学校编号： 10384　　分类号： ______ 密级： ______
学　　号： 19020060153158　　UDC: ______________________________

厦　门　大　学

博　士　学　位　论　文

复 Finsler 流形上的 Bochner 技巧

Bochner technique on Complex Finsler Manifolds

肖　金　秀

指导教师姓名： 邱春晖　教授

钟同德　教授

专 业 名 称： 基 础 数 学

论文提交日期： 2009 年 4 月

论文答辩日期： 2009 年　月

学位授予日期： 2009 年　月

答辩委员会主席： __________

评　　阅　　人： __________

2009 年 4 月

目　录

Contents

摘 要

“ Bochner 技巧”一词是描述由 S.Bochner 首创的一种方法 ([1-2]) . 六十多年前， Bochner 用这一技巧证明：在 Ricci 曲率满足一定的条件下， Riemann 流形上某些几何上有兴趣的对象 (例如 Killing 向量场、调和形式、旋量场) 必定平行或者为零. 今天， Bochner 技巧已成为几何学者们的基本术语之一，并得到了广泛的应用. 近些年来，由于 Finsler 流形上的 Laplace 算子理论已取得了许多重要的进展 ([34][24][11][14-16]) . 基于实 Finsler 流形上的 Laplace 算子等相关理论，钟同德和钟春平 ([10]) 研究了实 Finsler 流形上的 Bochner 技巧及其应用. 本文试图研究复 Finsler 流形上的 Bochner 技巧，给出复 Finsler 流形上有关微分算子和 Laplace 算子等算子的 Weitzenböck 公式，从而得到复 Finsler 流形上的有关消灭定理.

本文分为三章，每章从不同的角度研究了复 Finsler 流形上的 Bochner 技巧，并得到各种不同条件下的消灭定理. 设 (M, F) 为强拟凸复 Finsler 流形，这里 F 是复流形 M 上的强拟凸复 Finlser 度量； $\tilde{M} = T^{1,0}M \setminus o(M)$, 其中 $T^{1,0}M$ 是 M 上的全纯切丛， $o(M)$ 为 $T^{1,0}M$ 的零截面； $C^* = C \setminus \{0\}$ ； $PTM = \tilde{M}/C^*$ 为射影切丛.

首先在第一章我们利用强拟凸复 Finsler 度量和 Chern-Finsler 联络，研究了 Kähler-Finsler 流形上的 Bochner 技巧. 对于 Kähler -Finsler 流形 M ，我们知道 $\tilde{M}$ 上存在规格化复坐标系以及水平丛上存在规格化 $(1, 0)$ 型标架场. 在规格化复坐标系及规格化 $(1, 0)$ 型水平标架场下，利用 Chern-Finsler 联络及其曲率，给出了射影切丛 PTM 上水平 Laplace 算子的局部表达式 (即 Weitzenböck 公式)，同时还得到了射影切丛 PTM 上有关全纯向量丛上的水平 Laplace 算子. 并且作为 Bochner 技巧的应用，在 Chern-Finsler 联络的 $(1, 1)$ 型挠率为零的条件下，得到了相应的 Bochner 型消灭定理.

第二章，在 Siu([21]) 的基础上，将 Kähler 流形上的 $\bar{\nabla}$ Bochner-Kodaira 技巧和 $\partial\bar{\partial}$ Bochner-Kodaira 技巧推广到了 Kähler-Finsler 流形上，得到了 Kähler-Finsler 流形上的 $\bar{\nabla}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira 技巧和 $\partial_{\mathcal{H}}\bar{\partial}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira 技巧，并证明了这两种技巧是等价的. 进一步地，利用 $\partial_{\mathcal{H}}\bar{\partial}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira 技巧证明了 Kähler-Finsler 流形上的 Bochner 型消灭定理.

由于 Finsler 流形上的几何对象大部分与 Finsler 流形的切向量场有关，为了更好地得到复 Finsler 流形上一些类似于 Hermite 流形上的结果 (例如 Laplace 算子的比较定理、Schwarz 引理等等). 在第三章，我们定义了全纯切丛 $T^{1,0}M$ 上的 Hodge-Laplace 算子，并在局部坐标下利用 Chern-Finsler 联络及其曲率得到有关全纯切丛 $T^{1,0}M$ 上 Hodge-Laplace 算子的 Weitzenböck 公式，并利用 Bochner 技巧，证明了全纯切丛上有关向量场的 Bochner 型消灭定理.

关键词: 复 Finsler 流形， Hodge-Laplace 算子， Bochner 技巧， Weitzenböck 公式， Bochner 型消灭定理.

