

对于有限群 G, 如果 $\mathrm{cd}_p(G)=\{1,q\}$, 由结论 E, 可知 G 的结构和半直积紧密相连. 这涉及到另外一个深刻的主题——有限群的同构分类. 所谓同构分类，就是把由某些公理定义的代数系按照同构进行分类；这是代数学的基本问题之一. 群论中， A. Cayley 于 1878 年明确地提出了对一般的 n 阶有限群的同构分类问题. 到今天，有限群同构分类虽然取得了丰硕的成果，但远未完成. 本文尝试着对半直积的同构分类做一些探讨.

设 H,N 都是有限群，且 H 作用在 N 上，也即存在群同态

$$\varphi: H\to \mathrm{Aut}(N).$$

在笛卡儿集合 $N\times H$ 上规定运算

$$(n,h)(m,k)=(nm^{h^{-1}},hk), n,m\in N, h,k\in H.$$

则在该规定下, 笛卡儿集合 $N\times H$ 是群, 其单位元是 $(1_N,1_H)$. 该群记为 $G=N\rtimes_{\varphi}H$, 称为 N 和 H 关于 φ 的半直积. 在不至于混淆的情况下，有时记为 $G=N\rtimes H$.

如果 $\varphi,\psi: H\to\mathrm{Aut}(N)$ 是两个群作用. 记 $G_{\varphi}=N\rtimes_{\varphi}H$ 和 $G_{\psi}=N\rtimes_{\psi}H$ 为相应的半直积. 一个自然的问题是： $G_{\varphi}\cong G_{\psi}$ 是否成立？这是一个重要课题. 这个课题和群的扩张理论，群的上同调理论等密切相关，也是一个非常难的课题.

当 $(|H|,|N|)=1$ 时，文献 [8] 给出 $G_{\varphi}\cong G_{\psi}$ 成立的一个充分条件. 在此基础上，本文采用群作用的观点，给出一个充分必要条件，即：

定理 F *设 N,H 为有限群且 $(|H|,|N|)=1$. 记 $\Omega=\mathrm{Hom}(H,\mathrm{Aut}(N))$ 为 H 在 N 上所有作用构成的集合.*

(1) 对于给定的 $\varphi\in\Omega,\alpha\in\mathrm{Aut}(N),\beta\in\mathrm{Aut}(H)$, 定义

$$\varphi^{(\alpha,\beta)}: H\to\mathrm{Aut}(N), h\mapsto \alpha^{-1}\varphi(h^{\beta^{-1}})\alpha.$$

则 $\varphi^{(\alpha,\beta)} \in \Omega$.

(2) 设 $\Gamma = \mathrm{Aut}(N) \times \mathrm{Aut}(H)$, 则上述定义给出 Γ 在 Ω 上的一个作用.

(3) 对于两个群作用 $\varphi, \psi : H \to \mathrm{Aut}(N)$, 设 $G_\varphi = N \rtimes_\varphi H$ 和 $G_\psi = N \rtimes_\psi H$ 是对应的两个半直积. 则 $G_\varphi \cong G_\psi$ 当且仅当 φ, ψ 属于同一个 Γ- 轨道.

当 H, N 都是循环群时, 相应的半直积成为亚循环群. 1969 年, B. G. Basmaji 刻画了亚循环群的结构 (文献 [28]). 2001 年, 樊恽和黄平安刻画了亚循环群的自同构群 (文献 [5]). 当 H 循环而不要求 N 循环时, Hölder 定理解决了如何选择扩张函数决定 N 的所有循环扩张 (一般的群论教科书都有介绍, 比如说文献 [15] 定理 3.9), 然而遗憾的是根据已知文献难于区分这些扩张的同构类, 甚至也不知道有几个同构类. 本文在互素作用的条件下, 成功地解决了当 H 是循环群时半直积同构类的个数问题, 即:

定理 G 设 H 是 r 阶循环群, 互素地作用在有限群 N 上. 则所有可能的半直积同构类个数恰好等于方程 $x^r = 1$ 在 $\mathrm{Aut}(N)$ 中的解集合在 r- 共轭关系下的等价类个数.

当群的阶已知时, 讨论低阶群的同构分类是一个专业性很强的课题, 文献 [33] 列出了 2000 阶以下各阶群的同构类数. 对于具体的 $2^3 \cdot q$ 阶群 (q 是奇素数), 特别是 24 阶群, 文献 [19] 给出了具体的同构分类, 同时, 文献 [19], 687 页曾指出, 当 p 较大时, 讨论过于复杂困难. 本文作为定理 E 和定理 F 的应用, 以 24 阶群为例, 简明地计算出其同构分类及其生成关系; 并指出其他情形的 $2^3 \cdot q$ 阶群同构分类可以类似简洁地得到, 不必担心 p 较大时带来的困难.

设 G 是有限群, χ 是 G 的一个复特征标. $\mathrm{Ker}(\chi) = \{g \in G \big| \chi(g) = \chi(1)\}$ 和 $Z(\chi) = \{g \in G \big| |\chi(g)| = \chi(1)\}$ 是 G 的两个子群, 本文分别称之为特征标 χ 的核与中心. 这是两个非常重要的子群, 国内外很多学者对特征标的核做过深入的研究, 比如张广祥的文献 [20] 等等. 设 φ 是 G 的一个 Brauer 特征标, $\mathrm{Ker}(\varphi)$ 和 $Z(\varphi)$ 也是 G 的两个子群, 分别称之为 Brauer 特征标 φ 的核与中心. 本文通过对 $Z(\varphi)$ 的研究, 进一步刻画了非交换单群的次数为 3 的不可约 Brauer 特征标的一个性质, 即:

定理 H 设 G 是有限非交换单群且 $3 \big| |G|$, F 是一个特征为素数 $p (p \neq 3)$ 的代

数闭域， $\varphi \in \mathrm{IBr}(G)$. 如果 $\varphi(1) = 3$, 则存在 3 阶元 $x \in G$ 使得 $\varphi(x) = 0$.

当然，定理 H 中条件 G 是有限非交换单群且 $3||G|$ 可以用条件 G 是有限非交换单群但不是 Ree-Suzuki 单群 (即： $\mathrm{Suz}(2^{2f+1})$) 来代替.