Abstract

The term “ Bochner technique ” describes a method initiated by S.Bochner([1-2]). Sixty years ago, Bochner used this method to prove that certain objects of geometric interest(e.g.Killing vector fields, harmonic forms, harmonic spinor fields ,etc) on compact Riemannian manifolds under certain suitable condition of Ricci curvature must be parallel or vanished identically. Today, the “ Bochner technique ” becomes one of basic terminology for geometer and is widely used. More recently, some great developments have been made in the theory of Laplace operator on Finsler manifolds([34][24][11][14-16]). Associated to the Laplace operator on real Finsler manifolds, Zhong T. D and Zhong C. P([10]) have studied the Bochner technique and its applications on real Finsler manifolds. The purpose of this paper is to study the Bochner technique on complex Finsler manifolds, give Weitzenböck formulas of the differetial operator and the Laplace operators on complex Finsler manifolds, and obtain vanishing theorems on complex Finsler manifolds.

This paper contains three chapters. In each chapter, the author studies the Bochner technique from a different viewpoint and obtains some vanishing theorems under different conditions. Let (M, F) be a strongly pseudoconvex complex Finsler manifold, where F is the given strongly pseudoconvex complex Finsler metric on a complex manifold M; $\tilde{M} = T^{1,0}M \setminus o(M)$ be the slit holomorphic tangent bundle, where $T^{1,0}M$ is the holomorphic tangent bundle of M, $o(M)$ is the set of all zero section of $T^{1,0}M$; $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; $PTM = \tilde{M}/\mathbb{C}^*$ be the projectively tangent bundle.

In the first chapter, by using the Chern-Finsler connection and strongly pseudoconvex complex Finsler metric, the Bochner technique on a Kähler-Finsler manifold is studied. For a Kähler-Finsler manifold M, there exist a system of local coordinates which is normalized at a point on $\tilde{M}$, and normal frame field of $(1, 0)$-forms of horizontal bundles on $\tilde{M}$. Under the conditions of normal complex coordinate and normal frame field of $(1, 0)$-forms of horizontal bundles, the horizontal Laplace operator for differential forms over PTM is defined by the Chern-Finsler connection and its curvature tensor and the Weitzenböck formula is obtained. The horizontal

Laplace operator on holomorphic vector bundles over PTM is also defined. Moreover, for the application of Bochner technique, we get the Bochner type vanishing theorems when the $(1,1)$-tortion τ of the Chern-Finsler connection is zero.

In the second chapter, based on the work of Siu([10]), the author generalizes the $\bar{\nabla}$ Bochner-Kodaira technique and $\partial\bar{\partial}$ Bochner-Kodaira technique on K$\ddot{a}$hler manifolds to K$\ddot{a}$hler-Finsler manifolds, gets $\bar{\nabla}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira technique and $\partial_{\mathcal{H}}\bar{\partial}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira technique on K$\ddot{a}$hler-Finsler manifolds, and proves the two techniques are equivalent. Furthermore, by using the $\partial_{\mathcal{H}}\bar{\partial}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira technique, a Bochner type vanishing theorem on K$\ddot{a}$hler-Finsler manifolds is proved.

Since most of geometrical objects on Finsler manifold generally live in the tangent bundles. In order to get some results (e.g. comparison theory of Laplace operator, the Schwarz Lemma,etc) on complex Finsler manifolds analogous to the results on Hermitian manifolds, we will define the Hodge-Laplace operator on the holomorphic tangent bundles $T^{1,0}M$ in the third chapter. Under the local coordinates, by using the Chern-Finsler connection and its curvature operator, the Weitzenb$\ddot{o}$ck formulas of differetial operator and Hodge-Laplace operator are obtained. Furthermore, using the Bochner technique, the author obtains a Bochner type vanishing theorem for vector fields on holomorphic tangent bundle.

Key word : complex Finsler manifold, Hodge-Laplace operator, Bochner technique, Weitzenb$\ddot{o}$ck formula, Bochner type vanishing theorem.

复 Finsler 流形上的 Bochner 技巧[1]

引　言

一、微分几何中的 Bochner 技巧及其应用与发展

“ Bochner 技巧” 是由 S.Bochner 在上世纪 40 年代首创的几何学中的一种著名的方法 ([1],[2])，已经有 K.Yano 和 S. Bochner[3] 、 H. Wu[4] 两本写得很好的名著详细介绍了这个方法. 前者介绍上世纪 60 年代以前的成果, 后者着重介绍上世纪 60 年代以后的发展. 以下我们根据伍鸿熙 (H.Wu) 教授的著作 [4] 将 “ Bochner 技巧” 的历史沿革及其发展加以简要的介绍.

原始的“ Bochner 技巧”是对紧 Riemann 流形上的调和形式的点态内积的 Laplace 算子进行积分后，得到两项：一项为调和形式的共变导数的整体内积；另一项则包含曲率张量. 在曲率满足一定条件下，可得到调和形式必为零或平行. 这一技巧的建立使得某些定理的证明变得清晰易懂. 它是在证明不同情形下的消灭定理的过程中被加以改进和演变. 下面我们用上同调语言从 Bochner 的第一批定理开始叙述 Bochner 技巧的发展与演变. Bochner 的第一批定理之一：在具有非负 Ricci 曲率的可定向紧 Riemann 流形 M 上，每个调和 1- 形式是平行的；如果 Ricci 曲率是拟正的，则不存在非零的调和 1- 形式. 按照 Hodge 定理 (见 [27],159 页，或 [28]， 84 页)， M 上的调和 1- 形式空间同构于 $H^1(M,R)$. 所以上述定理的第一部分推出：如果 M 为具有非负 Ricci 曲率的紧 Riemann 流形，则 M 有 r 维的平行分布 (即切子丛)，其中 $r = dimH^1(M,R)$. 这一定理所显示的 $H^1(M,R)$ 和 Ricci 曲率之间的非常令人满意的关系.

当 M 为紧致 Kähler 流形时，应用 Bochner 技巧也得到关于调和 2- 形式的精确定理 (它是 [29][30][31] 等结果的综合) ：在具有非负双截曲率的紧 Kähler 流形上，每个 (1,1) 型实调和形式是平行的；如果双截曲率是拟正的，则这些形式是 M 的 Kähler 形式的实倍数. 按照 Hodge 理论，即可推出：如果 M 为拟正双截曲率的紧 Kähler 流形，则 $H^{1,1}(M) = 1$.

[1] 基金项目：国家自然科学基金资助（项目批准号： 10571144 ）

对于紧复流形 M 上的 Hermite 向量丛 $E \to M$ 的情形. 1970 年，伍鸿熙 (H.Wu) 和 S.Kobayashi 在 Hermite 向量丛上应用 Bochner 技巧得到了定理 ([32])：若 $E \to M$ 为紧复流形 M 上的 Hermite 向量丛，如果 E 的 Ricci 张量是非正的，则 E 的每个全纯截面都是平行的；如果 E 的 Ricci 张量是拟负的，则 E 的每个全纯截面恒等于零. 关于这一定理，有一个非常有名的推论：具拟负 Ricci 函数的 Hermite 线丛没有非零的全纯截面. 用层的上同调语言表示，就是说：若 L 为具有拟负 Ricci 函数的 Hermite 线丛，则 $H^0(M,\mathcal{O}(L))=0$. 对于有关 $H^r(M,\mathcal{O}(L))=0$，$r\geq 1$ 的信息. 1953 年， Kodaira 将 " Bochner 技巧" 推广到了紧 Kähler 流形上取值于 Hermite 线丛的 (p,q) 形式的情形. 后来在文献 [21] 中，萧荫堂教授称之为 " $\overline{\bigtriangledown}$ Bochner Kodaira 技巧". 对 $p=0$ 的情形， Kodaira 应用这一技巧得到了定理 (即为 Kodaira 消灭定理 [19])：若 M 为 $n-$ 维紧 Kähler 流形， L 为 M 上的拟负 Hermite 线丛，则对 $q<n$， $H^q(M,\mathcal{O}(L))=0$.

而当 E 为 n 维紧 Kähler 流形 M 上秩为 r 的 Hermite 向量丛时，是否可以假定 E 满足某种适当意义下是"负" 的条件，进而推出 $H^q(M,\mathcal{O}(E))=0, q<n$. 亦即，每个 E 值 $(0,q)-$ 调和形式是零. 设 φ 为任一 E 值 $(0,q)-$ 形式，应用传统的 " Bochner 技巧"，经过标准的计算可得 (详细过程见 [4])

$$\int_M \big(-\sum_{\sigma} e_\sigma R_{V_i\overline{V}_i}\varphi^\sigma+\sum_{\sigma,\xi,j} e_\xi (i(V_j))\Omega^\xi_\sigma \wedge i(\overline{V}_j)\varphi^\sigma,\varphi\big)\omega \leq \int_M (\Box\varphi,\varphi)\omega.$$

假设 φ 是调和的，则左边的积分是非正的. 为了导致矛盾，如果 $\varphi\neq 0$，则必须分析左边的被积函数使之保证左边是正的. 主要的困难显然在第二项求和，它使得难以判断要把哪一类负性的假设加在 $\{\Omega^\xi_\sigma\}$ 上. 在文献 [21] 中，萧荫堂教授把经典的 Bochner 技巧加以变化，用线性代数部分地消除了这一困难. 粗略地说，代替了对 Laplace 算子和不同的 Weitzenböck 公式的依赖，萧教授从一开始就使用算子 $\partial\bar\partial$ 和 Kähler 流形上微分形式的双阶结构，得到了著名的 " $\partial\bar\partial$ Bochner Kodaira 技巧".

综上所述,上世纪 40 年代 S.Bochner 首创的微分几何中的 Bochner 技巧 ([1][2])，其原理是先将紧 Riemann 流形或 Kähler 流形上的 Laplace 算子用流形的 Ricci 曲率表示出来得到所谓的 Weitzenböck 公式，然后将 Laplace 算子作用在流形上某些有兴趣的对象 (例如 Killing 向量场、调和形式、旋量场) 上，再把对曲率的某些假设结合极大值原理和某类积分公式，最后得到这些几何对象的一些性质. 随着 Bochner 技巧的进一步深入研究，1953 年 Kodaira 应用 Bochner-Kodaira 技巧证明

了紧致 Kähler 流形的嵌入定理，即每个具有正线丛的 Kähler 流形都可嵌入到 $\mathbb{P}^N$ 中去 ([5])，从此 Bochner 技巧成为超越代数几何和 Lie 群表示理论中的一基础部分 ([28]). 后来 Bochner 技巧还拓广到非紧流形以及 Kähler 流形间的调和映射中去 ([4])，而萧荫堂的 $\partial\bar{\partial}$ Bochner- Kodaira 技巧就是调和映射理论中的一个重要的方法，萧荫堂用 $\partial\bar{\partial}$ Bochner- Kodaira 技巧证明了紧致 Kähler 流形间调和映射的复解析性和强刚性 ([20]). 值得注意的是上世纪 60 年代中期 Andreotti 、 Vesentini 、 Morrey 、 Kohn 、 Hörmander 等人发展的多复变数中 $\bar{\partial}-$ 方程的 L^2 估计方法，将多复变数的经典 Levi 问题的研究归结为 $\bar{\partial}-$ 问题的可解性的估计，这个方法原本是微分算子理论，但却和微分几何的 Bochner-Kodaira 技巧有着直接的联系，充分体现了现代数学的综合性 ([33]).

二、复 Finsler 流形上的 Bochner 技巧

由于“ Bochner 技巧”的主轴是 E.Hopf 极大值原理以及 Laplace 算子的应用. 现在，一个自然的问题是，若流形 M 是 Finsler 流形时，能否将“ Bochner 技巧”推广到 Finsler 流形上？如果可以的话，因为 Finsler 流形上的 Laplace 算子包含了丛空间上的水平 Laplace 算子、垂直 Laplace 算子、混合 Laplace 算子以及整体 Laplace 算子 (本文第三章中所定义的 Hodge-Laplace 算子) 和底流形上的 Laplace 算子，则在讨论 Finsler 流形上的“ Bochner 技巧”时采用哪种 Laplace 算子比较合理？它是否可以得到上述 Riemann 流形和 Hermite 流形上一些经典的消灭定理.

近十年来，实 Finsler 流形和复 Finsler 流形上的 Laplace 算子已取得了许多重要的进展 ([34][24][11][14-16]). 他们大体可以分为两大类：一类 Laplace 算子是建立在丛空间 (切丛 TM ， Finsler 球丛 IM ，一般向量丛 E) 上，力求反映丛空间的某些特性，或者借助于丛空间间接反映底流形的一些特性；另外一类 Laplace 算子是建立在底流形 M 上，主要是反映底流形上的一些特性. 基于 Finsler 流形上 Laplace 算子的理论， Finsler 流形上的 Bochner 技巧的研究大体上也可以分为两大类：第一类是应用丛空间上的 Laplace 算子来研究；另外一类是应用底流形上的 Laplace 算子来研究. 对于实 Finsler 流形的情形，文献 [10] 利用与 Cartan-Finsler 联络有关的非线性联络定义了底流形上的 Laplace 算子 $\triangle$ ，并进一步研究了实 Finsler 流形上的 Bochner 技巧，得到了有关 Bochner 型消灭定理. 但迄今为此，还没有关复

Finsler 流形上全纯向量丛的 Laplace 算子以及复 Finsler 流形上的 Bochner 技巧方面的文章.

当今, 大家习惯于将一种 Laplace 算子的局部表示称为 Weitzenböck 公式. 这些公式突出地表现了 Bochner 技巧的应用. 除此之外, 由于不同的 Laplace 算子在微分几何和微分方程中占据着极为重要的位置, 所有这一类公式本身明显具有独立意义. 因此本文试图研究复 Finsler 流形上有关全纯向量丛的 Laplace 算子的定义及其相关性质, 并得到各种有关 Laplace 算子的 Weitzenböck 公式, 且进一步研究各种 Bochner 技巧在复 Finsler 流形上的推广. 由于 Finsler 流形上的几何对象大部分不仅依赖于底流形上的坐标, 还与 Finsler 流形上的纤维坐标息息相关. 因此, 对于复 Finsler 流形的情形, 本文利用丛空间上的 Laplace 算子的 Weitzenböck 公式, 研究复 Finsler 流形上的 Bochner 技巧.

本文分为三章, 在第一章, 我们利用强拟凸复 Finsler 度量和 Chern-Finsler 联络, 在 Kähler-Finsler 流形上给出了射影切丛 PTM 上有关全纯向量丛的水平 Laplace 算子的定义. 对于 Kähler-Finsler 流形 M , 我们知道 $\tilde{M}$ 上存在规格化复坐标系以及水平丛上存在规格化 $(1,0)$ 型标架场. 在规格化复坐标系及规格化 $(1,0)$ 型水平标架场下, 利用 Chern-Finsler 联络及其曲率, 给出了射影切丛 PTM 上的水平 Laplace 算子的表达式 (即 Weitzenböck 公式) (定理 1.2.7). 同时还定义了射影切丛 PTM 上有关全纯向量丛的水平 Laplace 算子 ((1.3.12) 式), 并得到了该水平 Laplace 算子的具体表达式 (即 Weitzenböck 公式) (定理 1.3.1) . 作为 Bochner 技巧的应用, 第一章最后在 Chern-Finsler 联络的 $(1,1)$ 型挠率为零的条件下, 得到了相应的 Bochner 型消灭定理 (定理 1.4.1 以及定理 1.4.2) .

第二章, 在文献 [21] 中, 萧荫堂教授详细讲述了 $\bar{\nabla}$Bochner-Kodaira 技巧以及 ∇Bochner-Kodaira 技巧, 并把经典的 Bochner-Kodaira 技巧加以变化, 将 Kodaira 消灭定理推广到任意维数的全纯向量丛上. 简单说来, 代替对 Laplace 算子和不同的 Weitzenböck 公式的依赖, 萧教授从一开始就使用了算子 $\partial\bar{\partial}$ 和 Kähler 流形上微分形式的双阶结构. 本章在 Siu([21]) 的基础上, 将 Kähler 流形上的 $\bar{\nabla}$ Bochner-Kodaira 技巧、∇ Bochner-Kodaira 技巧和 $\partial\bar{\partial}$ Bochner-Kodaira 技巧推广到了 Kähler-Finsler 流形上, 得到了 Kähler-Finsler 流形上 $\overline{\widetilde{\nabla}}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira 技巧、 $\widetilde{\nabla}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira 技巧以及 $\partial_{\mathcal{H}}\bar{\partial}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira 技巧, 并证明了后两种技巧是等价的. 并得到有关 $\Box_{\mathcal{H}} - \overline{\Box}_{\mathcal{H}}$ 算子的 Weitzenböck 公式 ((2.2.20) 式) , 自然而然得到了

Kähler-Finsler 上的 Akizuki-Nakano 消灭定理 (定理 2.2.4). 进一步地，利用 $\partial_{\mathcal{H}}\bar{\partial}_{\mathcal{H}}$ Bochner-Kodaira 技巧证明了 Kähler-Finsler 流形上的消灭定理 (定理 2.3.3) .

由于 Finsler 流形上的几何对象大部分不仅依赖于底流形上的坐标, 还与 Finsler 流形上的纤维坐标息息相关. 为了能够得到复 Finsler 流形上一些类似于 Hermite 流形上的结果 (例如 Hermite 流形上 Laplace 算子的比较定理、 Schwarz 引理等等). 在第三章我们定义了全纯切丛 $T^{1,0}M$ 上的 Hodge-Laplace 算子, 并在局部坐标下利用 Chern-Finsler 联络及其曲率得到全纯切丛 $T^{1,0}M$ 上有关 Hodge-Laplace 算子的 Weitzenböck 公式 (定理 3.2.5). 并且利用 Bochner 技巧，证明了有关全纯切丛上向量场的 Bochner 型消灭定理 (定理 3.2.8) .

第一章 K$\ddot{a}$hler-Finsler 流形上的 Bochner 技巧

“ Bochner 技巧”是六十多年前由 Bochner 首创的几何学中的一种方法 ([1],[2]) ，这种方法主要是利用 Laplace 算子和 E.Hopf 的极大值原理去研究向量场或张量场与流形的曲率间的关系，从而得到流形上的整体性质．迄今， Bochner 技巧在几何学的研究中是一种非常有用的方法．例如，在 Riemann 流形和 Kähler 流形中，Bochner 技巧得到深入的研究和详细的应用 ([3]-[5]) ．近十几年来，在著名的微分几何学家陈省身教授的创导下，整体实 Finsler 几何和复 Finsler 几何均已取得了许多重要的进展 ([6]-[8]). Abate 和 Patrizio[8] 在实 Finsler 流形上建立了 Cartan-Finsler 联络，在复 Finsler 流形上建立了 Chern-Finsler 联络．基于实 Finsler 流形上的 Laplace 算子等相关理论，钟同德和钟春平研究了实 Finsler 流形上的 Bochner 技巧及其应用 ([10]) ．本章，在规格化复坐标系及规格化 $(1,0)$ 型水平标架场下，利用 Chern-Finsler 联络及其曲率，给出了射影切丛 PTM 上的水平 Laplace 算子的表达式（即 Weitzenböck 公式），同时还得到了射影切丛 PTM 上有关全纯向量丛上的水平 Laplace 算子．最后，作为 Bochner 技巧的应用，在 Chern-Finsler 联络的 $(1,1)$ 型挠率为零的条件下，得到了相应的 Bochner 型消灭定理.

§1.1 复 Finsler 流形

设 M 为 n 维复流形， $T^{1,0}M$ 为 M 的全纯切丛， $\pi : T^{1,0}M \to M$ 为典则投影， $T^{1,0*}M$ 表示它的余切丛．设 $\{z^1,...,z^n\}$ 为复流形上一点 $p \in M$ 的局部坐标系，则向量 $v \in T^{1,0}_pM$ 可表示为

$$v = v^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}$$

这里采用了爱因斯坦求和约定，其中 $\alpha = 1, \cdots, n$. 我们知道， $T^{1,0}M$ 是一个 $2n$ 维的复流形，其局部坐标是 $\{z^1, \cdots, z^n, v^1, \cdots, v^n\}$. 因此， $T^{1,0}(T^{1,0}M)$ 的局部标架为

$$\{\partial_1, \cdots, \partial_n, \dot{\partial}_1, \cdots, \dot{\partial}_n\}$$

其中

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha},\ \dot{\partial}_\alpha = \frac{\partial}{\partial v^\alpha},\ \ \alpha = 1, \cdots, n.$$

记 $o: M \to T^{1,0}M$ 为 $T^{1,0}M$ 的零截面，亦即 $o(p)$ 为 $T_p^{1,0}M$ 的原点. 设 $\tilde{M} = T^{1,0}M/o(M)$ 为 $T^{1,0}M$ 除去它的零截面. $\tilde{M}$ 有一个自然投影 $\pi: \tilde{M} \to M$，即 $\pi: T^{1,0}M \to M$ 在 $\tilde{M}$ 上的限制. 相应地，$T^{1,0}\tilde{M} \in T^{1,0}(T^{1,0}M)$，且有自然投影 $\tilde{\pi}: T^{1,0}\tilde{M} \to \tilde{M}$，它是典则投影 $\tilde{\pi}: T^{1,0}(T^{1,0}M) \to \tilde{M}$ 在 $T^{1,0}\tilde{M}$ 上的限制.

定义 1.1.1[8] M 的垂直丛 $\mathcal{V}$ 定义为

$$\mathcal{V} = \mathcal{V}^{1,0} = ker\ d\pi \subset T^{1,0}\tilde{M}.$$

显然，$\tilde{\pi}: \mathcal{V} \to \tilde{M}$ 为一 n- 维的全纯向量丛，其局部标架为 $\{\dot{\partial}_1, \cdots, \dot{\partial}_n\}$.

设 $j_p: T_p^{1,0}M \to T^{1,0}M$ 为包含映射，对任意的 $v \in T_p^{1,0}M$, 将 $K_v: T_p^{1,0}M \to T_v^{1,0}(T_p^{1,0}M)$ 视为恒等映射，则有典则同构

$$\ell_v = d(j_{\pi(v)})_v \circ K_v : T^{1,0}_{\pi(v)}M \to \mathcal{V}_v.$$

定义 1.1.2[8] 复径向垂直向量场 $\ell: \tilde{M} \to \mathcal{V}$ 定义为

$$\ell(v) = \ell_v(v).$$

设 $p^{1,0}: T_{\mathbb{C}}(T^{1,0}M) \to T^{1,0}(T^{1,0}M)$ 为自然投影. 记 $d^{1,0} = p^{1,0} \circ d$； $\mathcal{X}(T^{1,0}M)$ 为 $T^{1,0}M$ 的截面空间，$\mathcal{X}_{\mathcal{O}}(T^{1,0}M)$ 为 $T^{1,0}M$ 的全纯截面空间.

定义 1.1.3[8] M 上的复化非线性联络是一映射

$$\tilde{D}: \mathcal{X}(T^{1,0}M) \to \mathcal{X}(T^*_{\mathbb{C}}M \otimes T^{1,0}M)$$

使得，对任意 $p \in M$ 和 $\xi, \xi' \in \mathcal{X}(T^{1,0}M)$ 且 $\xi(p) = \xi'(p) = v$，满足

$$\tilde{D}0 = 0;$$

$$\tilde{D}\xi'_p - \tilde{D}\xi_p = \ell_v \circ (d^{1,0}\xi'_p - d^{1,0}\xi_p).$$

$\tilde{D}$ 可唯一写成

$$\tilde{D} = \tilde{D}' + \tilde{D}''$$

其中

$$\tilde{D}': \mathcal{X}(T^{1,0}M) \to \mathcal{X}(\wedge^{1,0}M \otimes T^{1,0}M),\quad \tilde{D}'': \mathcal{X}(T^{1,0}M) \to \mathcal{X}(\wedge^{0,1}M \otimes T^{1,0}M).$$

定义 1.1.4[8] 设 $\tilde{D}$ 为 M 上的复化非线性联络。若对任意的 $\xi \in \mathcal{X}_{\mathcal{O}}(T^{1,0}M)$，有

$$\tilde{D}''\xi = 0,$$

则称 $\tilde{D}$ 为 M 上的复非线性联络.

定义 1.1.5[8] 设 J 为 $T_{\mathbb{C}}\tilde{M}$ 上的复结构，则复水平丛是 $T_{\mathbb{C}}\tilde{M}$ 的子丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ，它满足 J 不变，共轭不变（即 $\overline{\mathcal{H}_{\mathbb{C}}} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ ），且

$$T_{\mathbb{C}}\tilde{M} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}} + \mathcal{V}_{\mathbb{C}}$$

因为 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 是 J 不变的，故 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H}^{1,0} \oplus \mathcal{H}^{0,1}$, 其中 $\mathcal{H}^{1,0} = \mathcal{H}_{\mathbb{C}} \cap T^{1,0}(\tilde{M})$; 又因为 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 是共轭不变的，则 $\mathcal{H}^{0,1} = \overline{\mathcal{H}^{1,0}}$, 也即复水平丛 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}}$ 完全由它的 $(1,0)$- 部分 $\mathcal{H}^{1,0}$ 确定，下面简单用 $\mathcal{H}$ 表示 $\mathcal{H}^{1,0}$.

定义 1.1.6[8] 复水平映射是一复线性丛映射 $\Theta : \mathcal{V}_{\mathcal{C}} \to T_{\mathbb{C}}\tilde{M}$, 且与 $T_{\mathbb{C}}\tilde{M}$ 的复结构 J 及共轭运算可交换，且对所有 $v \in \tilde{M}$ 满足

$$(d\pi \circ \Theta)_v\big|_{\mathcal{V}^{1,0}} = \ell_v^{-1}\big|_{\mathcal{V}^{1,0}}.$$

因为 $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \mathcal{V}^{1,0} \oplus \mathcal{V}^{0,1}$ ， $\mathcal{V}^{0,1} = \overline{\mathcal{V}^{1,0}}$ ，及 Θ 与复结构 J 和共轭运算可交换，从而有 $\Theta(\mathcal{V}^{1,0}) \subset T^{1,0}\tilde{M}$ ，也即 Θ 完全由它在 $\mathcal{V}^{1,0}$ 上的作用确定.

文 [8] 证明了复水平丛、复非线性联络、复水平丛是一一对应的，亦即三者可以相互给出定义的.

定义 1.1.7[8] 复流形 M 上的复化垂直联络是复化垂直丛 $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ 上的线性联络，亦即是一线性映射 $D : \mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}}) \to \mathcal{X}(T^*_{\mathbb{C}}\tilde{M} \otimes \mathcal{V}_{\mathbb{C}})$ ，且对所有 $\tilde{M}$ 上的光滑函数 f 和 $V \in \mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$, 满足

$$D(fV) = fDV + df \otimes V$$

因为定义中没有提到 $T_{\mathbb{C}}\tilde{M}$ 上的复结构, 故定义太广泛了. 下对联络 D 作三个假设. 第一，假设 D 和共轭运算可交换，即对任意 $V \in \mathcal{X}(\mathcal{V}_{\mathbb{C}})$, D 满足

$$D(\bar{V}) = \overline{DV} \tag{1.1.1}$$

由于 $\mathcal{V}_{\mathbb{C}} = \mathcal{V}^{1,0} \oplus \mathcal{V}^{0,1}$ 和 $\mathcal{V}^{0,1} = \overline{\mathcal{V}^{1,0}}$ ，故 D 完全由它在 $\mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0})$ 上的作用确定.

第二，假设 D 限制在 $\mathcal{V}^{1,0}$ 上与复结构 J 可交换，也即对任意 $V \in \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0})$ ，满足

$$D(JV) = J \circ DV \tag{1.1.2}$$

最后，假设对于 $\mathcal{V}^{1,0}$ 的全纯截面 V, $1-$ 形式 DV 和 J 可交换，也即对任意 $V \in \mathcal{X}_{\mathcal{O}}(\mathcal{V}^{1,0})$, 有

$$(DV) \circ J = J \circ (DV) \tag{1.1.3}$$

因为 $T^*_{\mathbb{C}}\tilde{M} = \wedge^{1,0}\tilde{M} \oplus \wedge^{0,1}\tilde{M}$, 故联络 D 可分解成

$$D = D^{'} + D^{''}$$

其中 $D^{'} : \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0}) \to \mathcal{X}(\wedge^{1,0}\tilde{M} \otimes \mathcal{V}^{1,0}),\ \ D^{''} : \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0}) \to \mathcal{X}(\wedge^{0,1}\tilde{M} \otimes \mathcal{V}^{1,0})$. 则 (1.1.3) 式等价于

$$D^{''}V = 0$$

定义 1.1.8[8] 复垂直联络是满足 (1.1.1) – (1.1.3) 的复化垂直联络 D. 特别地, D 可视为定义在 $\mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0})$ 上, 取值于 $\mathcal{X}(T^*_{\mathbb{C}}\tilde{M} \otimes \mathcal{V}^{1,0})$. 必要时, 由 (1.1.1) 式, D 可以扩展到 $\mathcal{V}_{\mathbb{C}}$ 上, 且是复线性的.

在局部坐标下, 对所有 $V \in \mathcal{X}(\mathcal{V}^{1,0})$, 复垂直联络可表示为

$$DV = [dV^\beta + V^\alpha \omega^\beta_\alpha] \otimes \dot{\partial}_\beta$$

其中, 对于适当的系数 $\tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha;\mu}$ 和 $\tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\gamma}$, $\omega^\beta_\alpha = \tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha;\mu}dz^\mu + \tilde{\Gamma}^\beta_{\alpha\gamma}dv^\gamma$. 且对所有 $X \in T^{1,0}\tilde{M}$

$$\nabla_X V = [X(V^\alpha) + \omega^\alpha_\beta(X)V^\beta]\dot{\partial}_\alpha, \quad \nabla_X \bar{V} = \overline{\nabla_{\bar{X}} V}$$

$$\nabla_{\bar{X}} V = \bar{X}(V^\alpha)\dot{\partial}_\alpha, \qquad \nabla_{\bar{X}} \bar{V} = \overline{\nabla_X V}.$$

设 D 为复垂直联络, 定义丛映射 $\wedge : T^{1,0}\tilde{M} \to \mathcal{V}$ 为

$$\wedge(X) = \nabla_X \ell$$

在局部坐标下,

$$\wedge(X) = [\dot{X}^\alpha + \omega^\alpha_\beta(X)v^\beta]\dot{\partial}_\alpha$$

定义 1.1.9[8] 如果丛映射 $\wedge|_{\mathcal{V}} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ 是丛同构, 则称复垂直联络 D 为好的复垂直联络.

因此, 复垂直联络 D 为好的复垂直联络, 当且仅当 $\mathcal{H}_{\mathbb{C}} = \mathcal{H} \oplus \bar{\mathcal{H}}$ 是复水平丛, 其中 $\mathcal{H} = ker\wedge \subset T^{1,0}\tilde{M}$. 在局部坐标下, D 是好的当且仅当矩阵

$$L^\alpha_\beta = \delta^\alpha_\beta + \tilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta}v^\gamma$$

是可逆的. 记 $((L^{-1})^\mu_\nu)$ 为其逆矩阵, 则 $\mathcal{H}$ 的标架可表示为

$$\delta_\alpha = \partial_\alpha - (L^{-1})^\mu_\nu \tilde{\Gamma}^\nu_{\gamma;\alpha}v^\gamma\dot{\partial}_\mu = \partial_\alpha - \Gamma^\mu_\alpha\dot{\partial}_\mu,$$